Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. П. Долженко, С. В. Колесников, О поведении конформных отображений областей вблизи их выпуклых граничных дуг, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 4, 501–516

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8760>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:52:15

О поведении конформных отображений областей вблизи их выпуклых граничных дуг

Е. П. Долженко, С. В. Колесников

В работе рассматривается поведение производных от конформных отображений единичного круга на односвязные области комплексной плоскости, в границы которых входят какие-либо выпуклые или вогнутые достижимые дуги, а также поведение производных от обратных отображений. Устанавливаются существование и ограниченность производных на соответствующих дугах и вблизи них, формулируется и доказывается критерий непрерывности производных в точках этих дуг.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Пусть G – односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ∂G – ее граница, $w = \varphi(z)$ – однолистное и конформное отображение области G на единичный круг $D := \{w : |w| < 1\}$, $z = \psi(w) := \varphi^{-1}(w)$ – обратное к φ отображение.

Жорданова дуга (т.е. незамкнутая кривая без самопересечений) $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется *открытой*, если она не содержит своих концевых точек. Открытая ограниченная жорданова дуга $\Gamma \subset \partial G$ называется *достижимой дугой границы* области G , если существует такая односвязная ограниченная область $\Omega = \Omega(G, \Gamma) \subset G$ с жордановой границей $\partial\Omega \supset \Gamma$, что $\Lambda := \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma} \subset G$. Будем считать, что положительное направление на достижимой дуге Γ совпадает с положительным направлением обхода границы $\partial\Omega(G, \Gamma)$ области $\Omega(G, \Gamma)$.

Открытую дугу $\Gamma \subset \partial G$, достижимую из G с помощью области $\Omega(G, \Gamma)$, будем называть *выпуклой* (соответственно *вогнутой*) относительно G , если для любой точки $\zeta_0 \in \Gamma$ существует такая открытая поддуга $\sigma \ni \zeta_0$ дуги Γ , что любая хорда этой дуги лежит в $\bar{\Omega}(G, \Gamma)$ (соответственно вне $\Omega(G, \Gamma)$); при этом потребуем, чтобы (в случае отличия Γ от прямолинейного интервала) внутренность жордановой кривой, составленной из дуги Γ и ее хорды, ограничивала выпуклую область на $\mathbb{C}$.

Заметим, что открытая жорданова дуга $L \subset \partial G$ может изображать две различные достижимые дуги границы области G . Например, открытая полуокружность

$$L := \left\{ z : \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \operatorname{Im} z > 0 \right\}$$

при $G = D \setminus \bar{L}$ изображает, во-первых, выпуклую относительно G достижимую открытую дугу Γ_1 при

$$\Omega(G, \Gamma_1) = D_1 := \left\{ z : \left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \right\},$$

и во-вторых, вогнутую относительно G дугу Γ_2 при

$$\Omega(G, \Gamma_2) = \{ z : z \in D \setminus \bar{D}_1, \operatorname{Im} z > 0 \}.$$

Отметим еще, что если Γ является достижимым из G прямолинейным интервалом, то Γ является одновременно и выпуклой, и вогнутой достижимой дугой границы области G , определяемой одной и той же областью $\Omega(G, \Gamma)$.

Из известной теоремы Каратеодори и лемм Кёбе и Линделёфа [1; гл. 2, § 3] об однолистных конформных отображениях областей следует, что функция $\varphi(z)$ непрерывно продолжается из области $\Omega(G, \Gamma)$ на дугу Γ до гомеоморфизма $w = \varphi(z)$ множества $G \cup \Gamma$ множеству $D \cup \gamma$, где $\gamma = \varphi(\Gamma)$.

Говорят, что функция $f(w)$ имеет в точке $\omega \in C := \partial D$ *угловой граничный предел* $f(\omega)$, если она имеет предел $f(\omega)$ по каждому фиксированному углу с вершиной ω , образованному какими-либо двумя хордами круга D с общим концом в точке ω . Говорят также, что $f(w)$ имеет в точке ω *угловую производную* $f'_{\text{ang}}(\omega)$, если у $f(w)$ существует конечный угловой граничный предел $f(\omega)$ в точке ω и по любому такому углу существует (конечный или бесконечный) предел разностного отношения $(f(w) - f(\omega))/(w - \omega)$, равный $f'_{\text{ang}}(\omega)$, когда w стремится к ω . Известно, что существование у аналитической в круге D функции $f(w)$ конечной угловой производной $f'_{\text{ang}}(\omega)$ в точке $\omega \in C$ равносильно существованию в этой точке углового предела ее производной $f'(w)$, равного $f'_{\text{ang}}(\omega)$ (см., например, [2; предложение 4.7]).

Известно, что если область G выпукла и ограничена, то $\psi(w)$ имеет угловую производную в каждой точке окружности C (см. [2; упражнение 3 к п. 4.3]). Отсюда и из теоремы 5.5 той же работы следует, что если $f'_{\text{ang}}(\omega) \neq \infty$, то в точке ω существует и обычная производная $f'(\omega) = f'_D(\omega) = f'_{\text{ang}}(\omega)$.

Отметим еще, что в ряде работ рассматривался вопрос о непрерывности производных $\varphi'(z)$ и $\psi'(w)$ соответственно на $\bar{G}$ и $\bar{D}$ при дополнительных условиях гладкости границы ∂G (см., например, теоремы Келлога [1; гл. X, теорема 6] и Варшавского [3]).

В теореме 1 настоящей работы для случая выпуклых и вогнутых относительно области G достижимых дуг Γ ее границы доказывается гораздо более сильный результат, чем существование угловой производной. Именно, доказывается существование производных $\varphi'(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, и $\psi'(\omega)$, $\omega \in \gamma$, относительно $\Omega(G, \Gamma) \cup \Gamma$ и $D \cup \gamma$ соответственно, а также локальная ограниченность функций $\varphi'(z)$ и $\psi'(w)$ соответственно на этих множествах.

Ниже для доказательства теоремы 1, как и теоремы 2, существенно используется приводимый в лемме 2 локальный аналог известного интегрального представления типа Гергольца для производной функции $\psi'(w)$.

Что касается непрерывности $\varphi'(z)$ на множестве $G \cup \Gamma$ (т.е. на $\Omega(G, \Gamma) \cup \Gamma$), то, как показывает построенный в конце настоящей статьи пример выпуклой области G с гладкой границей Γ , этой непрерывности в некоторых точках $\zeta \in \Gamma$ может и не быть (как и непрерывности на дуге Γ угловой производной $\varphi'_{\text{ang}}(\zeta) = \varphi'(\zeta)$).

В теореме 2 доказывается (как для случая выпуклых, так и для случая вогнутых относительно G достижимых дуг Γ границы G) необходимое и достаточное условие непрерывности функции $\varphi'(z)$ относительно $\Omega(G, \Gamma) \cup \Gamma$ в какой-либо фиксированной точке $\zeta \in \Gamma$, а также аналогичное условие непрерывности функции $\psi'(w)$ относительно $D \cup \gamma$ в какой-либо фиксированной точке $\omega \in \gamma$. Результаты такого рода без наложения дополнительных условий гладкости на дугу Γ (типа условия Дини – см. [3]) авторам неизвестны.

2. Вспомогательные утверждения. Прежде всего определим правую (соответственно левую) полукасательную к дуге Γ в точке $\zeta_0 \in \Gamma$ как предельное положение (если оно существует) луча, выходящего из точки ζ_0 и проходящего через отличную от ζ_0 точку $\zeta \in \Gamma$, при стремлении ζ к ζ_0 вдоль Γ в отрицательном (соответственно положительном) направлении движения ζ по Γ .

