Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Лыков, Некоторые замечания к проблеме моментов и ее связи с теорией экстраполяции пространств, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 1, 79–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8762>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:31:27

Некоторые замечания к проблеме моментов и ее связи с теорией экстраполяции пространств

К. В. Лыков

Хорошо известно, что из совпадения целых моментов (степенных моментов для всех натуральных показателей степени) у двух неотрицательных случайных величин не следует совпадения их распределений. В работе показано, что, более того, при совпадающих целых моментах отношение полупцелых моментов может стремиться к бесконечности, причем как угодно быстро. Также в работе приведено новое доказательство единственности в континуальной проблеме моментов и показано, что в континуальной проблеме моментов нельзя заменить условие совпадения всех моментов на двусторонние неравенства между ними с сохранением неравенства между распределениями. В заключение рассмотрена связь с теорией экстраполяции пространств.

Библиография: 12 названий.

Введение. В работе мы исследуем вопрос о возможности восстановления распределения неотрицательной случайной величины по ее моментам. Хорошо известно, что совпадение степенных моментов для всех натуральных показателей степени (далее – “целых моментов”) двух случайных величин ξ и η не гарантирует совпадения их распределений [1]–[4]. Совпадение же моментов всех порядков, в том числе и нецелых, гарантирует единственность распределения [4; с. 262]. Мы развиваем эту тему и доказываем некоторые более сильные утверждения.

Всюду далее мы рассматриваем неотрицательные случайные величины, заданные на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$. Иногда в роли вероятностного пространства выступает полуинтервал $(0, 1]$ с мерой Лебега, это всегда оговаривается. Математическое ожидание мы обозначаем символом E . Таким образом совпадение всех целых моментов двух неотрицательных случайных величин ξ и η означает равенство

$$E\xi^n = E\eta^n < \infty \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Через $\|\xi\|_p$ обозначаем L_p -норму (квазинорму при $p < 1$) случайной величины ξ :

$$\|\xi\|_p := (E|\xi|^p)^{1/p}, \quad p > 0.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00077-а).

Функцией распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ называем функцию

$$F_\xi(x) = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\}.$$

Структура работы следующая.

В пункте 1 мы показываем, что совпадение всех целых моментов не гарантирует неравенства $\|\xi\|_p \leq C\|\eta\|_p$ ни с какой константой C даже при фиксированном нецелом p , и, кроме того, отношение $\|\xi\|_p/\|\eta\|_p$ может быть неограниченным. При этом можно добиться, чтобы при совпадающих целых моментах отношение $\|\xi\|_{n+1/2}/\|\eta\|_{n+1/2}$ стремилось к бесконечности как угодно быстро при стремлении к бесконечности натурального n . Построение соответствующих случайных величин конструктивно.

В пункте 2 доказывается, что если $\|\xi\|_p = \|\eta\|_p$ при всех положительных p , то функции распределения случайных величин $|\xi|$ и $|\eta|$ совпадают. Этот результат, известный, по-видимому, еще С. Н. Бернштейну, есть в книге Ахиезера [4; с. 262]. Доказательство в [4], однако, не сконцентрировано в одном месте, так как книга преследует другие цели. Мы приводим в пункте 2 доказательство, использующее аналитичность функции $E\xi^p$ от переменной p и свойство единственности для характеристических функций.

В пункте 3 приводится следующий результат, который может показаться парадоксальным на фоне результата предыдущего пункта: из неравенств

$$\frac{1}{2} E|\eta|^p \leq E|\xi|^p \leq E|\eta|^p < \infty \quad \text{при всех вещественных } p > 0$$

не следует неравенства

$$P\{\omega : |\xi| > \tau\} \leq CP\{\omega : |\eta| > \tau\} \quad \text{для всех } \tau > 0$$

ни с какой константой C даже для конкретных ξ и η .

Наконец, в пункте 4 кратко обсуждается связь с теорией экстраполяции пространств.

1. Совпадение всех целых моментов не влечет неравенства между всеми моментами ни с какой константой. В этом пункте мы докажем следующее утверждение, показывающее, в частности, что все целые моменты не определяют однозначно распределение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любой последовательности $\{C_j\}_{j=1}^\infty$ положительных чисел существуют неотрицательные случайные величины ξ и η такие, что

- 1) $E\xi^n = E\eta^n < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- 2) для всех натуральных j

$$\frac{E\xi^{j+1/2}}{E\eta^{j+1/2}} \geq C_j.$$

Доказательству предложения предположим следующую лемму, имеющую и самостоятельный интерес.

