Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Горохова, Малые поперечные колебания вязко-упругого стержня, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 6, 825–832

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8763>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:07:53

Малые поперечные колебания вязкоупругого стержня

И. В. Горохова

Рассмотрена спектральная задача, связанная с описанием малых поперечных колебаний однородного вязкоупругого стержня. Левый конец стержня закреплен шарнирно. Правый конец несет сосредоточенную массу. Описано расположение спектра такой задачи и получены асимптотические формулы для собственных значений.

Библиография: 12 названий.

1. Постановка задачи. Существует большое количество работ, в которых изучаются поперечные колебания упругих стержней с разными условиями закрепления концов [1], [2]. Задачи о колебаниях демпфированных упругих стержней, т.е. стержней, находящихся под действием внешнего трения, рассматривались в работе [3]. Колебания вязкоупругого стержня, т.е. колебания с внутренним трением, рассматривали [4]–[9].

Рассмотрим однородный вязкоупругий стержень. Поперечные колебания такого стержня описываются следующим уравнением:

$$\alpha \frac{\partial^5 u(x, t)}{\partial t \partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = 0, \quad (1.1)$$

где

- $g(x)$ – это вещественная функция из пространства Соболева $W_2^1(0, l)$;
- α – положительное число, пропорциональное коэффициенту внутреннего трения;
- $u(x, t)$ – поперечное смещение точки, находящейся на расстоянии x от левого конца стержня в момент времени t ;
- ρ – погонная плотность стержня, которую далее без потери общности будем считать равной единице.

Предположим, что левый конец стержня закреплен шарнирно, что описывается условиями

$$u(0, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0. \quad (1.3)$$

На правом конце стержня находится кольцо массой $m > 0$, которое может двигаться в направлении, перпендикулярном равновесному положению стержня. Стержень

прикреплен к кольцу шарнирно. Тогда условия на правом конце имеют следующий вид:

$$\left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad (1.4)$$

$$\left. \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=l} + \alpha \left. \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t \partial x^3} \right|_{x=l} - m \left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x=l} - g(l) \left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (1.5)$$

Для $\alpha = 0$, т.е. при отсутствии вязкого трения это условие совпадает с рассмотренным [2].

Ищем частное решение задачи (1.1)–(1.5) в виде

$$u(x, t) = y(\lambda, x) e^{i\lambda t}. \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.1)–(1.5), получаем спектральную задачу

$$y^{(4)}(\lambda, x) + i\alpha\lambda y^{(4)}(\lambda, x) - (g(x)y^{(1)}(\lambda, x))^{(1)} - \lambda^2 y(\lambda, x) = 0, \quad (1.7)$$

$$y(\lambda, 0) = 0, \quad (1.8)$$

$$y^{(2)}(\lambda, 0) = 0, \quad (1.9)$$

$$y^{(2)}(\lambda, l) = 0, \quad (1.10)$$

$$(1 + i\alpha\lambda)y^{(3)}(\lambda, l) - m\lambda^2 y(\lambda, l) - g(l)y^{(1)}(\lambda, l) = 0. \quad (1.11)$$

2. Теоретико-операторная трактовка задачи. Рассмотрим теоретико-операторную трактовку этой задачи. Для этого введем операторы, действующие в пространстве $L_2(0, l) \oplus \mathbb{C}$ согласно следующим формулам:

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y(x) \\ c \end{pmatrix} : y(x) \in W_2^4(0, l), c = y(l), y(0) = y^{(2)}(0) = 0, y^{(2)}(l) = 0 \right\},$$

$$A \begin{pmatrix} y(x) \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{(4)}(x) \\ -y^{(3)}(l) \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(g(x)y^{(1)}(x))^{(1)} \\ g(l)y^{(1)}(l) \end{pmatrix}.$$