Если достижимая дуга Γ выпукла или вогнута относительно области G , то очевидно, что в каждой ее внутренней точке ζ существует правая полукасательная. Пусть $\Theta(\zeta)$ обозначает величину угла, образованного правой полукасательной к дуге Γ в некоторой точке $\zeta \in \Gamma$ с положительным направлением действительной оси. Через $\vartheta(\zeta)$ обозначим однозначную ветвь бесконечнозначной функции $\Theta(\zeta)$ на Γ , обладающую следующими свойствами:

- 1) в случае достижимой дуги Γ , выпуклой относительно области G , функция $\vartheta(\zeta)$ монотонно не убывает, а в случае вогнутой кривой Γ она монотонно не возрастает при движении ζ вдоль Γ в положительном направлении;
- 2) в каждой точке $\zeta \in \Gamma$ колебание функции¹ $\vartheta(\zeta)$ строго меньше π .

Отметим, что в силу выпуклости или вогнутости дуги Γ функция $\vartheta(\zeta)$ непрерывна справа в каждой точке $\zeta \in \Gamma$, а в случае гладкости Γ она непрерывна на Γ .

Конечная комплекснозначная функция $f(z)$, определенная на некотором множестве $E \subset \mathbb{C}$, называется *локально ограниченной* на E , если для каждой точки ζ этого множества существует ее окрестность $U(\zeta) \subset \mathbb{C}$, на пересечении которой с этим множеством функция $f(z)$ ограничена. Скажем, что такая функция $f(z)$ имеет *производную* $f'(\zeta) = f'_E(\zeta)$ в точке $\zeta \in E$, предельной для E , если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{E \ni z \rightarrow \zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = f'_E(\zeta) \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Функцию $f(z)$, определенную в G , назовем *ограниченной* вблизи открытой достижимой дуги Γ , если для каждой точки $\zeta \in \Gamma$ существует такая ее окрестность в плоскости $\mathbb{C}$, в пересечении которой с $\Omega(G, \Gamma)$ функция $f(z)$ ограничена.

Для доказательства основных результатов работы (теорем 1, 2) нам понадобятся следующие три леммы.

ЛЕММА 1. Пусть Γ – спрямляемая открытая дуга границы односвязной области $G \subset \mathbb{C}$, достижимая из G с помощью жордановой области $\Omega(G, \Gamma)$, $z = \psi(w)$ –

¹ Колебанием конечной функции $f(z)$, определенной на множестве $E \subset \mathbb{C}$, в точке $z_0 \in E$ называется величина

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \{ |f(z') - f(z'')| : z', z'' \in E, |z' - z_0| < \delta, |z'' - z_0| < \delta \}.$$

однолистное конформное отображение единичного круга D на область G ,

$$\gamma := \psi^{-1}(\Gamma) = \{e^{it} : \alpha < t < \beta\};$$

$\tau(t)$ – действительная функция на (α, β) такая, что для почти каждого $t \in (\alpha, \beta)$ луч, выходящий из точки $\psi(e^{it})$ под углом $\tau(t)$ к положительному направлению действительной оси, совпадает с правой полукасательной дуги Γ в точке $\psi(e^{it})$.

Если в каждой точке интервала (α, β) функция $\tau(t)$ имеет колебание, строго меньшее π , то

$$\psi'(w) = f_1(w)e^{f_2(w)}, \quad w \in D, \quad (1)$$

где функция $f_1(w) \neq 0$ однозначна и аналитична на $D \cup \gamma$ (т.е. в некоторой области $Q \supset D \cup \gamma$), а функция $f_2(w)$ представима в D в виде

$$f_2(w) = \frac{i}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{it} + w}{e^{it} - w} \left(\tau(t) - t - \frac{\pi}{2} \right) dt, \quad w \in D. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $S(w)$ интеграл Шварца от функции $\tau_1(t) = \tau(t) - t - \pi/2$ на интервале (α, β) и равной 0 в остальных точках промежутка $[\alpha, \alpha + 2\pi]$:

$$S(w) := \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \tau_1(t) \frac{e^{it} + w}{e^{it} - w} dt, \quad w \in D. \quad (3)$$

Поскольку дуга Γ спрямляема, то $\psi(w)$ имеет конечное полное изменение на γ , так что почти в каждой точке $\omega \in \gamma$ существует производная $\psi'_{\gamma}(\omega)$ вдоль дуги γ . В свою очередь отсюда следует существование почти в каждой точке $\omega \in \gamma$ производной $\psi'(\omega) := \psi'_{D \cup \gamma}(\omega)$ относительно множества $D \cup \gamma$, равной $\psi'_{\gamma}(\omega)$ и равной угловому пределу функции $\psi'(w)$ в точке ω (см. [4; теорема 3]). При этом $\psi'(\omega) \neq 0$ почти всюду на γ (по граничной теореме единственности Лузина–Привалова [5; гл. IV, п. 2.5]).

Фиксируем некоторую точку $\omega = e^{it} \in \gamma$, в которой существует производная $\psi'(\omega) \neq 0$ относительно множества $D \cup \gamma$. Тогда (примем во внимание геометрический смысл аргумента производной функции ψ) угол наклона правой полукасательной к единичной окружности в точке ω (очевидно равный $t + \pi/2$) и угол $\tau(t)$ наклона правой полукасательной к образу Γ в точке $\zeta = \psi(e^{it})$ связаны соотношением $\tau(t) = (t + \pi/2) + \arg \psi'(e^{it})$, или, что то же, соотношением $\arg \psi'(e^{it}) = \tau_1(t)$. Здесь $\arg \psi'(e^{it})$ есть некоторое значение $\text{Arg } \psi'(e^{it})$. Отсюда следует, что $\psi'(e^{it}) = |\psi'(e^{it})|e^{i\tau_1(t)}$ почти всюду на (α, β) .

Далее (это легко проверяется), $\text{Re } S(w)$ является интегралом Пуассона функции $\tau_1(t) = \tau(t) - t - \pi/2$. Поэтому (см. [1; гл. IX, § 9, теорема 3]) почти в каждой точке $\omega = e^{it} \in \gamma$ у функции $\text{Re } S(w)$ существует угловой предел, равный $\tau_1(t)$. Отсюда следует, что угловые пределы функции $R(w) := \psi'(w)e^{-iS(w)}$ положительны почти в каждой точке $\omega \in \gamma$.

Покажем, что функция $R(w)$ аналитически продолжается через дугу γ . Пусть $\omega_0 = e^{it_0}$ – произвольная точка дуги γ , $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Так как колебание функции τ в точке t_0 строго меньше π , то существует отрезок $I \subset (\alpha, \beta)$ с центром в этой точке, на котором выполняется неравенство $m \leq \tau_1(t) \leq M$, где m и M – действительные

числа и $M - m < \pi$. Пусть $\tau_m(t)$ и $\tau_M(t)$ – функции, равные соответственно m и M на I и равные $\tau_1(t)$ в остальных точках промежутка $[\alpha, \alpha + 2\pi)$. Поскольку $\tau_m(t) \leq \tau_1(t) \leq \tau_M(t)$, то значение $\operatorname{Re} S(w)$ заключено между значениями в точке w интегралов Пуассона функций $\tau_m(t)$ и $\tau_M(t)$. Так как функции $\tau_m(t)$ и $\tau_M(t)$ непрерывны по t в точке t_0 , то интегралы Пуассона от этих функций имеют пределы в точке ω_0 по кругу D , равные соответственно m и M . Отсюда следует, что на пересечении круга D с некоторой круговой окрестностью точки ω_0 – обозначим это пересечение через Δ – все значения действительной части интеграла Шварца $S(w)$ принадлежат некоторому отрезку длины строго меньше π .

