Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Хатамов, Многомерные аналоги прямых и обратных теорем Джексона и Бернштейна и их обобщения, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 4, 608–615

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm876>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 05:12:52

УДК 517.5

МНОГОМЕРНЫЕ АНАЛОГИ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ТЕОРЕМ ДЖЕКСОНА И БЕРНШТЕЙНА И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

А. Хатамов

Получен вариант многомерных аналогов классических прямых и обратных теорем Джексона и Бернштейна–Валле-Пуссена, более сильный, чем такие же аналоги, полученные С. М. Никольским, а также существенные обобщения этих теорем на полиномиальные приближения функций действительных переменных из пространств Никольского и Бесова на ограниченных областях с липшицевой границей. Прямая теорема, относящаяся к пространствам Никольского, ранее получена Ю. А. Брудным и обобщена на совместные полиномиальные приближения функций и их производных В. Н. Конаваловым.

Библиография: 14 названий.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство с обычной нормой $\|\cdot\|$ ($n \geq 1$), G – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $L_p(G)$ – квазинормированное пространство всех измеримых действительных функций на G , суммируемых в p -й степени с квазинормой

$$\|f\|_{p,G} := \left(\int_G |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (0 < p < \infty),$$

$$\|f\|_{\infty,G} := \sup \operatorname{vrai} \{ |f(x)| : x \in G \}.$$

При $0 < p \leq \infty$ и целых $l \geq 0$ через $W_p^{(l)}(G)$ обозначим изотропное пространство Соболева функций $f \in L_p(G)$, имеющих на G обобщенные в смысле Соболева частные производные $D^{(l)}(e)f$ ($D^{(0)}(e)f \equiv f$) порядка l по направлению каждого n -мерного единичного вектора e и обладающих конечной квазиполунормой (см. [1]):

$$|f|_{W_p^{(l)}(G)} = \sup \{ \|D^{(l)}(e)f\|_{p,G} : e \in \mathbb{R}^n, \|e\| = 1 \}.$$

При целых $k \geq 0$ символ $\Delta^{(k)}(\varepsilon e)f$ обозначает k -ю разность от функции f с шагом $\varepsilon \geq 0$ по направлению единичного вектора e :

$$\Delta^{(0)}(\varepsilon e)f(x) \equiv f(x),$$

$$\Delta^{(k)}(\varepsilon e)f(x) := \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i f(x + i\varepsilon e) \quad (k \geq 1).$$

Если для каждого n -мерного единичного вектора e и некоторого целого числа $l \geq 0$ на множестве G существует $D^{(l)}(e)f \in L_p(G)$, то при $\delta \geq 0$ определим изотропные модули гладкости k -го порядка для производных l -го порядка

$$\omega_k^{(l)}(f, \delta)_{p,G} = \sup \left\{ \sup \{ \|\Delta^{(k)}(\varepsilon e) D^{(l)}(e)f\|_{p, G_{k\varepsilon e}} : 0 \leq \varepsilon \leq \delta \} : e \in \mathbb{R}^n, \|e\| = 1 \right\},$$

где $G_{k\varepsilon e}$ – подмножество G , состоящее из всех точек $x \in G$, для которых отрезки прямой $[x, x + k\varepsilon e]$ полностью лежат в G . Верхний (нижний) индекс в обозначении $\omega_k^{(l)}(\cdot)$ мы будем опускать в случае его равенства нулю (единице). Пусть $\alpha > 0$, целые числа k и ν удовлетворяют неравенствам $0 \leq \nu < \alpha < k + \nu$. Такую пару чисел (k, ν) называют *допустимой парой*. При $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ через $B_{p,q}^\alpha(G)$ обозначим пространство Бесова (при $q = \infty$ – пространство Никольского $H_p^\alpha(G) = B_{p,\infty}^\alpha(G)$) функций $f \in L_p(G)$, для которых при каждом единичном векторе e на множестве G существует $D^\nu(e)f \in L_p(G)$ и конечна квазинорма

$$\begin{aligned} |f|_{B_{p,q}^\alpha(G)} &:= \left(\int_0^\infty [t^{-(\alpha-\nu)} \omega_k^{(\nu)}(f, t)_{p,G}]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} & \text{при } 0 < q < \infty, \\ |f|_{B_{p,\infty}^\alpha(G)} &:= \sup \{ t^{\nu-\alpha} \omega_k^{(\nu)}(f, t)_{p,G} : t > 0 \} & \text{при } q = \infty. \end{aligned}$$