Область определения $\mathcal{D}(G) = \mathcal{D}(A)$. Далее, обозначим

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующий операторный пучок:

$$L(\lambda) = (1 + i\alpha\lambda)A - \lambda^2 M + G$$

с областью определения, задаваемой равенством $\mathcal{D}(L(\lambda)) = \mathcal{D}(A)$. Эта область определения не зависит от спектрального параметра λ . Естественно считать, что спектр пучка $L(\lambda)$ является спектром нашей задачи, поскольку, записав уравнение $L(\lambda)Y = 0$ покомпонентно, получим (1.7) и (1.11), а условия (1.8)–(1.10) входят в описание $D(A)$. Мы пользуемся здесь следующими определениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество значений λ , для которых обратный оператор $L(\lambda)^{-1}$ существует как ограниченный замкнутый, называется *резольвентным множеством*, а дополнение к нему – *спектром пучка* $L(\lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением* [10; с. 61] пучка $L(\lambda)$, если существует вектор $y_0 \in D(A)$ (называемый *собственным вектором*) такой, что $y_0 \neq 0$ и $L(\lambda_0)y_0 = 0$. Векторы $y_1, \dots, y_{v-1}$ называются *цепочкой присоединенных к y_0 векторов*, если

$$\sum_{s=0}^k \frac{1}{s!} \frac{d^s L(\lambda)}{d\lambda^s} \Big|_{\lambda=\lambda_0} y_{k-s} = 0, \quad k = 1, \dots, v-1.$$

Число v называется *длиной цепочки* из собственного и присоединенных векторов. *Геометрической кратностью* собственного значения называется число соответствующих линейно независимых собственных векторов. *Алгебраической кратностью* собственного значения называется максимальное значение суммы длин цепочек, соответствующих линейно независимым собственным векторам. Собственное значение называется *изолированным*, если некоторая его проколотая окрестность принадлежит резольвентному множеству. Изолированное собственное значение λ_0 конечной алгебраической кратности называется *нормальным*, если образ $\text{Im } L(\lambda_0)$ замкнут.

ЛЕММА 1. *Оператор A самосопряженный, неотрицательный.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$Y = \begin{pmatrix} y(x) \\ y(l) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A), \quad Z = \begin{pmatrix} z(x) \\ z(l) \end{pmatrix},$$

где $z(x) \in W_2^4(0, l)$, тогда учитывая, что $y(0) = 0$, $y^{(2)}(0) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} (AY, Z) &= \int_0^l y^{(4)}(x) \bar{z}(x) dx - y^{(3)}(l) \bar{z}(l) \\ &= y^{(3)}(x) \bar{z}(x) \Big|_0^l - \int_0^l y^{(3)}(x) z^{(1)}(x) dx - y^{(3)}(l) \bar{z}(l) \\ &= -y^{(3)}(0) \bar{z}(0) + y^{(1)}(l) \bar{z}^{(2)}(l) - y^{(1)}(0) \bar{z}^{(2)}(0) \\ &\quad - y(l) \bar{z}^{(3)}(l) + y(0) \bar{z}^{(3)}(0) + \int_0^l y(x) \bar{z}^{(4)}(x) dx. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Отсюда видно, что если мы положим в (2.1)

$$z(0) = z^{(2)}(0) = z^{(2)}(l) = 0, \quad (2.2)$$

то получим

$$(AY, Z) = \int_0^l y(x) z^{(4)}(x) dx - y(l) \bar{z}^{(3)}(l) = (Y, AZ),$$

т.е. оператор A самосопряжен. Покажем, что оператор A неотрицательный. Для этого рассмотрим скалярное произведение (AY, Y) . Полагая в (2.1) $z = y$ и учитывая условия (2.2), получаем

$$(AY, Y) = \int_0^l |y^{(2)}|^2 dx \geq 0.$$

Откуда видно, что оператор A является неотрицательным.