ЛЕММА 1. Для любого $C > 0$ и произвольного $m \in \mathbb{N}$ существуют неотрицательные случайные величины ξ и η такие, что

- 1) $E\xi^n = E\eta^n < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- 2) выполнено

$$\frac{E\xi^{m+1/2}}{E\eta^{m+1/2}} > C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем использовать в качестве случайной величины ξ абсолютно непрерывную случайную величину с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\alpha x^\lambda}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$, $0 < \lambda < 1/2$, а константа k выбрана из соображений нормировки. В качестве η рассмотрим абсолютно непрерывную случайную величину с плотностью

$$g(x) = f(x)(1 + \epsilon \sin(\beta x^\lambda)),$$

где $\beta = \alpha \operatorname{tg} \lambda\pi$, $-1 < \epsilon < 1$. В [3; с. 373] эти случайные величины рассмотрены с целью показать возможность совпадения целых моментов у разнораспределенных случайных величин. Этот же пример годится и для наших целей. В [3] показано, что $E\xi^n = E\eta^n < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Вычислим моменты порядка $m + 1/2$ тем же способом, каким в [3] вычисляются целые моменты.

Известно, что при $p > 0$ и комплексных q с $\operatorname{Re} q > 0$

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-qt} dt = \frac{\Gamma(p)}{q^p}, \quad (1.1)$$

где $\Gamma(p)$ – гамма-функция Эйлера. Положим в этом интеграле $p = (m + 3/2)/\lambda$, $q = \alpha$, $t = x^\lambda$; получим

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma((m + 3/2)/\lambda)}{\alpha^{(m+3/2)/\lambda}} &= \int_0^{+\infty} x^{\lambda((m+3/2)/\lambda-1)} e^{-\alpha x^\lambda} \lambda x^{\lambda-1} dx \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} x^{m+1/2} e^{-\alpha x^\lambda} dx = \frac{\lambda}{k} E\xi^{m+1/2}, \end{aligned}$$

т.е.

$$E\xi^{m+1/2} = \frac{k\Gamma((m + 3/2)/\lambda)}{\lambda\alpha^{(m+3/2)/\lambda}} < \infty.$$

Положив теперь в (1.1) $p = (m + 3/2)/\lambda$, $q = \alpha + i\beta$, $t = x^\lambda$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma((m + 3/2)/\lambda)}{(\alpha + i\beta)^{(m+3/2)/\lambda}} &= \int_0^{+\infty} x^{\lambda((m+3/2)/\lambda-1)} e^{-(\alpha+i\beta)x^\lambda} \lambda x^{\lambda-1} dx \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} x^{m+1/2} e^{-\alpha x^\lambda} \cos \beta x^\lambda dx \\ &\quad - i\lambda \int_0^{+\infty} x^{m+1/2} e^{-\alpha x^\lambda} \sin \beta x^\lambda dx, \end{aligned}$$

откуда

$$\lambda \int_0^{+\infty} x^{m+1/2} e^{-\alpha x^\lambda} \sin \beta x^\lambda dx = -\Gamma\left(\frac{m + 3/2}{\lambda}\right) \cdot \operatorname{Im} \frac{1}{(\alpha + i\beta)^{(m+3/2)/\lambda}}.$$

Далее

$$\begin{aligned} (\alpha + i\beta)^{-(m+3/2)/\lambda} &= \left(\frac{\cos \lambda\pi}{\alpha} \right)^{(m+3/2)/\lambda} (\cos \lambda\pi + i \sin \lambda\pi)^{-(m+3/2)/\lambda} \\ &= \left(\frac{\cos \lambda\pi}{\alpha} \right)^{(m+3/2)/\lambda} \left(\cos \left(\left(m + \frac{3}{2} \right) \pi \right) + i \sin \left(- \left(m + \frac{3}{2} \right) \pi \right) \right), \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im} \frac{1}{(\alpha + i\beta)^{(m+3/2)/\lambda}} &= \left(\frac{\cos \lambda\pi}{\alpha} \right)^{(m+3/2)/\lambda} \sin \left(\left(m + \frac{3}{2} \right) \pi \right), \\ \epsilon k \int_0^{+\infty} x^{m+1/2} e^{-\alpha x^\lambda} \sin \beta x^\lambda dx &= \frac{k\Gamma((m+3/2)/\lambda)}{\lambda\alpha^{(m+3/2)/\lambda}} (-1)^{m+1} \epsilon (\cos(\lambda\pi))^{(m+3/2)/\lambda}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} E\eta^{m+1/2} &= \int_0^{+\infty} x^{m+1/2} g(x) dx = E\xi^{m+1/2} + \epsilon k \int_0^{+\infty} x^{m+1/2} e^{-\alpha x^\lambda} \sin \beta x^\lambda dx \\ &= E\xi^{m+1/2} (1 + (-1)^{m+1} \epsilon (\cos(\lambda\pi))^{(m+3/2)/\lambda}). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{E\eta^{m+1/2}}{E\xi^{m+1/2}} = (1 + (-1)^{m+1} \epsilon (\cos(\lambda\pi))^{(m+3/2)/\lambda}).$$