Положим

$$Q = \psi(\Delta), \quad \gamma' = \gamma \cap \partial\Delta, \quad \lambda = \partial\Delta \cap D.$$

По сказанному выше, можно считать, что в концах дуги λ существуют ненулевые производные функции ψ относительно $D \cup \gamma$, равные угловым пределам функции $\psi'(w)$ в этих точках соответственно. Пусть $w_1 = \varphi_1(w)$ – некоторая функция, однолистно и конформно отображающая круговой двуугольник Δ на единичный круг $D_1 := \{w_1 : |w_1| < 1\}$,

$$\gamma'_1 := \varphi_1(\gamma'), \quad \psi_1(w_1) := \varphi_1^{-1}(w_1), \quad \Psi(w_1) := \psi(\psi_1(w_1)).$$

Из существования ненулевых производных функции $\psi(w)$ в концах дуги λ следует, что кривая $\Lambda := \psi(\lambda)$ является гладкой дугой, образующей ненулевые углы с Γ в общих точках этих дуг. Используя это и выпуклость или вогнутость Γ относительно G , нетрудно видеть, что граница области Q спрямляема и, следовательно, функция $\Psi'(w_1) = \psi'(\psi_1(w_1))\psi'_1(w_1)$ принадлежит в круге D_1 классу Харди H_1 (см. [1; гл. X, § 1, теорема 1]). Непосредственно находя функцию $\psi_1(w_1)$, конформно отображающую круг D_1 на круговой двуугольник Δ с углами величины строго меньше π в концах дуги γ' , нетрудно показать, что для некоторой постоянной $\rho > 0$ выполняется неравенство $|\psi'_1(w_1)| > \rho$ при $w_1 \in D_1$. Отсюда следует, что функция $\psi'(\psi_1(w_1))$, как и $\Psi'(w_1)$, принадлежит классу H_1 в круге D_1 .

Как сказано выше, все значения функции $\operatorname{Re} S(w)$ при $w \in \Delta$ лежат на некотором отрезке длины строго меньше π . Отсюда следует, что значения функции $e^{-iS(\psi_1(w_1))}$ лежат в некотором угле с вершиной в точке 0 раствора строго меньше π . По теореме Смирнова (см. [5; гл. II, § 4]) в этом случае рассматриваемая функция $e^{-iS(\psi_1(w_1))}$ принадлежит классу Харди H_1 в круге D_1 .

Итак, доказано, что

$$\psi'(\psi_1) \in H_1, \quad e^{-iS(\psi_1)} \in H_1,$$

откуда (по формуле Коши–Буняковского) $R(\psi_1) \in H_{1/2}$. Кроме того, функция $R(\psi_1(w_1))$ не обращается в нуль в круге D_1 и имеет положительные угловые пределы почти всюду на дуге γ'_1 . Поэтому функция $\sqrt{R(\psi_1(w_1))}$ распадается в круге D_1 на две однозначные аналитические ветви, принадлежащие классу H_1 в D_1 и имеющие действительные угловые пределы почти всюду на γ'_1 . Фиксируем какую-либо одну из этих ветвей и будем ее обозначать по-прежнему $\sqrt{R(\psi_1(w_1))}$. Представим эту функцию интегралом Шварца от ее мнимой части. Так как эта мнимая часть равна нулю почти всюду на $\gamma'_1 = \varphi_1(\gamma')$, то интеграл Шварца по окружности $C_1 := \partial D_1$ равен интегралу Шварца по замкнутой дуге $\lambda_1 := C \setminus \gamma'_1$. Поскольку при всех $\omega \in \lambda_1$

ядро Шварца $(\omega + w_1)/(\omega - w_1)$ аналитично по w_1 в области $\mathbb{C} \setminus \lambda_1$, то обычным образом доказывается, что функция $\sqrt{R(\psi_1(w_1))}$ является однозначной аналитической функцией в этой области. Отсюда и из аналитичности функции $\varphi_1(w)$ (отображающей круговой двугольник Δ на круг D_1) на дуге γ' следует аналитичность функций $\sqrt{R(w)} = \sqrt{R(\psi_1(\varphi_1(w)))}$ и $R(w)$ в некоторой окрестности рассматриваемой точки ω_0 .

Ввиду произвольности точки $\omega_0 \in \gamma$ отсюда следует однозначность и аналитичность функции $R(w)$ в некоторой области, включающей в себя множество $D \cup \gamma$. При этом (по определению функции $R(w)$) имеем тождество

$$\psi'(w) = R(w)e^{iS(w)}, \quad w \in D. \quad (4)$$

Таким образом, имеет место формула (1) с $f_1(w) = R(w)$ и $f_2(w) = iS(w)$. Лемма доказана.

Пусть μ – действительная конечная борелевская мера, распределенная на дуге $\gamma := \varphi(\Gamma)$, порожденная (как мера Лебега–Стилтьеса) на γ ограниченной монотонной функцией $\vartheta(\psi(\zeta))$.

ЛЕММА 2. *В обозначениях леммы 1 пусть достижимая дуга Γ является выпуклой или вогнутой относительно области G . Тогда имеет место представление (1), где функция $f_1(w) \neq 0$ однозначна и аналитична на $D \cup \gamma$, а функция $f_2(w)$ равна*

$$f_2(w) = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} \ln \frac{1}{1 - w/\omega} d\mu(\omega). \quad (5)$$

Здесь $\ln W$ – та однозначная аналитическая ветвь функции $\operatorname{Ln} W$ в правой полуплоскости $\operatorname{Re} W > 0$, для которой $\ln 1 = 0$. При этом однозначная аналитическая в круге D функция $f_2(w)$ имеет в каждой точке $\omega \in \gamma$ конечный или бесконечный угловой предел изнутри D , а ее мнимая часть $\operatorname{Im} f_2(w)$, доопределенная в точках γ своими радиальными пределами, тогда и только тогда непрерывна в какой-либо точке $\omega_0 \in \gamma$ относительно $D \cup \gamma$, когда в точке $\zeta_0 = \psi(\omega_0) \in \Gamma$ непрерывна вдоль Γ функция $\vartheta(\zeta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\tau(t) = \vartheta(\psi(e^{it}))$ (определение функции ϑ см. выше во введении). Так как в случае выпуклости или вогнутости дуги Γ колебание $\vartheta(z)$ ($z \in \Gamma$) строго меньше π в каждой точке $z \in \Gamma$, то выполняется условие леммы 1 и, следовательно, имеет место представимость $\psi'(z)$ в виде (1), где $f_2(w) = iS(w)$ (см. (4)). По (3) имеем

$$S(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(e^{it} + w)(-t - \pi/2)}{e^{it} - w} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(e^{it} + w)\vartheta(\psi(e^{it}))}{e^{it} - w} dt. \quad (6)$$

Первое слагаемое обозначим через $R_1(z)$. Так как оно является интегралом типа Шварца от функции, аналитической на дуге γ , то оно аналитически продолжимо из D через дугу γ . Поскольку $(e^{it} + w)/(e^{it} - w) = 1 + 2we^{-it}/(1 - e^{-it}w)$, то второе слагаемое равно

$$c + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2e^{-it}w}{1 - e^{-it}w} \vartheta(\psi(e^{it})) dt, \quad c = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \vartheta(\psi(e^{it})) dt.$$

Интегрируя по частям интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2e^{-it}w}{1 - e^{-it}w} \vartheta(\psi(e^{it})) dt$$