Как известно,

$$\|f\|_{B_{p,q}^\alpha(G)} := \|f\|_{p,G} + |f|_{B_{p,q}^\alpha(G)}$$

при $1 \leq p \leq \infty$ и $1 \leq q \leq \infty$ является нормой пространства $B_{p,q}^\alpha(G)$ и превращает его в банахово пространство [1], а при $0 < p \leq \infty$ и $0 < q \leq \infty$ – является квазинормой пространства $B_{p,q}^\alpha(G)$ [2].

Для целых $N \geq 0$ и $n \geq 1$ через $P_{N,n}$ обозначим множество всех алгебраических полиномов $g(x) = \sum C_\lambda x^\lambda$ степени не выше N по совокупности n переменных, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – мультииндекс с целыми неотрицательными компонентами λ_i , $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$, C_λ – действительные числа, а суммирование производится по всем λ , для которых $|\lambda| := \lambda_1 + \dots + \lambda_n \leq N$. Через $E_N(f, G)_p$ обозначим наименьшее уклонение функции $f \in L_p(G)$ от многочленов $g \in P_{N,n}$ по квазинорме пространства $L_p(G)$, т. е.

$$E_N(f, G)_p := \inf \{ \|f - g\|_{p,G} : g \in P_{N,n} \}.$$

Пусть $0 < \alpha < \infty$, $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$. Пространства

$$\begin{aligned} E_{p,q}^\alpha(G) &:= \left\{ f \in L_p(G) : \|f\|_{E_{p,q}^\alpha(G)} \right. \\ &:= \|f\|_{p,G} + \left(\sum_{N=1}^\infty [N^{\alpha-1/q} E_N(f, G)_p]^q \right)^{1/q} < \infty \Big\}, \\ E_{p,\infty}^\alpha(G) &:= \left\{ f \in L_p(G) : \|f\|_{E_{p,\infty}^\alpha(G)} \right. \\ &:= \|f\|_{p,G} + \sup \{ N^\alpha E_N(f, G)_p : N = 1, 2, \dots \} < \infty \Big\} \end{aligned}$$

являются аппроксимационными пространствами, а величина $\|\cdot\|_{E_{p,q}^\alpha(G)}$ – квазинормой пространства $E_{p,q}^\alpha(G)$ [2].

Пусть A и B – квазинормированные пространства. Если выполнено теоретико-множественное включение $A \subset B$ и неравенство $\|a\|_B \leq C\|a\|_A$ для любого $a \in A$, где C – положительная величина, не зависящая от a , то будем говорить, что A *вложено непрерывно* в B и пишем $A \hookrightarrow B$.

Пусть $W^l H^\alpha(E)$ – класс всех функций f , имеющих непрерывную производную порядка $l \geq 0$ на некотором открытом или замкнутом множестве $E \subset \mathbb{R}$, для модуля непрерывности которых при некоторых $K = \text{const} > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ и всех $\delta \geq 0$ справедлива оценка $\omega(f^{(l)}, \delta) \leq K\delta^\alpha$. Через $\widetilde{W}^l H^\alpha$ обозначим класс всех 2π -периодических функций $f \in W^l H^\alpha(\mathbb{R})$.

Всюду ниже $C(\beta_1, \beta_2, \dots)$, $C_1(\beta_1, \beta_2, \dots)$, $\dots$ обозначают положительные величины, зависящие от параметров, указанных в скобках, и индексов.