Выбирая достаточно малым λ , а ϵ достаточно близким к 1 или -1 в зависимости от четности m , можно добиться, чтобы выполнялось

$$\frac{E\eta^{m+1/2}}{E\xi^{m+1/2}} < \delta$$

с произвольным заранее выбранным $\delta > 0$. Мы можем положить $\delta = 1/C$, где C из формулировки доказываемого предложения. Тогда для выбранных параметров λ и ϵ

$$\frac{E\xi^{m+1/2}}{E\eta^{m+1/2}} > \frac{1}{\delta} = C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Распределения случайных величин ξ и η определим их функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Функции F и G будем искать в виде

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} F_k(x), \quad G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} G_k(x)$$

(смесь распределений), последовательности функций распределений $\{F_k\}$ и $\{G_k\}$ определим индуктивно. Пусть $F_1(x)$ и $G_1(x)$ – непрерывные функции распределения такие, что $G_1(x) = F_1(x) = 0$ при $x < 0$, при всех натуральных n

$$\int_0^{+\infty} x^n dF_1(x) = \int_0^{+\infty} x^n dG_1(x) < \infty$$

и

$$\int_0^{+\infty} x^{3/2} dF_1(x) \geq 2C_1 \int_0^{+\infty} x^{3/2} dG_1(x).$$

Существование таких функций распределения следует из леммы 1. При этом, умножая соответствующие случайные величины на общую подходящую положительную константу, можно добиться равенства

$$\int_0^{+\infty} x^{3/2} dG_1(x) = 1.$$

Пусть $j \geq 2$, функции $F_1, F_2, \dots, F_{j-1}, G_1, G_2, \dots, G_{j-1}$, уже определены, и

$$A_j := \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{2^k} \int_0^{+\infty} x^{j+1/2} dG_k(x) < +\infty.$$

Согласно лемме 1 существуют неотрицательные случайные величины с функциями распределения F_j и G_j такими, что

$$\int_0^{+\infty} x^n dF_j(x) = \int_0^{+\infty} x^n dG_j(x) < \infty \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N},$$

и

$$\int_0^{+\infty} x^{j+1/2} dF_j(x) \geq (1 + A_j) 2^j C_j \int_0^{+\infty} x^{j+1/2} dG_j(x).$$

При этом, так же, как и в случае $j = 1$, можно считать, что

$$\int_0^{+\infty} x^{j+1/2} dG_j(x) = 1.$$

Итак, последовательности $\{F_k\}$ и $\{G_k\}$ построены, функции F и G определены. Согласно построению $\{F_k\}$ и $\{G_k\}$

$$\begin{aligned} E\xi^n &= \int_0^{+\infty} x^n dF(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \int_0^{+\infty} x^n dF_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \int_0^{+\infty} x^n dG_k(x) = \int_0^{+\infty} x^n dG(x) = E\eta^n \end{aligned}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Далее, при $k \geq j$ согласно неравенству Ляпунова

$$\left(\int_0^{+\infty} x^{j+1/2} dG_k(x) \right)^{1/(j+1/2)} \leq \left(\int_0^{+\infty} x^{k+1/2} dG_k(x) \right)^{1/(k+1/2)} = 1,$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} x^{j+1/2} dG_k(x) \leq 1 \quad \text{при } k \geq j,$$

и (считаем, что $A_1 = 0$)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{j+1/2} dG(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \int_0^{+\infty} x^{j+1/2} dG_k(x) \\ &\leq \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot 1 + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{2^k} \int_0^{+\infty} x^{j+1/2} dG_k(x) \leq 1 + A_j < +\infty. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, в частности, что все моменты случайных величин ξ и η конечны. Кроме того,

$$\int_0^{+\infty} x^{j+1/2} dF(x) \geq \frac{1}{2^j} \int_0^{+\infty} x^{j+1/2} dF_j(x) \geq (1 + A_j)C_j \geq C_j \int_0^{+\infty} x^{j+1/2} dG(x),$$

что и требовалось.

2. Единственность в континуальной проблеме моментов. Из результатов предыдущего пункта следует, что совпадение целых моментов для неотрицательных случайных величин не гарантирует совпадения распределений. В настоящем пункте покажем, что распределение восстанавливается, если рассматривать моменты для ограниченной последовательности показателей степени. Случайные величины далее, если не оговорено противное, рассматриваются на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$.