и подставляя затем полученное выражение в (6), приходим к равенству

$$S(w) = R_1(w) + c + \frac{\vartheta(\psi(e^{it}))}{\pi i} \ln(1 - e^{-it}w) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} + \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \ln \frac{1}{1 - e^{-it}w} d\vartheta(\psi(e^{it})). \quad (7)$$

Отсюда и из (4) следует равенство (1), в котором

$$f_1(w) = R(w) \exp \left\{ iR_1(w) + ic + \frac{\vartheta(\psi(e^{it}))}{\pi} \ln(1 - e^{-it}w) \Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} \right\}.$$

Так как каждое слагаемое, стоящее под знаком экспоненты, продолжается аналитически через дугу γ , то функция $f_1(z)$ также продолжима через дугу γ и отлична от нуля. Функция же $f_2(w)$ определена равенством

$$f_2(w) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \ln \frac{1}{1 - e^{-it}w} d\vartheta(\psi(e^{it})) = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} \ln \frac{1}{1 - w/\omega} d\mu(\omega).$$

Если дуга Γ выпукла относительно области G , то функция $\vartheta(\psi(e^{it}))$ неубывающая, так что μ неотрицательна. Если же дуга Γ вогнута относительно G , то $\vartheta(\psi(e^{it}))$ невозрастающая и мера μ неположительна.

Так как $\vartheta(e^{it})$ непрерывна справа в каждой точке интервала (α, β) , то тем же свойством обладает и функция $\tau_1(t) = \vartheta(\psi(e^{it})) - t - \pi/2$. Отсюда из свойств интеграла Пуассона следует, что функция $\operatorname{Re} S(w)$, равная интегралу Пуассона функции $\tau_1(t)$, продолженная на γ равенством $\operatorname{Re} S(e^{it}) = \tau_1(t)$, непрерывна относительно $D \cup \gamma$ в точке $\omega_0 = e^{it_0} \in \gamma$ тогда и только тогда, когда в точке t_0 непрерывна функция $\vartheta(\psi(e^{it}))$. По (7) разность $iS(w) - f_2(w)$ аналитична на $D \cup \gamma$, поэтому функция $\operatorname{Im} f_2(w)$, доопределенная в точках γ своими радиальными предельными значениями, тогда и только тогда непрерывна в какой-либо точке $\omega_0 \in \gamma$ относительно $D \cup \gamma$, когда в точке $\zeta_0 = \psi(\omega_0) \in \Gamma$ непрерывна вдоль Γ функция $\vartheta(\zeta)$.

Остается доказать, что функция $\operatorname{Re} f_2(w) = (1/\pi)U_{\mu}(w)$, где

$$U_{\mu}(w) := \int_{\gamma} \ln \frac{1}{|\omega - w|} d\mu(\omega),$$

имеет конечный или бесконечный угловой предел изнутри D в каждой точке $\omega_0 \in \gamma$.

Если значение $U_{\mu}(\omega_0)$ бесконечно, то в случае $U_{\mu}(\omega_0) = +\infty$ мера μ неотрицательна – это может быть лишь в случае выпуклости дуги Γ относительно области G . В случае же неотрицательности меры μ потенциал $U_{\mu}(w)$ полунепрерывен снизу на $\mathbb{C}$ (см. [6; гл. 4 § 1, гл. 2 § 1]), поэтому он имеет предел $+\infty$ в точке ω_0 . Аналогично, в случае вогнутости дуги Γ относительно области G и равенства $U_{\mu}(\omega_0) = -\infty$ существует предел

$$\lim_{w \rightarrow \omega_0} U(w) = -\infty.$$

Таким образом, и в том, и в другом случае функция $f_2(w)$ имеет в ω_0 бесконечный предел.

Если же значение $U_\mu(\omega_0)$ потенциала $U_\mu(w)$ конечно и мера μ неотрицательна (т.е. Γ выпукла относительно G), то поступаем следующим образом. Именно, пусть V – угол раствора $\pi - 2\delta$ при некотором $\delta \in (0, \pi/2)$, образованный двумя хордами круга D одинаковой длины $l < 2$ с общим концом ω_0 ,

$$w \in \text{Sec} := V \cap \left\{ w' : |w' - \omega_0| < \frac{l}{2} \right\}.$$

Если $\omega \in C$ и $|\omega - \omega_0| < l/2$, то длина дуги $\widetilde{\omega_0\omega}$ меньше половины длины дуги $\widetilde{\omega_0\omega^*}$, отсекаемой ближайшей к ω стороной угла V от окружности C . Поэтому величина угла $\angle \omega^*\omega_0\omega$ больше $\delta/2$, а расстояние от ω до ближайшей к ней точки w_1 угла V удовлетворяет неравенству

$$|\omega - w_1| = |\omega - \omega_0| \sin \angle \omega^*\omega_0\omega \geq |\omega - \omega_0| \sin \left(\frac{\delta}{2} \right).$$

Так как $|\omega - w| \geq |\omega - w_1|$, отсюда получаем неравенство

$$\ln \frac{1}{|\omega - w|} \leq \ln \frac{1}{|\omega - \omega_0|} - \ln \sin \left(\frac{\delta}{2} \right).$$

При $|\omega - \omega_0| \geq l/2$, $w \in \text{Sec}$, имеет место неравенство $\ln(1/|\omega - w|) \leq \ln(1/\rho)$, где ρ – расстояние между сектором Sec и дугой $C \setminus \{w' : |w' - \omega_0| < l/2\}$. Кроме того, при любых ω , $w \in \overline{D}$ выполняется неравенство $-\ln 2 < \ln(1/|\omega - w|)$. Таким образом, при $\omega \in C$ и $w \in \text{Sec}$ имеем

$$\left| \ln \frac{1}{|\omega - w|} \right| < \left| \ln \frac{1}{|\omega - \omega_0|} \right| + \ln \frac{1}{\sin(\delta/2)} + \ln \frac{1}{\rho}. \quad (8)$$

Ввиду того, что величина $U_\mu(\omega_0)$ конечна, функция $|\ln(1/|\omega - \omega_0|)|$ суммируема по мере μ . Поэтому из (8) следует, что функция $\ln(1/|\omega - w|)$, $\omega \in C$, имеет суммируемую по мере μ мажоранту вида $|\ln(1/|\omega - \omega_0|)| + c_1$, где c_1 не зависит от $w \in \text{Sec}$. Поскольку

$$\lim_{\text{Sec} \ni w \rightarrow \omega_0} \ln \frac{1}{|\omega - w|} = \ln \frac{1}{|\omega - \omega_0|},$$

то по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получаем

$$\lim_{\text{Sec} \ni w \rightarrow \omega_0} U_\mu(w) = \int_C \ln \frac{1}{|\omega - w|} d\mu(\omega) = \int_C \ln \frac{1}{|\omega - \omega_0|} d\mu(\omega) = U_\mu(\omega_0).$$

Таким образом, $U_\mu(w)$ имеет в точке ω_0 угловой предел.

Аналогично доказывается существование угловых пределов в точке $\omega_0 \in \gamma$ и в случае неположительности меры μ (т.е. в случае вогнутости Γ относительно G) и конечности значения $U_\mu(\omega_0)$.

Этим заканчивается доказательство леммы 2.

Приведем естественное обобщение определения углового граничного предела.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G – область на $\mathbb{C}$, Γ – открытая достижимая жорданова дуга ее границы (определяемая жордановой областью $\Omega(G, \Gamma) \subset G$), в точке $\zeta \in \Gamma$

существуют не совпадающие друг с другом левая и правая полукасательные к Γ , Δ_ζ – невырожденный замкнутый круговой сектор с вершиной ζ , $\Delta_\zeta \subset \Omega(G, \Gamma) \cup \{\zeta\}$, причем ни один из граничных радиусов секторов Δ_ζ не лежит на какой-либо из указанных полукасательных.