Прямая теорема Джексона [3] и обратная теорема Бернштейна [4], уточненная Валле-Пуссеном [5], дают следующую характеристику класса $\widetilde{W}^l H^\alpha$ ($l = 0, 1, \dots$, $0 < \alpha < 1$): для того чтобы $f \in \widetilde{W}^l H^\alpha$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$E_N^T(f) \leq C(l)N^{-l-\alpha}, \quad (1)$$

где $E_N^T(f)$ – наилучшее приближение функции $f \in \widetilde{W}^l H^\alpha$ тригонометрическими полиномами степени не выше N в равномерной метрике.

В той же работе [3] доказано сохранение порядка стремления к нулю правой части оценки (1) для $E_N(f)$ – наилучших приближений функции $f \in W^l H^\alpha([-1, 1])$ алгебраическими многочленами степени не выше N на отрезке $[-1, 1]$, в [4], [5] показано, что обратная теорема имеет место не для всего отрезка $[-1, 1]$, а только на каждом отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$, т.е. из оценки (1) для $E_N(f)$ вытекает принадлежность f классу $W^l H^\alpha([a, b])$ для любого отрезка $[a, b] \subset (-1, 1)$ (см. также [6, с. 91]). Отметим также, что Никольским установлена [7] возможность характеристики пространства $H_\infty^\alpha(G)$ ($0 < \alpha < \infty$), где G – ограниченная область с гладкой границей в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), в терминах наилучших приближений алгебраическими многочленами на кубе T , содержащем G , функций $f \in H_\infty^\alpha(G)$, допускающих продолжение до функций $f \in H_\infty^\alpha(T)$.

Такая же ситуация справедлива для функций многих действительных переменных пространств Никольского и Бесова, что следует из результатов монографии [1] Никольского, описывающих эти пространства в терминах наилучших приближений тригонометрическими полиномами и целыми функциями экспоненциального сферического типа, а также из следующей теоремы и предложения настоящей работы.

ТЕОРЕМА. Если G – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) с липшицевой границей, то при $0 < \alpha < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ имеем

$$B_{p,q}^\alpha(G) \subset E_{p,q}^\alpha(G) \subset B_{p,q}^\alpha(D),$$

где D – любое открытое множество, компактно вложенное в G .

Нижеследующее предложение подтверждает невозможность замены множества D на G в приведенной теореме.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Вложение

$$E_{p,q}^\alpha((-1, 1)^n) \subset B_{p,q}^\alpha((-1, 1)^n)$$

не имеет места ни при каких значениях параметров α , p , q , удовлетворяющих какому-либо из следующих условий:

- а) $1/2 + 1/p < \alpha \leq 3/(2p_1) + 1/2 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало, $p_1 = \max\{1, p\}$, $2/3 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ (при $q = \infty$ можно брать $\varepsilon = 0$);
- б) $1/2 < \alpha \leq 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало, $p = \infty$, $0 < q \leq \infty$ (при $q = \infty$ можно положить $\varepsilon = 0$).

Приведенная выше теорема представляет собой более сильный вариант многомерных аналогов классических прямых и обратных теорем Джексона и Бернштейна–Валле-Пуссена, чем такие же аналоги, полученные Никольским в [7], и их существенные обобщения на полиномиальные приближения функций многих действительных переменных из пространств Никольского и Бесова на ограниченных областях с липшицевой границей.

ЗАМЕЧАНИЕ. Прямая теорема, касающаяся пространств Никольского (левое вложение приведенной теоремы при $q = \infty$), ранее получена Брудным и обобщена на совместные полиномиальные приближения функций и их производных Коноваловым (см. ниже в начале § 1 теорему А и оценки (2), (4) и (5)).

§ 1. Доказательство теоремы

1.1. Сначала докажем первое вложение теоремы. Для этого воспользуемся частным случаем теоремы Коновалова [8]. Прежде чем сформулировать эту теорему, приведем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Величина $\omega_k^{(l)}(f, \delta)_p$ называется *функцией типа k -го модуля непрерывности*, если при каждом $\delta \geq 0$ она конечна, неотрицательна, не убывает при возрастании δ и при любом $\tau \geq 0$ удовлетворяет неравенству

$$\omega_k^{(l)}(f, \tau\delta)_p \leq (1 + \tau)^k \omega_k^{(l)}(f, \delta)_p.$$