ЛЕММА 2. Пусть η – случайная величина ($\eta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$) и для некоторого $q \in (0, +\infty)$

$$Ee^{q\eta} < \infty.$$

Тогда функция

$$\psi(p) = Ee^{p\eta}$$

является аналитической в полосе $\operatorname{Re} p \in (0, q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_0 = \operatorname{Re} p \in (0, q)$. Тогда в силу неравенства Ляпунова

$$E|e^{p\eta}| = Ee^{p_0\eta} \leq (Ee^{q\eta})^{p_0/q} < \infty$$

и функция $\psi(p)$ определена в полосе $\operatorname{Re} p \in (0, q)$ корректно. Далее, для выбранного p и Δp , $|\Delta p| < r = \min\{p_0, q - p_0\}$ рассмотрим разность

$$\varphi(\Delta p) = \frac{\psi(p + \Delta p) - \psi(p)}{\Delta p} - E\eta e^{p\eta} = E\left(e^{p\eta} \cdot \frac{e^{\Delta p\eta} - 1 - \Delta p\eta}{\Delta p}\right) \quad (2.1)$$

и покажем, что она стремится к нулю при $\Delta p \rightarrow 0$. Тем самым будет доказано наличие производной у функции $\psi(p)$ в рассматриваемой полосе, т.е. утверждение леммы. Заметим, что

$$E|\eta e^{p\eta}| < \infty$$

и функция $\varphi(\Delta p)$ определена корректно. Действительно, так как для $\varepsilon > 0$

$$|x|e^x \leq e^{(1+\varepsilon)x} + C(\varepsilon) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R},$$

то

$$|\eta e^{p\eta}| = |\eta|e^{p_0\eta} \leq \frac{1}{p_0}(e^{q\eta} + C).$$

Далее оценим выражение под знаком математического ожидания в (2.1):

$$\left| e^{p\eta} \cdot \frac{e^{\Delta p\eta} - 1 - \Delta p\eta}{\Delta p} \right| \leq e^{p_0\eta} \sum_{n=2}^{\infty} |\Delta p|^{n-1} \cdot \frac{|\eta|^n}{n!}. \quad (2.2)$$

Если $|\Delta p| < \min\{r, r^2\}$, то

$$|\Delta p|^{n-1} = |\Delta p|^{n-2} \cdot |\Delta p| \leq r^{n-2} \cdot r^2 = r^n.$$

При таких Δp в силу (2.2) имеем

$$\left| e^{p\eta} \cdot \frac{e^{\Delta p\eta} - 1 - \Delta p\eta}{\Delta p} \right| \leq e^{p_0\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n \cdot |\eta|^n}{n!} \leq e^{p_0\eta + r|\eta|} \leq e^{q\eta} + 1. \quad (2.3)$$

Так как случайная величина под знаком математического ожидания в (2.1) стремится к нулю (в силу того, что $(e^{p\eta})'_p = \eta e^{p\eta}$) и выполнено (2.3), мы можем применить в (2.1) теорему Лебега о мажорируемой сходимости и получить

$$\lim_{\Delta p \rightarrow 0} |\varphi(\Delta p)| \leq \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \mathbb{E} \left| e^{p\eta} \cdot \frac{e^{\Delta p\eta} - 1 - \Delta p\eta}{\Delta p} \right| = 0,$$

лемма доказана.

ЛЕММА 3. В условиях леммы 2 для всех $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{\eta}(t) = \mathbb{E} e^{it\eta} = \lim_{p_0 \rightarrow 0+} \mathbb{E} e^{(it+p_0)\eta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$|\mathbb{E} e^{(it+p_0)\eta} - \mathbb{E} e^{it\eta}| \leq \mathbb{E} |e^{p_0\eta} - 1| \leq \mathbb{E} (e^{q\eta} + 2) < \infty.$$

Как и в доказательстве леммы 2, используя теорему Лебега получим утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ξ_1 и ξ_2 – неотрицательные случайные величины такие, что

$$\mathbb{E} \xi_1^{p_n} = \mathbb{E} \xi_2^{p_n} \quad (2.4)$$

для некоторой последовательности $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b]$, $0 < a < b < \infty$, $p_l \neq p_k$ при $l \neq k$, и, кроме того,

$$\mathbb{E} \xi_j^{b+\varepsilon} < \infty \quad \text{для некоторого } \varepsilon > 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.5)$$

Тогда их функции распределения совпадают:

$$F_{\xi_1}(x) = \mathbb{P}\{\xi_1 \leq x\} = \mathbb{P}\{\xi_2 \leq x\} = F_{\xi_2}(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что ξ_1 и ξ_2 положительны на Ω . В этом случае мы можем рассмотреть случайные величины $\eta_1 = \ln \xi_1$ и $\eta_2 = \ln \xi_2$. Тогда

$$\mathbb{E} e^{p\eta_j} = \mathbb{E} \xi_j^p.$$

Согласно условию (2.5) и утверждению леммы 2 мы можем заключить, что

$$\psi_1(p) = \mathbb{E} e^{p\eta_1} \quad \text{и} \quad \psi_2(p) = \mathbb{E} e^{p\eta_2}$$