Скажем, что заданная в области G однозначная функция $f(z)$ имеет в точке ζ *угловой граничный предел* $A \in \overline{\mathbb{C}}$, если для любого сектора Δ_ζ указанного типа существует предел

$$\lim_{\Delta_\zeta \ni z \rightarrow \zeta} f(z) = A.$$

ЛЕММА 3. Пусть Ω – ограниченная односвязная область с жордановой границей на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, Γ – открытая дуга ее границы, выпуклая или вогнутая относительно области Ω , функция $f(z)$ непрерывна на $\Omega \cup \Gamma$ и аналитична внутри Ω . Если при этом $f'(z)$ ограничена в Ω и имеет в точке $\zeta_0 \in \Gamma$ угловой предел A , то функция $f(z)$ имеет в точке ζ_0 производную $f'(\zeta_0) = A$ относительно множества $\Omega \cup \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|f'(z)| \leq M = \text{const} < +\infty$ при $z \in \Omega$, V_0 – угол, образованный полукасательными к Γ в точке $\zeta_0 \in \Gamma$, величина этого угла равна $\lambda_0 \in (0, 2\pi)$. Возьмем некоторое число $\varepsilon \in (0, \lambda_0/4)$ и какой-либо замкнутый угол $\bar{V}$ величины $\lambda' \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$ с той же вершиной ζ_0 , лежащий *строго внутри* V_0 . По условию леммы

$$\lim_{\bar{V} \ni z \rightarrow \zeta_0} f'(z) = A.$$

Легко доказывается, что производная функции $f(z)$ в точке ζ_0 существует относительно этого угла и также равна A :

$$\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - A = \frac{1}{z - \zeta} \int_{[\zeta, z]} (f'(t) - A) dt \rightarrow 0,$$

если $z \in \bar{V}$ стремится к ζ (см. также [6; гл. 4, § 3, утверждение 4.7]).

Пусть точка $z \in (\Omega \cup \Gamma) \setminus \bar{V}$ столь близка к ζ_0 , что внутренность отрезка, соединяющего z с ближайшей к ней точкой z' угла $\bar{V}$, целиком лежит в $\Omega \setminus \bar{V}$ (в связи с этим напомним, что дуга Γ выпукла или вогнута относительно Ω). Рассмотрим выражение

$$R(z) := \frac{f(z) - f(\zeta_0)}{z - \zeta_0} - A = \frac{f(z) - f(z')}{z - \zeta_0} + \frac{f(z') - f(\zeta_0)}{z' - \zeta_0} - A + \frac{f(z') - f(\zeta_0)}{z' - \zeta_0} \frac{z' - z}{z - \zeta_0}.$$

Очевидно, что

$$|f(z) - f(z')| = \left| \int_{z'}^z f'(\zeta) d\zeta \right| \leq M|z - z'|, \quad |f(z') - f(\zeta_0)| \leq M|z' - \zeta_0|.$$

Так как при этом $|z - z'|/|z - \zeta_0| < \sin \varepsilon$, то

$$\limsup_{\bar{\Omega} \setminus \bar{V} \ni z \rightarrow \zeta_0} |R(z)| \leq 2M \sin \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ и стремления $R(z)$ к нулю при $\bar{V} \ni z \rightarrow \zeta_0$ (см. выше), отсюда следует, что $\lim_{\Omega \cup \Gamma \ni z \rightarrow \zeta_0} R(z) = 0$, т.е. существование производной $f'_{\Omega \cup \Gamma}(\zeta_0) = A$. Лемма 3 доказана.

3. Основные результаты. Напомним некоторые обозначения.

Пусть G – односвязная область на плоскости $\mathbb{C}$, Γ – открытая достижимая дуга ее границы, $\Omega = \Omega(G, \Gamma)$ – жорданова подобласть области G , определяющая достижимую дугу Γ . Пусть функция $\varphi(z)$ однолистно и конформно отображает область G на круг D , $z = \psi(w) = \varphi^{-1}(w)$ – обратная к ψ функция ($w \in D$), $\gamma = \varphi(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА 1. *Если открытая достижимая дуга Γ границы области G выпукла или вогнута относительно G , то функция $\varphi(z)$ имеет в каждой точке $\zeta \in \Gamma$ конечную или бесконечную производную $\varphi'(\zeta)$ относительно $\Omega(G, \Gamma) \cup \Gamma$, равную угловому пределу функции $\varphi'(z)$ в точке ζ , а функция $\psi(w)$ имеет конечную или бесконечную производную $\psi'(w)$ в каждой точке $w \in \gamma$ относительно $D \cup \gamma$, равную угловому пределу функции $\psi'(w)$ в точке w .*

При этом в случае выпуклости дуги Γ относительно G функция $\varphi'(z)$ локально ограничена на множестве $\Omega(G, \Gamma) \cup \Gamma$, а в случае ее вогнутости – локально ограничена на множестве $D \cup \gamma$ функция $\psi'(w)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2

$$\psi'(w) = f_1(w)e^{f_2(w)}, \quad (9)$$

где $f_1(w)$ аналитична на $D \cup \gamma$, а функция $f_2(w)$ выражается формулой (5), где μ – действительнoзначная борелевская мера на γ . В случае вогнутости Γ относительно области G мера μ неположительна, так что функция

$$U_\mu(w) = \operatorname{Re} f_2(w) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\pi} \int_\gamma \ln \frac{1}{1 - w/\omega} d\mu(\omega) \right) = \frac{1}{\pi} \int_\gamma \ln \frac{1}{|\omega - w|} d\mu(\omega)$$

ограничена сверху, именно, $U_\mu(w) < |\mu(\gamma)| \ln 2$ (поскольку $|\omega - w| < 2$ при $w \in D$); поэтому функция $|\psi'(w)|$, $w \in D$, ограничена вблизи γ . Если же Γ выпукла относительно G , то мера μ неотрицательна, так что $U_\mu(w) > -\mu(\gamma) \ln 2$, и поэтому функция $1/\psi'(w)$ ограничена в D вблизи γ и, следовательно, $\varphi'(z)$ ограничена в G вблизи Γ .

По лемме 2 функция $f_2(w)$ имеет угловые пределы в точках дуги γ . Поэтому из (9) следует, что в каждой точке $w \in \gamma$ существует угловой предел функции $\psi'(w)$, а в каждой точке $\zeta \in \Gamma$ существует угловой предел функции $\varphi'(z)$.

Отсюда и из леммы 3 (и из соотношения $\psi'(\omega) = 1/\varphi'(\zeta)$ при $w = \varphi(\zeta)$) следует утверждение теоремы 1.

Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть G_1 и G_2 – односвязные области на плоскости $\mathbb{C}$, Γ_1 и Γ_2 – их открытые достижимые граничные дуги, определяемые жордановыми подобластями $\Omega_1 = \Omega(G_1, \Gamma_1) \subset G_1$ и $\Omega_2 = \Omega(G_2, \Gamma_2) \subset G_2$ соответственно, причем, Γ_1 выпукла относительно G_1 , а Γ_2 вогнута относительно G_2 . Тогда, если функция $w = f(z)$ однолистно и конформно отображает G_1 на G_2 при условии $\Gamma_2 = f(\Gamma_1)$, то ее производная $f'(z)$ существует и локально ограничена на множестве $G_1 \cup \Gamma_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $t = \varphi(z)$ – какое-либо однолистное конформное отображение области G_1 на единичный круг D , $\gamma := \varphi(\Gamma_1) \subset C$. Тогда функция $w = \psi(t) := f(\varphi^{-1}(t))$ однолистно и конформно отображает круг D на

область G_2 , причем $\psi(\gamma) = \Gamma_2$. Так как $f(z) \equiv \psi(\varphi(z))$, то остается применить теорему 1 к отображениям $t = \varphi(z)$ и $w = \psi(t)$.