ТЕОРЕМА А (В. А. Коновалов). Если G – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) с липшицевой границей, $1 \leq p \leq \infty$, l и k – целые неотрицательные числа, причем $l + k > 0$, и для функции f , определенной на G , $\omega_k^{(l)}(f, \delta)_p$ – функция типа k -го модуля непрерывности, то при каждом $N \geq l + k - 1$ найдется полином $g \in P_{N,n}$ такой, что при $0 \leq s \leq l$ выполнено неравенство

$$|f - g|_{W_p^{(s)}(G)} \leq C(n, l, k, s, G) \omega_{l-s+k}^{(s)}\left(f, \frac{1}{N}\right)_{p,G}.$$

Полагая в теореме А $s = l = 0$ для любой функции $f \in L_p(G)$ при $1 \leq p \leq \infty$, $k = 1, 2, \dots, N \geq k - 1$ имеем оценку

$$E_N(f, G)_p \leq C(n, k, G) \omega_k\left(f, \frac{1}{N}\right)_{p,G}. \quad (2)$$

Эта оценка фактически установлена ранее Брудным [9], [10].

Пусть $f \in B_{p,q}^\alpha(G)$ – любая функция. Тогда $f \in L_p(G)$ и

$$\int_0^\infty t^{-1-\alpha q} \omega_{[\alpha]+1}(f, t)_{p,G} dt < \infty \quad \text{при } 0 < q < \infty, \quad (3)$$

$$\sup\{t^{-\alpha} \omega_{[\alpha]+1}(f, t)_{p,G} : t > 0\} < \infty \quad \text{при } q = \infty. \quad (4)$$

Так как пространства $B_{p,q}^\alpha(G)$ для областей G с липшицевой границей не зависят от допустимых пар (k, ν) , то в их определении можно положить $k = [\alpha] + 1$ и $\nu = 0$. На основании этого, считая $q = \infty$, из (2) и (4) получим оценку

$$\begin{aligned} \sup\{N^\alpha E_N(f, G)_p : N = 1, 2, \dots\} &\leq C(n, \alpha, G) \sup\{t^{-\alpha} \omega_{[\alpha]+1}(f, t)_{p,G} : t > 0\} \\ &= C(n, \alpha, G) \|f\|_{B_{p,\infty}^\alpha(G)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть теперь $0 < q < \infty$. С учетом (2), (3) и определения квазиполунормы пространств $B_{p,q}^\alpha(G)$ получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,q}^\alpha(G)}^q &\geq \int_0^1 t^{-1-\alpha q} \omega_{[\alpha]+1}^q(f, t)_{p,G} dt = \int_1^\infty \tau^{-1+\alpha q} \omega_{[\alpha]+1}^q\left(f, \frac{1}{\tau}\right)_{p,G} d\tau \\ &= \sum_{N=1}^\infty \int_N^{N+1} \tau^{-1+\alpha q} \omega_{[\alpha]+1}^q\left(f, \frac{1}{\tau}\right)_{p,G} d\tau \\ &\geq C(\alpha, q) \sum_{N=1}^\infty N^{-1+\alpha q} \omega_{[\alpha]+1}^q\left(f, \frac{1}{N+1}\right)_{p,G} \\ &\geq 2^{-1-[\alpha]} C(\alpha, q) \sum_{N=1}^\infty N^{-1+\alpha q} \omega_{[\alpha]+1}^q\left(f, \frac{1}{N}\right)_{p,G} \\ &\geq C(\alpha, q, n, G) \sum_{N=1}^\infty N^{-1+\alpha q} E_N^q(f, G)_p. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) по определению квазинорм пространств $E_{p,q}^\alpha(G)$ и $B_{p,q}^\alpha(G)$ получим неравенство

$$\|f\|_{E_{p,q}^\alpha(G)} \leq C_1(\alpha, q, n, G) \|f\|_{B_{p,q}^\alpha(G)}.$$

Итак, первое вложение теоремы доказано.