аналитические функции в полосе $\operatorname{Re} p \in (0, b + \varepsilon)$. В силу свойства аналитических функций и условия (2.4) $(\psi_1(p_n) = \psi_2(p_n))$ имеем

$$\psi_1(p) = \psi_2(p) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p \in (0, b + \varepsilon).$$

Теперь мы можем воспользоваться леммой 3 и получить равенство для характеристических функций случайных величин:

$$\varphi_{\eta_1}(t) = \lim_{p_0 \rightarrow 0+} \psi_1(it + p_0) = \lim_{p_0 \rightarrow 0+} \psi_2(it + p_0) = \varphi_{\eta_2}(t).$$

Известно, что характеристическая функция однозначно определяет распределение [3; с. 360]. Поэтому для $x > 0$

$$F_{\xi_1}(x) = P\{\xi_1 \leq x\} = P\{\eta_1 \leq \ln x\} = P\{\eta_2 \leq \ln x\} = P\{\xi_2 \leq x\} = F_{\xi_2}(x).$$

Если же $x \leq 0$, то $F_{\xi_1}(x) = 0 = F_{\xi_2}(x)$. В случае строго положительных ξ_1 и ξ_2 теорема доказана.

В общем случае рассмотрим события

$$\Omega_j = \{\omega \in \Omega : \xi_j > 0\}, \quad j = 1, 2.$$

Если $P\{\Omega_1\} = 0$, то $\xi_1 = \xi_2 = 0$ почти наверное. Далее считаем, что $P\{\Omega_j\} > 0$. Рассмотрим вероятностные пространства $\{\Omega_j, \mathcal{F}_j, P_j\}$, где

$$\mathcal{F}_j = \mathcal{F} \cap \Omega_j, \quad P_j(A) = \frac{P(A)}{P(\Omega_j)} \quad \text{для} \quad A \subset \Omega_j.$$

Соответствующее математическое ожидание обозначим через E_j . Тогда согласно лемме 2 и лемме 3 имеем аналитичность функции $E_j \xi_j^p$ и

$$\lim_{p_0 \rightarrow 0+} E_j \xi_j^{p_0} = 1,$$

откуда, учитывая, что для рассматриваемых случайных величин $E_j = (1/(P\{\Omega_j\}))E$, получим аналитичность функции $E \xi_j^p$ и

$$P\{\Omega_j\} = \lim_{p_0 \rightarrow 0+} E \xi_j^{p_0}. \quad (2.6)$$

Следовательно, $P\{\Omega_1\} = P\{\Omega_2\}$ и $E_1 \xi_1^p = E_2 \xi_2^p$ при $\operatorname{Re} p \in (0, b + \varepsilon)$. Для положительных случайных величин ξ_1 и ξ_2 на $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1\}$ и $\{\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2\}$ аналогично изложенному выше получаем равенство функций распределений. Возвращаясь к исходному вероятностному пространству, имеем для $x > 0$

$$\begin{aligned} P\{\xi_1 \leq x\} &= P\{\Omega_1\} \cdot P_1\{\xi_1 \leq x\} + (1 - P\{\Omega_1\}) \\ &= P\{\Omega_2\} \cdot P_2\{\xi_2 \leq x\} + (1 - P\{\Omega_2\}) = P\{\xi_2 \leq x\}. \end{aligned}$$

Для $x < 0$

$$F_{\xi_1}(x) = F_{\xi_2}(x) = 0,$$

для $x = 0$

$$F_{\xi_1}(0) = 1 - P\{\Omega_1\} = 1 - P\{\Omega_2\} = F_{\xi_2}(0).$$

Теорема доказана.

3. Неравенства между всеми моментами не гарантируют неравенства между распределениями. В этом пункте в качестве вероятностного пространства $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ рассматривается полуинтервал $(0, 1]$ с мерой Лебега μ . Мы покажем, что существуют две неотрицательные случайные величины ξ и η такие, что

$$\frac{1}{2} E\eta^p \leq E\xi^p \leq E\eta^p < \infty \quad \text{для всех } p > 0,$$

но при этом

$$\limsup_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{P\{\omega : \xi > \tau\}}{P\{\omega : \eta > \tau\}} = +\infty.$$

ЛЕММА 4. Пусть $x(t)$, $y(t)$ – невозрастающие неотрицательные функции на $(0, 1]$. Если для некоторого $C \geq 1$ и всех $\tau > 0$

$$\mu\{s \in (0, 1] : x(s) > \tau\} \leq C \mu\{s \in (0, 1] : y(s) > \tau\},$$

то для всех $t \in (0, 1]$

$$\int_0^t x(s) ds \leq C \int_0^t y(s) ds.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как монотонная функция имеет не более чем счетное множество точек разрыва, можно считать функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывными слева. В этом случае справедлива формула [5; с. 83]

$$x(t) = \inf\{\tau : \mu\{s \in (0, 1] : x(s) > \tau\} < t\}. \quad (3.1)$$

Далее,

$$\mu\left\{s \in (0, C] : y\left(\frac{s}{C}\right) > \tau\right\} = C \mu\{s \in (0, 1] : y(s) > \tau\},$$