Заметим, что в случае дуги Γ , выпуклой относительно области G , теорему 1 можно получить также методом, в корне отличным от нашего. Именно, для *выпуклой области* G это можно сделать с помощью леммы Жюлиа–Вольфа (см., например, [2; предложение 4.13]) и теоремы 5.5 работы [2], а в общем случае – рассматривая выпуклые подобласти области G , ограниченные поддугами дуги Γ и хордами этих поддуг.

Для борелевской меры η на $\mathbb{C}$ и ограниченного борелевского множества $E \subset \mathbb{C}$ через $U_\eta(E; z)$ будем обозначать действительнoзначный логарифмический потенциал

$$U_\eta(E; z) := \int_E \ln \frac{1}{|\zeta - z|} d\eta(\zeta).$$

Как обычно, потенциал $U_\eta(E; z)$ будем считать непрерывным в некоторой точке $z = z_0$, если он определен в точке z_0 и некоторой ее окрестности и $U_\eta(E; z) \rightarrow U_\eta(E; z_0)$ при $z \rightarrow z_0$ (независимо от того, является ли значение $U_\eta(E; z_0)$ конечным или бесконечным). (Естественно, будем различать значения $+\infty$ и $-\infty$, которые может принимать $U_\eta(E; z)$ в некоторых точках $z \in E$.)

Заметим, что если мера η знакопостоянна на компакте E , то непрерывность потенциала $U_\eta(E; z)$ в некоторой точке $z_0 \in E$ относительно E равносильна непрерывности относительно всей плоскости $\mathbb{C}$ (см. [6; гл. IV, § 5]).

Пусть $\vartheta(\zeta)$ – угол наклона правой полукасательной к кривой Γ в точке $\zeta \in \Gamma$ к положительному направлению действительной оси. В случае выпуклой или вогнутой достижимой дуги Γ границы односвязной области G относительно этой области через ν обозначим борелевскую меру на Γ , порожденную функцией $\vartheta(\zeta)$. Как ранее уже отмечалось, в случае выпуклости достижимой дуги Γ эта мера неотрицательна, в случае вогнутости неположительна. Определим потенциал $U_\nu(z)$ на плоскости $\mathbb{C}$ равенством

$$U_\nu(z) := \int_\Gamma \ln \frac{1}{|\zeta - z|} d\nu(\zeta). \quad (10)$$

Обратим внимание на то, что этот потенциал, в отличие от потенциала $U_\mu(w)$, зависит лишь от строения области G , точнее от строения достижимой дуги Γ ее границы, но не от какого-либо конформного отображения φ этой области.

ТЕОРЕМА 2. *В обозначениях теоремы 1 функция $\varphi'(z)$ непрерывна относительно $\Omega(G, \Gamma) \cup \Gamma$ в некоторой достижимой точке $\zeta_0 \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $-\infty < U_\nu(\zeta_0) \leq +\infty$ и потенциал $U_\nu(z)$ непрерывен в этой точке вдоль Γ (или, что то же, на $\mathbb{C}$). С другой стороны, функция $\psi'(w)$ непрерывна по $w \in D \cup \gamma$ в точке $\omega_0 = \varphi(\zeta_0) \in \gamma$ тогда и только тогда, когда $-\infty \leq U_\nu(\zeta_0) < +\infty$ и потенциал $U_\nu(z)$ непрерывен в точке ζ_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что потенциал (10) непрерывен в точке $\zeta_0 \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда потенциал $U_\mu(w)$ (см. (7)) непрерывен в точке $\omega_0 = \varphi(\zeta_0)$. При этом $U_\nu(\zeta_0)$ и $U_\mu(\omega_0)$ одновременно конечны или бесконечны, и в последнем случае их знаки совпадают.

Ввиду монотонности величины угла, образованного правой полукасательной к Γ в точке $\zeta \in \Gamma$ с положительным направлением действительной оси, найдется такая

открытая дуга $\Gamma^* \subset \Gamma$, содержащая ζ_0 , что для любых двух точек $\zeta', \zeta'' \in \Gamma^*$ диаметр дуги $\sigma(\zeta', \zeta'') \subset \Gamma^*$ с концами в этих точках не превосходит $c|\zeta' - \zeta''|$, где $c > 0$ – некоторая постоянная. Отсюда по теоремам 1Лос и 2Лос работы [7] следует, что существуют: открытая дуга $\Gamma' \ni \zeta_0$, $\overline{\Gamma'} \subset \Gamma^*$, и жорданова область $\Omega' \subset \Omega$ со свойством $\overline{\Gamma'} = \overline{\Omega'} \cap \Gamma^*$ такие, что функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию $\text{Lip}(1/2)$ на компакте $\overline{\Omega'}$, а функция $\psi(w)$ на $\overline{D'} = \varphi(\overline{\Omega'})$ удовлетворяет условию $\text{Lip } \alpha$ при некотором $\alpha > 0$. Отсюда следует, что для некоторых положительных постоянных c_1, c_2, α и любых $z', z'' \in \overline{\Omega'}$ справедливо неравенство

$$c_1|\varphi(z') - \varphi(z'')|^2 \leq |z' - z''| \leq c_2|\varphi(z') - \varphi(z'')|^\alpha, \quad z', z'' \in \overline{\Omega'}. \quad (11)$$

Пусть $\Gamma_r, r > 0$, – пересечение дуги Γ и круга $D(\zeta_0, r) := \{z : |z - \zeta_0| < r\}$, $\gamma_r = \varphi(\Gamma_r)$. Нетрудно видеть, что Γ_r является открытой поддугой дуги Γ при достаточно малых r . Тогда

$$U_\mu(w) = U_\mu(\gamma_r; w) + U_\mu(\gamma \setminus \gamma_r; w), \quad U_\nu(z) = U_\nu(\Gamma_r; z) + U_\nu(\Gamma \setminus \Gamma_r; z).$$

Если потенциал $U_\mu(w)$ конечен и непрерывен в точке ω_0 , то возьмем некоторое $\varepsilon > 0$ и столь малое $r \in (0, 1)$, что $\Gamma_r \subset \overline{\Omega'}$ и $|U_\mu(\gamma_r; \omega_0)| < \varepsilon$. Поскольку потенциал $U_\mu(\gamma \setminus \gamma_r; w)$, очевидно, непрерывен на γ_r , то $U_\mu(\gamma_r; w)$ непрерывен в точке ω_0 , и, следовательно,

$$\lim_{w \rightarrow \omega_0} |U_\mu(\gamma_r; w)| = |U_\mu(\gamma_r; \omega_0)| < \varepsilon.$$

Нетрудно видеть, что при $w = \varphi(z)$ имеем тождество

$$U_\mu(\gamma_r; w) \equiv U_\mu(\gamma_r; \varphi(z)) \equiv \int_{\Gamma_r} \ln \frac{1}{|\varphi(\zeta) - \varphi(z)|} d\nu(\zeta).$$

Отсюда и из (11) при $z'' = z \in \overline{\Omega'}$ и $z' = \zeta \in \Gamma_r$ в случае выпуклости дуги Γ относительно Ω получаем неравенства