1.2. Докажем теперь второе вложение. Пусть выполнены условия теоремы и $f \in E_{p,q}^\alpha(G)$. Функцию f представим в виде ряда, сходящегося к f по норме $L_p(G)$: $f(x) = \sum_{l=0}^\infty u_l(x)$, где $u_0 = g_1$, $u_l = g_{2^l} - g_{2^{l-1}}$ при $l = 1, 2, \dots$, а $g_{2^l} \in P_{2^l,n}$ – полином наилучшего $L_p(G)$ -приближения функции f подпространством $P_{2^l,n}$. Легко заметить, что

$$\|u_0\|_{p,G} \leq 2\|f\|_{p,G}, \quad \|u_l\|_{p,G} \leq 2E_{2^{l-1}}(f, G)_p.$$

В работе [11] Никольским доказана следующая оценка для $p_N \in P_{N,n}$:

$$\begin{aligned} &\left\| (D^\lambda p_N(x)) (\sqrt{r(x, \partial G)} + N^{-1})^{\gamma+|\lambda|} \right\|_{p,G} \\ &\leq C(\lambda, \gamma, n, G) N^{|\lambda|} \left\| p_N(x) (\sqrt{r(x, \partial G)} + N^{-1})^\gamma \right\|_{p,G}, \end{aligned} \quad (7)$$

где λ – целочисленный мультииндекс с неотрицательными компонентами λ_i , $D^\lambda := \partial^{|\lambda|}/\partial x_1^{\lambda_1} \dots \partial x_n^{\lambda_n}$, γ – произвольное число, G – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) с границей ∂G класса C^1 , $r(x, \partial G)$ – расстояние от точки x до ∂G .

Пусть D – любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$, компактно вложенное в G , и G_0 – некоторая область с гладкой границей, содержащая $\overline{D}$ и содержащаяся в G и такая, что

$$\min_{x \in D} r(x, \partial G_0) > \frac{1}{2} \min_{x \in \overline{D}} r(x, \partial G).$$

Полагая $\gamma = 0$ в неравенстве (7), имеем

$$\left\| (D^\lambda p_N(x)) ((\sqrt{r(x, \partial G_0)} + N^{-1}))^{|\lambda|} \right\|_{p, G_0} \leq C(\lambda, n, G_0) N^{|\lambda|} \|p_N(x)\|_{p, G_0}.$$

Учитывая выбор области G_0 , отсюда получим оценку

$$\|D^\lambda p_N\|_{p, D} \leq C(\lambda, n, G, D) N^{|\lambda|} \|p_N\|_{p, G}.$$

Продолжение доказательства до его завершения слово в слово совпадает с продолжением доказательства теоремы 4 работы автора [12, с. 73–76], которая слабее, чем второе вложение доказываемой теоремы. Это доказательство аналогично доказательству соответствующей обратной теоремы для наилучших приближений целыми функциями экспоненциального сферического типа, приведенного на с. 259–262 монографии [1]. Теорема доказана.

§ 2. Доказательство предложения

2.1. Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА. *Функция $f(x) = \sqrt{1 - x_1^2}$ не принадлежит пространству $B_{p,q}^\alpha(G)((-1, 1)^n)$ ни при каких значениях параметров p, q, α , удовлетворяющих следующим условиям: $2/3 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\alpha > 1/2 + 1/p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть δ – любое достаточно малое положительное число. Тогда при $e_0 = (0, 1, \dots, 0)$ имеем

$$\begin{aligned} \omega_2(f, \delta)_{p, (-1, 1)^n} &= \sup_{\substack{e \in \mathbb{R}^n \\ \|e\|=1}} \sup_{0 \leq \varepsilon \leq \delta} \|\Delta^{(2)}(\varepsilon e) f\|_{p, (-1, 1)_{2\varepsilon}^n} \\ &\geq \sup_{0 \leq \varepsilon \leq \delta} \|\Delta^{(2)}(\varepsilon e_0) f\|_{p, (-1, 1-2\varepsilon) \times (-1, 1)^{n-1}} \\ &= \sup_{0 \leq \varepsilon \leq \delta} \left\{ \int_{(-1, 1)^{n-1}} dx_2 \dots dx_n \int_{-1}^{1-2\varepsilon} |\sqrt{1 - (x_1 + 2\varepsilon)^2} - \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{1 - (x_1 + \varepsilon)^2} + \sqrt{1 - x_1^2}|^p dx_1 \right\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (8)$$