откуда, воспользовавшись условием леммы, получим

$$\mu\{s \in (0, 1] : x(s) > \tau\} \leq \mu\left\{s \in (0, C] : y\left(\frac{s}{C}\right) > \tau\right\}.$$

Поэтому из (3.1) и аналогичной формулы для функции $y(s/C)$ вытекает неравенство

$$x(s) \leq y\left(\frac{s}{C}\right),$$

справедливое для всех $s > 0$, если считать, что $x(s)$ и $y(s/C)$ равны нулю вне $(0, 1]$ и $(0, C]$ соответственно. Наконец, интегрируя последнее неравенство, получим для всех $t \in (0, 1]$

$$\int_0^t x(s) ds \leq \int_0^t y\left(\frac{s}{C}\right) ds = C \int_0^{t/C} y(s) ds \leq C \int_0^t y(s) ds.$$

ЛЕММА 5. Существуют две невозрастающие неотрицательные функции $x(t)$ и $y(t)$ на $(0, 1]$ такие, что $\|x\|_p \leq \|y\|_p < \infty$ при всех $p > 0$, и

$$\limsup_{t \rightarrow 0+} \frac{\int_0^t x(s) ds}{\int_0^t y(s) ds} = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [6; с. 984] доказано существование двух невозрастающих неотрицательных функций $x_1(t)$ и $y(t)$ на $(0, 1]$ таких, что $\|x_1\|_p \leq \|y\|_p < \infty$ при всех $p \geq 1$, и

$$\limsup_{t \rightarrow 0+} \frac{\int_0^t x_1(s) ds}{\int_0^t y(s) ds} = +\infty.$$

Рассмотрим функции

$$A(p) = \int_0^1 x_1(s)^p ds \quad \text{и} \quad B(p) = \int_0^1 y(s)^p ds \quad \text{при} \quad p \in (0, 1).$$

Функция $A(p)$ непрерывна при $p > 0$, и (см. соотношение (2.6) из доказательства теоремы 1)

$$\lim_{p \rightarrow 0+} A(p) = \mu\{t \in (0, 1] : x_1(t) > 0\} > 0.$$

Поэтому функция $A(p)$ положительна, ограничена и отделена от нуля на $(0, 1)$. То же можно сказать о $B(p)$. Следовательно, для некоторого $C > 1$

$$\begin{aligned} A(p) &\leq CB(p) && \text{при всех } p \in (0, 1), \\ \int_0^1 x_1(s)^p ds &\leq C \int_0^1 y(s)^p ds && \text{при всех } p > 0. \end{aligned}$$

Считая, что $x_1(s) = 0$ при $s > 1$, рассмотрим функцию $x(s) := x_1(Cs)$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(s)^p ds &= \int_0^{1/C} x_1(Cs)^p ds = \frac{1}{C} \int_0^1 x_1(s)^p ds \leq \int_0^1 y(s)^p ds, \\ \int_0^t x(s) ds &= \frac{1}{C} \int_0^{Ct} x_1(s) ds \geq \frac{1}{C} \int_0^t x_1(s) ds. \end{aligned}$$

Для функций $x(t)$ и $y(t)$ выполнены все условия леммы.

Следующее простое рассуждение, принадлежащее С. В. Асташкину, показывает, что в лемме 5 неравенства между L_p -нормами можно заменить на эквивалентность моментов.

Рассматривая функции $x(t)$ и $y(t)$ из леммы 5 положим $x_0(t) = \max\{x(t), y(t)\}$. Тогда

$$\int_0^t x_0(s) ds \geq \int_0^t x(s) ds$$

и, следовательно,

$$\limsup_{t \rightarrow 0+} \frac{\int_0^t x_0(s) ds}{\int_0^t y(s) ds} = +\infty.$$

При этом

$$\begin{aligned} \int_0^1 x_0(s)^p ds &= \int_{\{s: x(s) \geq y(s)\}} x(s)^p ds + \int_{\{s: x(s) < y(s)\}} y(s)^p ds \\ &\leq \int_0^1 x(s)^p ds + \int_0^1 y(s)^p ds \leq 2 \int_0^1 y(s)^p ds. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\int_0^1 y(s)^p ds \leq \int_0^1 x_0(s)^p ds,$$

и мы приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 6. *Существуют две невозрастающие неотрицательные функции $x(t)$ и $y(t)$ на $(0, 1]$ такие, что $\|y\|_p^p \leq \|x\|_p^p \leq 2\|y\|_p^p < \infty$ при всех $p > 0$, и*

$$\limsup_{t \rightarrow 0+} \frac{\int_0^t x(s) ds}{\int_0^t y(s) ds} = +\infty.$$