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{c_2|\varphi(\zeta) - \varphi(z)|^\alpha} &\leq \ln \frac{1}{|\zeta - z|} \leq \ln \frac{1}{c_1|\varphi(\zeta) - \varphi(z)|^2}, \\ \alpha U_\mu(\gamma_r; w) - \nu(\Gamma_r) \ln c_2 &\leq U_\nu(\Gamma_r; z) \leq 2U_\mu(\gamma_r; w) - \nu(\Gamma_r) \ln c_1. \end{aligned} \quad (12)$$

В случае вогнутой дуги Γ аналогично получим неравенство противоположного смысла между теми же членами неравенства (12). Таким образом, в любом случае имеем

$$|U_\nu(\Gamma_r; z)| \leq (2 + \alpha)|U_\mu(\gamma_r; w)| + |\nu(\Gamma_r)|(|\ln c_1| + |\ln c_2|).$$

Так как потенциал $U_\nu(\Gamma \setminus \Gamma_r; z)$ непрерывен относительно $\mathbb{C}$ в каждой точке дуги Γ_r , то отсюда следует, что колебание потенциала $U_\nu(z)$ относительно $\overline{\Omega'}$ в точке ζ_0 оценивается следующим образом:

$$\limsup_{\overline{\Omega'} \ni z \rightarrow \zeta_0} U_\nu(z) - \liminf_{\overline{\Omega'} \ni z \rightarrow \zeta_0} U_\nu(z) \leq (2 + \alpha)\varepsilon + |\nu(\Gamma_r)|(|\ln c_1| + |\ln c_2|).$$

Поскольку число $\varepsilon > 0$ произвольно, а $\lim_{r \rightarrow 0} \nu(\Gamma_r) = \nu(\{\zeta_0\}) = 0$ (в случае $\mu(\{\omega_0\}) \neq 0$ было бы $U_\mu(\zeta_0) = \infty$), то колебание $U_\nu(z)$ в точке ζ_0 равно нулю.

Совершенно аналогично доказывается, что из конечности и непрерывности потенциала $U_\nu(z)$ в точке ζ_0 следует конечность и непрерывность потенциала $U_\mu(w)$ в точке ω_0 .

Из (12) в случае выпуклой кривой Γ относительно G и из неравенств противоположного смысла в случае ее вогнутости также следует, что $U_\mu(\omega_0)$ равно $+\infty$ или $-\infty$ тогда и только тогда, когда соответственно $U_\nu(\zeta_0)$ равно $+\infty$ или $-\infty$. При этом и в том, и в другом случае потенциалы $U_\nu(z)$ и $U_\mu(w)$ непрерывны (это следует из полунепрерывности снизу потенциала для случая положительной меры и полунепрерывности сверху в случае отрицательной меры μ). По формуле (9) функция $\psi'(w)$ непрерывна относительно $D \cup \gamma$ и равна нулю в точке ω_0 тогда и только тогда, когда $U_\mu(\omega_0) = U_\nu(\zeta_0) = -\infty$, а функция $\varphi'(z)$ непрерывна относительно $\Omega(G, \Gamma) \cup \Gamma$ и равна нулю в точке ζ_0 тогда и только тогда, когда $U_\mu(\omega_0) = U_\nu(\zeta_0) = +\infty$.

Если значения $U_\mu(\omega_0)$ и $U_\nu(\zeta_0)$ конечны, то мера μ неатомна в точке ω_0 . В этом случае $\operatorname{Im} f_2(w)$ непрерывна в точке ω_0 относительно $D \cup \gamma$ (по лемме 2). Поэтому из равенств $\varphi'(z) = 1/\psi'(w)$ и (10) получаем утверждение: тогда и только тогда функция $\psi'(w)$ конечна, непрерывна относительно $D \cup \gamma$ и отлична от нуля в точке ω_0 , и при этом функция $\varphi'(z)$ конечна, непрерывна относительно $\Omega(G, \Gamma) \cup \Gamma$ и отлична от нуля в точке ζ_0 , когда потенциал $U_\mu(w) = \pi \operatorname{Re} f_2(w)$ конечен и непрерывен в точке ω_0 , или, что то же самое, когда в точке ζ_0 конечен и непрерывен потенциал $U_\nu(z)$.

Теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекают следующие три утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 2. В случае выпуклости достижимой дуги Γ относительно области G множество $E(\Gamma, \varphi') \subset \Gamma$ всех точек непрерывности функции $\varphi'(z)$ относительно $G \cup \Gamma$ таково, что множество $\Gamma \setminus E(\Gamma, \varphi')$ имеет первую категорию по Бэру на Γ , а в случае вогнутости достижимой дуги Γ множество $E(\gamma, \psi') \subset \gamma$ всех точек непрерывности функции $\psi'(w)$ относительно $D \cup \gamma$ таково, что множество $\gamma \setminus E(\gamma, \psi')$ имеет первую категорию по Бэру на γ . (В частности, $E(\gamma, \psi')$ и $E(\Gamma, \varphi')$ являются множествами второй категории на каждой поддуге дуг Γ и γ соответственно.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, как нетрудно видеть, потенциалы $U_\nu(z)$ и $U_\mu(w)$ являются функциями первого класса Бэра на дугах Γ и γ соответственно. Поэтому множества их точек непрерывности вдоль этих дуг плотны на этих дугах. Поскольку множества точек разрыва этих потенциалов вдоль дуг Γ и γ соответственно имеют тип F_σ на них, то эти множества представимы в виде объединений не более чем счетного числа замкнутых множеств, нигде не плотных на Γ и γ соответственно. По теореме 2 множества точек непрерывности потенциалов $U_\nu(z)$ и $U_\mu(w)$ на дугах Γ и γ совпадают с множествами $E(\Gamma, \varphi')$ и $E(\gamma, \psi')$ соответственно. Отсюда и вытекают утверждения следствия 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены условия следствия 1, $\zeta_0 \in \Gamma_1$, $\omega_0 = f(\zeta_0) \in \Gamma_2$, $\vartheta_1(\zeta)$ и $\vartheta_2(\omega)$ – углы наклона правой полукасательной соответственно к кривой Γ_1 в точке $\zeta \in \Gamma_1$ и к кривой Γ_2 в точке $\omega \in \Gamma_2$ (относительно положительного направления действительной оси на плоскости $\mathbb{C}$). Тогда если потенциал $U_{\nu_1}(z)$

(см. (10)) непрерывен в точке $z = \zeta_0$ и $U_{\nu_1}(\zeta_0) = U_{\nu_1}(\Gamma_1; \zeta_0) > -\infty$, а потенциал $U_{\nu_2}(w)$ непрерывен в точке $w = \omega_0$ и $U_{\nu_2}(\omega_0) = U_{\nu_2}(\Gamma_2; \omega_0) < +\infty$, то функция $f'(z)$ непрерывна в точке ζ_0 относительно $\overline{\Omega}_1$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть G – выпуклая ограниченная область на плоскости $\mathbb{C}$, $\Gamma = \partial G$, функция $w = \varphi(z)$ однолистно и конформно отображает область G на единичный круг D . Тогда функция $\varphi(z)$, непрерывно продолженная на $\overline{G}$, дифференцируема по z на $\overline{G}$, ее производная $\varphi'(z)$ ограничена на $\overline{G}$, и значение $\varphi'(\zeta)$ в каждой точке $\zeta \in \Gamma$ равно угловому граничному пределу функции $\varphi'(z)$ в этой точке изнутри G . При этом функция $\varphi'(z)$ непрерывна (относительно $\overline{G}$) в точке $\zeta \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих двух условий:

(I) в точке ζ конечен и непрерывен вдоль Γ потенциал $U_{\nu}(z)$ (см. (10));

(II) $U_{\nu}(\zeta) = +\infty$.