Применяя теорему Лагранжа о конечном приращении, получим

$$\begin{aligned} I &:= \int_{-1}^{1-2\varepsilon} |\sqrt{1 - (x_1 + 2\varepsilon)^2} - 2\sqrt{1 - (x_1 + \varepsilon)^2} + \sqrt{1 - x_1^2}|^p dx_1 \\ &\geq \varepsilon^p \int_0^{1-2\varepsilon} \left| \frac{x_1 + \varepsilon + \theta}{\sqrt{1 - (x_1 + \varepsilon + \theta)^2}} - \frac{x_1 + \theta_1}{\sqrt{1 - (x_1 + \theta_1)^2}} \right|^p dx_1, \end{aligned} \quad (9)$$

где $0 < \theta = \theta(x_1)$, $\theta_1 = \theta_1(x_1) < \varepsilon$ для всех $x_1 \in [-1, 1 - 2\varepsilon]$, причем из выпуклости кверху и монотонности убывания функции $\sqrt{1 - x_1^2}$ следует, что $\theta_1(x_1) \leq \theta(x_1)$ при всех $x_1 \in [0, 1 - 2\varepsilon]$.

Далее оценим снизу при всех $x_1 \in [0, 1 - 2\varepsilon]$ и всех достаточно малых ε модуль разности

$$\begin{aligned} & \left| \frac{x_1 + \varepsilon + \theta}{\sqrt{1 - (x_1 + \varepsilon + \theta)^2}} - \frac{x_1 + \theta_1}{\sqrt{1 - (x_1 + \theta_1)^2}} \right| \\ & \geq \frac{x_1 [\sqrt{1 - (x_1 + \theta_1)^2} - \sqrt{1 - (x_1 + \varepsilon + \theta)^2}] + (\varepsilon + \theta - \theta_1) \sqrt{1 - (x_1 + \varepsilon + \theta)^2}}{\sqrt{1 - (x_1 + \theta_1)^2} \sqrt{1 - (x_1 + \varepsilon + \theta)^2}} \\ & \geq \frac{(\varepsilon + \theta - \theta_1)(1 - 2x_1\varepsilon - 2x_1\theta - 2\varepsilon\theta)}{[1 - (x_1 + \theta_1)^2]^{3/2}} \geq \frac{\varepsilon}{2(1 - x_1^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (9) получаем

$$\begin{aligned} I & \geq \frac{\varepsilon^{2p}}{2^p} \int_0^{1-2\varepsilon} \frac{dx_1}{(1 - x_1^2)^{3p/2}} \geq \frac{\varepsilon^{2p}}{2^p(2 - 2\varepsilon)^{3p/2}} \int_0^{1-2\varepsilon} \frac{dx_1}{(1 - x_1)^{3p/2}} \\ & = \frac{\varepsilon^{2p}}{2^p(2 - 2\varepsilon)^{3p/2}(3p/2 - 1)} [(2\varepsilon)^{-3p/2+1} - 1]. \end{aligned}$$

Это неравенство с учетом оценки (8) при $2/3 < p \leq \infty$ и достаточно малых $\delta > 0$ дает оценку

$$\omega_2(f, \delta)_{p, (-1, 1)^n} \geq C(p, n) \delta^{1/2+1/p}. \quad (10)$$

Неравенство (10) показывает, что при $2/3 < p \leq \infty$ и $\alpha > 1/2 + 1/p$ $f \notin B_{p, \infty}^\alpha((-1, 1)^n)$. Отсюда следует утверждение леммы.