Пусть теперь $x(s)$ и $y(s)$ – функции из леммы 6. Считая, что $x(s) = 0$ при $s > 1$, рассмотрим функцию $x_1(s) := x(2s)$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 x_1(s)^p ds &= \int_0^{1/2} x(2s)^p ds = \frac{1}{2} \int_0^1 x(s)^p ds, \\ \int_0^t x_1(s) ds &= \frac{1}{2} \int_0^{2t} x(s) ds \geq \frac{1}{2} \int_0^t x(s) ds. \end{aligned}$$

Полагая теперь $\xi := x_1(t)$ и $\eta := y(t)$ (напомним, что мы смотрим на $(0, 1]$ как на вероятностное пространство), и привлекая лемму 4, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существуют две неотрицательные случайные величины ξ и η такие, что*

$$\frac{1}{2} E\eta^p \leq E\xi^p \leq E\eta^p < \infty \quad \text{для всех } p > 0,$$

но при этом

$$\limsup_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{P\{\omega : \xi > \tau\}}{P\{\omega : \eta > \tau\}} = +\infty.$$

4. О связи с теорией экстраполяции пространств. Абстрактная теория экстраполяции пространств построена в работах Яверса и Мильмана [7], [8]. Не вдаваясь здесь в подробности теории, рассмотрим следующий пример. Пространство измеримых функций на отрезке $[0, 1]$ с нормой

$$\|x\|_{\text{Exp } L} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_0^1 e^{|x(t)|/\lambda} \leq 2 \right\} < \infty$$

называется *экспоненциальным пространством Орлича* $\text{Exp } L$. Аналогичные пространства возникают в различных разделах анализа. Оказывается, что для нормы экспоненциального пространства Орлича справедливо следующее соотношение, которое и называется *экстраполяционным*:

$$\|x\|_{\text{Exp } L} \leq C \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|x\|_n}{n} \leq C \sup_{1 \leq p < \infty} \frac{\|x\|_p}{p} \leq C^2 \|x\|_{\text{Exp } L}, \quad (4.1)$$

с некоторой константой C , не зависящей от функции x . Мы видим, что норма пространства Орлича восстанавливается по L_p -нормам. Экстраполяционные соотношения позволяют делать заключение об ограниченности оператора в соответствующих пространствах на основе известного поведения оператора в пространствах L_p . Например, из соотношения (4.1) легко получаем следующее утверждение

ТЕОРЕМА (Яно [9; гл. 12, теорема 4.41], независимо переоткрыта в [10]). Пусть T – линейный оператор, действующий в пространствах $L_p[0, 1]$ при $p \in [p_0, \infty)$ и

$$\|T\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq C_1 p \quad \text{при } p \geq p_0.$$

Тогда T действует из L_∞ в пространство Орлича $\text{Exp } L$:

$$\|Tx\|_{\text{Exp } L} \leq C_2 \|x\|_{L_\infty}.$$

Заметим, что у самого Яно [11] был сформулирован только двойственный результат, использующий оценки на норму оператора при $p \rightarrow 1$. В [9] и [11] также представлены приложения к различным вопросам анализа. В частности, в своей работе Яно показывает, что известные соотношения для различных важных операторов анализа таких, как максимальный оператор Харди–Литтльвуда, оператор перехода к сопряженной функции в гармоническом анализе и др., имеют зависимый характер. Именно, из известных оценок в шкале пространств L_p следуют оценки в пространствах на концах шкалы.

В связи с соотношением (4.1) возникает следующая задача: описать класс функциональных пространств, норма в которых восстанавливается по L_p -нормам. Рассмотрим класс симметричных пространств (см. [5]). Пространство E измеримых функций на $[0, 1]$ называется *симметричным*, если выполнены условия:

- 1) если $x \in E$ и $|y(t)| \leq |x(t)|$ для почти всех $t \in [0, 1]$, то $y \in E$ и $\|y\|_E \leq \|x\|_E$;
- 2) если $x \in E$ и

$$\mu\{t : |x(t)| > \tau\} = \mu\{t : |y(t)| > \tau\} \quad \text{для всех } \tau > 0,$$

где μ – мера Лебега, то $y \in E$ и $\|y\|_E = \|x\|_E$.