Приведенные выше результаты допускают обобщение на случай многосвязной области $\tilde{G}$, имеющей граничную достижимую (посредством некоторой области $G = \Omega(\tilde{G}, \Gamma) \subset \tilde{G}$) дугу Γ , выпуклую или вогнутую относительно G , и на определенную в $\tilde{G}$ аналитическую функцию $f(z)$, вообще говоря, неоднозначную, имеющую в области G однолистную однозначную аналитическую ветвь $\varphi(z)$. Как нетрудно видеть, в этом случае теоремы 1 и 2 остаются верными, если кривая $\varphi(\Gamma)$ является аналитической. В частности, эти теоремы обобщаются на случай однолистных конформных отображений многосвязных областей $\tilde{G}$ на области B той же связности, ограниченные попарно непересекающимися аналитическими контурами (например, на каноническую круговую область), а также на случай аналитических многозначных функций, отображающих конформно и взаимнооднозначно универсальную накрывающую области $\tilde{G}$ на универсальную накрывающую области B , если их связность различна и т.п.

4. Пример “нехорошей” выпуклой области с гладкой границей. В заключение приведем пример выпуклой области G с гладкой границей Γ , для которой производная функции $\varphi(z)$, отображающей эту область конформно и однолистно на единичный круг, разрывна в некоторой граничной точке этой области.

Сначала построим выпуклую область G_1 , ограниченную замкнутой бесконечнозвенной ломаной Γ_1 , обладающую нужным свойством.

В качестве вершин ломаной возьмем точки

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_1 = 1, \quad \zeta_n = 2^{-n}(-1 + in^{-3}) \quad \text{при } n = 2, 3, \dots$$

Нужная замкнутая бесконечнозвенная выпуклая ломаная Γ_1 (без самопересечений) состоит из звеньев $[\zeta_n, \zeta_{n+1}]$, $n = 0, 1, \dots$, область G_1 – внутренность контура Γ_1 . Мера ν_1 , порожденная функцией $\vartheta_1(\zeta)$, равной углу наклона правой полукасательной к Γ_1 в точке $\zeta \in \Gamma_1$, является чисто атомной и вся сосредоточена в вершинах ζ_n при $n \geq 1$. Именно, $\nu(\{\zeta_n\}) = \alpha_{n+1} - \alpha_n$, где α_n – величина угла вектора $\overrightarrow{\zeta_{n-1}\zeta_n}$ относительно положительного направления действительной оси ($n \geq 1$). Отметим, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 > 3\pi/2$, $\alpha_n \nearrow 2\pi$ с ростом n . Отметим также, что

$$\begin{aligned} \nu(\{\zeta_n\}) &= \alpha_{n+1} - \alpha_n = (2\pi - \alpha_n) - (2\pi - \alpha_{n+1}) < 2\pi - \alpha_n \\ &= \arctg\left(\frac{2}{(n-1)^3} - \frac{1}{n^3}\right) < \arctg\left(\frac{2}{(n-1)^3}\right) < \frac{2}{(n-1)^3} \quad \text{при } n \geq 3. \end{aligned}$$

Учитывая это неравенство и равенство $\ln(1/|\zeta_1|) = 0$, из определения (10) потенциала $U_\nu(z)$ получаем оценку

$$\begin{aligned} U_{\nu_1}(0) &= \nu_1(\{\zeta_2\}) \ln \frac{1}{|\zeta_2|} + \sum_{n=3}^{\infty} \ln \frac{1}{|\zeta_n|} \nu_1(\{\zeta_n\}) \\ &< \nu_1(\{\zeta_2\}) \ln \frac{1}{|\zeta_2|} + 2 \ln 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n-1)^3} < \infty. \end{aligned}$$

Так как $U_{\nu_1}(\zeta_k) = +\infty$, $k = 1, 2, \dots$, то потенциал $U_{\nu_1}(z)$ разрывен в точке $\zeta = 0$.

Возьмем такую последовательность точек $z_n \in G_1$, что $z_n \rightarrow 0$ и $U_{\nu_1}(z_n) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Для каждой вершины ζ_n нашей ломаной возьмем окружность C_n достаточно малого радиуса r_n , касающуюся ее звеньев с концами в этой вершине, и заменим отрезки этих звеньев от ζ_n до их точек касания дугой $\sigma_n \subset C_n$, соединяющей эти точки касания и выпуклой в направлении ζ_n , $n = 1, 2, \dots$. Полученную таким образом из Γ_1 выпуклую гладкую кривую обозначим через Γ , а ограниченную кривой Γ выпуклую область обозначим через G . Очевидно, изменение угла наклона правой полукасательной к Γ в точке $\zeta \in \Gamma$ при прохождении этой точкой дуги σ_n равняется изменению угла наклона правой полукасательной в точке $\zeta \in \Gamma_1$ при прохождении этой точкой угла, состоящего из отброшенных частей звеньев ломаной Γ_1 с концами в точке ζ_n . Иначе говоря, $\nu(\sigma_n) = \nu_1(\{\zeta_n\})$ для любого $n \geq 1$. Числа $r_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, возьмем столь малыми, чтобы все точки z_n оказались внутри Γ (т.е. в области G). Если r_n так мало, что все точки дуги σ_n лежат от ζ_n на расстоянии, меньшем половины расстояния ρ_n от ζ_n до множества $\Lambda := \{0, z_1, \dots\}$, то при $z \in \Lambda$ имеем

$$\left| \ln \frac{1}{|\zeta_n - z|} \nu_1(\{\zeta_n\}) - \int_{\sigma_n} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} d\nu(\zeta) \right| \leq \int_{\sigma_n} \left| \ln \frac{|\zeta - z|}{|\zeta_n - z|} \right| d\nu(\zeta) \leq \nu(\sigma_n) \ln 2,$$

$n = 1, 2, \dots$. Учитывая эти неравенства и то, что мера ν сосредоточена на $\bigcup_n \sigma_n$, а мера ν_1 — в точках ζ_n , получаем оценку

$$|U_{\nu_1}(z) - U_\nu(z)| < 2\pi \ln 2 \quad \text{для всех } z \in \Lambda.$$

Так как

$$U_\nu(z_n) > U_{\nu_1}(z_n) - 2\pi \ln 2 \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad U_\nu(0) < U_{\nu_1}(0) + 2\pi \ln 2 < +\infty,$$

то потенциал $U_\nu(z)$ разрывен в точке $\zeta = 0$. По теореме 2 отсюда следует, что производная всякого однолистного конформного отображения $w = \varphi(z)$ области G на круг D разрывна в точке $\zeta = 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.
- [2] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Grundlehren Math. Wiss., **299**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [3] S. E. Warschawski, "On the differentiability at the boundary in conformal mapping", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 614–620.

- [4] Е. П. Долженко, “Гладкость гармонических и аналитических функций в граничных точках области”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **29**:5 (1965), 1069–1084.
- [5] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.
- [6] М. Брело, *Основы классической теории потенциала*, Мир, М., 1964.
- [7] Е. П. Долженко, “О граничной гладкости конформных отображений областей с негладкими границами”, *Докл. РАН*, **415**:2 (2007), 155–159.

Е. П. Долженко

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: eugen@ngcom.ru

Поступило

20.04.2010

Исправленный вариант

24.01.2011

С. В. Колесников

Ивановский государственный университет

E-mail: servikkol@rambler.ru