2.2. Пусть $f(x) = \sqrt{1 - x_1^2}$. Так как для любых $x', x'' \in [-1, 1]^n$ $|f(x') - f(x'')| \leq |(x_1')^2 - (x_1'')^2|^{1/2}$, то для любого $\delta \geq 0$ имеет место неравенство $\omega(f, \delta) \leq \sqrt{2}\delta^{1/2}$. Легко заметить, что f выпукла на кубе $[-1, 1]^n$. Далее нам нужна

ТЕОРЕМА В. Пусть f непрерывна и выпукла на отрезке $[-1, 1]$,

$$\max\{f(x) : x \in [-1, 1]\} = 1, \quad \min\{f(x) : x \in [-1, 1]\} = 0.$$

Тогда при $1 \leq p < \infty$, $N = 1, 2, \dots$ имеет место оценка

$$E_N(f, [-1, 1])_p \leq CN^{-2/p} \omega(f, N^{-1+1/p})_{\infty, [-1, 1]}.$$

При $p = 1$ этот результат получен Ивановым [13], а при $1 < p < \infty$ — Стояновой [14].

Из этой теоремы следует, что при $0 < p < \infty$, $p_1 = \max\{1, p\}$, $n \in \mathbb{N}$ и $N \rightarrow \infty$ для функции $f(x) = \sqrt{1 - x_1^2}$ справедлива оценка

$$E_N(f, [-1, 1]^n)_p = O(N^{-3/(2p_1)-1/2}).$$

Отсюда имеем

$$f \in E_{p, q}^{3/(2p_1)+1/2-\varepsilon}((-1, 1)^n) \quad (11)$$

для любых $0 < \varepsilon < 3/(2p_1) + 1/2$ и $0 < q \leq \infty$ (при $q = \infty$ здесь можно положить $\varepsilon = 0$). Из (11) и леммы вытекает утверждение а) предложения.

Как известно, для рассматриваемой функции $f(x) = \sqrt{1 - x_1^2}$ выполнено неравенство (см. [6, с. 91])

$$E_N(f, [-1, 1])_\infty \leq \frac{\pi}{2N}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Отсюда при $N \Rightarrow \infty$ получаем, что $E_N(f, [-1, 1]^n)_\infty = O(N^{-1})$. Следовательно, $f \in E_{\infty, q}^{1-\varepsilon}((-1, 1)^n)$ для любых $0 < \varepsilon < 1$, $0 < q \leq \infty$ (при $q = \infty$ здесь можно брать $\varepsilon = 0$). Отсюда и из леммы получаем утверждение б) предложения. Предложение доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
- [2] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
- [3] Jackson D. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktion durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung: Dis. Göttingen, 1911.
- [4] Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. Собр. соч. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
- [5] Valloë Poussin Ch. J. De la leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris: Gauthier-Villars, 1919.
- [6] Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1977.
- [7] Никольский С. М. Некоторые вопросы приближения функций многих переменных // Конструк. теор. ф-й. Тр. Междунар. конф. (Варна, 1970). София: Изд-во БАН, 1972. С. 81–83.
- [8] Коновалов В. Н. Приближение многочленами функций многих переменных с сохранением дифференциально-разностных свойств // Укр. матем. ж. 1984. Т. 36. № 2. С. 154–159.
- [9] Брудный Ю. А. Об одной аппроксимационной лемме и ее применениях // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. 1972. № 15. С. 180–189.
- [10] Брудный Ю. А. Теорема продолжения для одного семейства функциональных пространств // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1976. Т. 56. С. 170–173.
- [11] Никольский С. М. Об одном методе покрытия области и неравенства для многочленов от многих переменных // Mathematica. 1966. V. 8. P. 345–356.
- [12] Хатамов А. Прямые и обратные теоремы теории полиномиальных аппроксимаций функций многих переменных // Узб. матем. ж. 1993. № 4. С. 66–76.
- [13] Ivanov K. G. Approximation of a convex function by means of polynomials and polygons in L -metric // Approximation and Function Spaces. Proc. Conf. (Gdansk, 1979). Warszawa, 1981. P. 287–293.
- [14] Stojanova M. P. Approximation of a convex function by algebraic polynomials in $L_p[a, b]$ ($1 < p < \infty$) // Serdica Bulg. Math. Publ. 1985. V. 11. P. 392–397.