Пространства L_p , пространства Орлича – симметричные пространства. Будем рассматривать те симметричные пространства, которые содержатся во всех пространствах L_p при $p < \infty$. Согласно теореме 1 распределение функций из таких пространств, а следовательно, и симметричная норма, однозначно восстанавливаются по L_p -нормам. Однако, хотелось бы иметь явную формулу для восстановления симметричной нормы по L_p -нормам. Кроме того, чаще приходится иметь дело не с равенствами для L_p -норм, а с оценками, как в теореме Яно. В связи с этим в работе [6] введено понятие экстраполяционного пространства. В таком пространстве E для нормы справедливы двусторонние оценки

$$C^{-1} \| \|x\|_p \|_F \leq \|x\|_E \leq C \| \|x\|_p \|_F, \quad (4.2)$$

где F – некоторая банахова решетка функций аргумента $p \in [1, +\infty)$. Из (4.1) мы видим, что экспоненциальное пространство Орлича экстраполяционно. В [6] показано, что существует неэкстраполяционное пространство Марцинкевича. Существование такого пространства связано с невозможностью восстановления по L_p -нормам, заданным с точностью до эквивалентности, не только распределения, но даже более регулярного объекта – $\mathcal{K}$ -функционала:

$$\mathcal{K}(t, x; L_1, L_\infty) = \inf_{x=x_0+x_1} (\|x_0\|_1 + t\|x_1\|_\infty) = \int_0^t x^*(s) ds,$$

где x^* – невозрастающая перестановка $|x(t)|$. На основе этого результата доказано предложение 2 настоящей работы.

Как видно из (4.1), норма в $\text{Exp } L$ восстанавливается даже по целым моментам. Пространство $\text{Exp } L$ принадлежит классу сильно экстраполяционных пространств, которые характеризуются действием в них оператора $Sx(t) := x(t^2)$ [12]. Для всех таких пространств банахову решетку F из определения экстраполяционности (4.2) можно дискретизировать способом, приводящим в случае пространства Орлича $\text{Exp } L$ к соотношению

$$\|x\|_{\text{Exp } L} \leq C \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|x\|_{2^n}}{2^n} \leq C^2 \|x\|_{\text{Exp } L}.$$

Норма в сильно экстраполяционных пространствах восстанавливается даже по моментам порядка 2^n .

Условие

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|x\|_n}{n} < \infty,$$

фигурирующее в (4.1), эквивалентно условию r -аналитичности характеристической функции случайной величины x (смотрим на отрезок $[0, 1]$, как на вероятностное пространство), распределение x при таком условии восстанавливается однозначно по целым моментам [1; с.108]. Однако сильно экстраполяционные пространства могут содержать неотрицательные случайные величины, для которых нарушается единственность в классической проблеме моментов. Так, для каждого $\alpha > 0$ пространство Орлича $\text{Exp } L^\alpha$, построенное по выпуклой функции, совпадающей с e^{t^α} при достаточно больших t , сильно экстраполяционно. В то же время, используя условия Крейна и Карлемана [1; с.108], несложно показать, что единственность проблемы моментов выполняется для всех неотрицательных случайных величин из $\text{Exp } L^\alpha$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geq 1/2$.

В общем случае дискретный и непрерывный вариант экстраполяции могут давать разные пространства. Так, используя случайные величины η и ξ из предложения 1, соответствующие $C_j = j^j$, видим, что нормы

$$\|x\|^{(1)} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|x\|_n}{\|\eta\|_n} \quad \text{и} \quad \|x\|^{(2)} = \sup_{1 \leq p < \infty} \frac{\|x\|_p}{\|\eta\|_p}$$

задают разные пространства, так как для функции x_0 с распределением, как у ξ , $\|x_0\|^{(1)} < \infty$, но $\|x_0\|^{(2)} = \infty$.

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания и постановку новых задач.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Й. Стоянов, *Контрпримеры в теории вероятностей*, Факториал, М., 1999.
- [2] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, Т. 2, Мир, М., 1984.
- [3] А. Н. Ширяев, *Вероятность*. Кн. 1: Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы, МЦНМО, М., 2004.
- [4] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, Физматгиз, М., 1961.

- [5] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [6] С. В. Асташкин, К. В. Лыков, “Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, “близких” к L_∞ ”, *Сиб. матем. журн.*, **47**:5 (2006), 974–992.
- [7] B. Jawerth, M. Milman, “Extrapolation Theory with Applications”, Mem. Amer. Math. Soc., **89**, no. 440, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 82 pp.
- [8] B. Jawerth, M. Milman, “New results and applications of extrapolation theory”, *Interpolation Spaces and Related Topics* (Haifa, 1990), Israel Math. Conf. Proc., **5**, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1992, 81–105.
- [9] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Мир, М., 1965.
- [10] И. Б. Симоненко, “Интерполяция и экстраполяция линейных операторов в пространствах Орлича”, *Матем. сб.*, **63**:4 (1964), 536–553.
- [11] S. Yano, “Notes on Fourier analysis. (XXIX): An extrapolation theorem”, *J. Math. Soc. Japan*, **3**:2 (1951), 296–305.
- [12] С. В. Асташкин, К. В. Лыков, “Сильно экстраполяционные пространства и интерполяция”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:2 (2009), 250–266.

К. В. Лыков

Самарский государственный университет

E-mail: alkv@list.ru

Поступило

11.05.2010

Исправленный вариант

16.01.2011