ЛЕММА 2. Оператор G симметричен; $G \geq 0$ (соответственно $G \leq 0$) при $g(x) \geq 0$ (соответственно $g(x) \leq 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$Y \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(G), \quad Z \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(G),$$

$$\begin{aligned} (GY, Z) &= - \int_0^l (g(x)y^{(1)}(x))^{(1)} \bar{z}(x) dx + g(l)\bar{z}(l)y^{(1)}(l) \\ &= -g(x)y^{(1)}(x)\bar{z}(x)|_0^l + \int_0^l (g(x)y^{(1)}(x))\bar{z}^{(1)}(x) dz + g(l)\bar{z}(l)y^{(1)}(l) \\ &= -g(l)y^{(1)}(l)\bar{z}(l) + g(0)y^{(1)}(0)\bar{z}(0) \\ &\quad + g(l)\bar{z}(l)y^{(1)}(l) + \int_0^l (g(x)y^{(1)}(x))\bar{z}^{(1)}(x) dx \\ &= \int_0^l g(x)y^{(1)}(x)\bar{z}^{(1)}(x) dx \\ &= g(l)\bar{z}^{(1)}(l)y(l) - g(0)\bar{z}^{(1)}(0)y(0) - \int_0^l (g(x)\bar{z}^{(1)}(x))^{(1)}y(x) dx = (Y, GZ). \end{aligned}$$

Оператор G симметричен. Кроме того, $(GY, Y) = \int_0^l g(x)|y^{(1)}(x)|^2 dx \geq 0$ при $g(x) \geq 0$ и $(GY, Y) \leq 0$, если $g(x) \leq 0$.

Нашей целью является рассмотрение пучка $L(\lambda)$. Однако нам удобнее будет рассматривать вспомогательную оператор-функцию

$$\mathcal{L}(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{1 + i\alpha\lambda} = A - \frac{\lambda^2}{1 + i\alpha\lambda}M + \frac{G}{1 + i\alpha\lambda},$$

спектр которой, очевидно, совпадает со спектром нашего пучка, кроме точки $\lambda = i\alpha^{-1}$, где оператор-функция $\mathcal{L}(\lambda)$ неопределена.

ЛЕММА 3. Существенный спектр пучка $\sigma_{\text{ess}}(L(\lambda)) = \{i\alpha^{-1}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество нормальных собственных значений пучка $L(\lambda)$ совпадает с множеством нормальных собственных значений $\mathcal{L}(\lambda)$ и с множеством собственных значений задачи

$$\begin{aligned} y^{(4)}(\lambda, x) - \frac{(g(x)y^{(1)}(\lambda, x))^{(1)}}{1 + i\alpha\lambda} - \frac{\lambda^2 y(\lambda, x)}{1 + i\alpha\lambda} &= 0, \\ -y^{(3)}(\lambda, l) - \frac{m\lambda^2 y(\lambda, l)}{1 + i\alpha\lambda} + \frac{g(l)y^{(1)}(\lambda, l)}{1 + i\alpha\lambda} &= 0, \\ y(\lambda, 0) &= 0, \\ y^{(2)}(\lambda, 0) &= 0, \\ y^{(2)}(\lambda, l) &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Коэффициенты этой задачи являются аналитическими функциями параметра λ во всей комплексной плоскости, исключая точку $i\alpha^{-1}$. Согласно [11] спектр этой краевой задачи в области $\mathbb{C} \setminus i\alpha^{-1}$ состоит из нормальных собственных значений.

Обозначим через $\mathbb{C}_+$ открытую верхнюю полуплоскость, K – открытый круг радиусом α^{-1} с центром $\lambda = i\alpha^{-1}$, а через $\overline{K}$ – его замыкание.

ТЕОРЕМА. *Имеют место следующие утверждения:*

- 1) нормальные собственные значения сгущаются к точке $\lambda = i\alpha^{-1}$ и к бесконечности;
- 2) при $g \geq 0$ собственные значения лежат в области $(i\alpha^{-1}, 2i\alpha^{-1}) \cup (\overline{\mathbb{C}_+} \setminus K)$;
- 3) при $g \leq 0$ собственные значения лежат в

$$\overline{K} \cup (2i\alpha^{-1}, i\infty) \cup \left(\frac{-i|p|^{1/2}}{(\min\{1, m\})^{1/2}}, 0 \right),$$

где $p = \min\{0, p_1\}$, p_1 – наименьшее собственное значение оператора $A + G$;

- 4) собственные значения в открытой нижней полуплоскости полупростые, т.е. не имеют присоединенных векторов;
- 5) число собственных значений в открытой нижней полуплоскости с учетом кратности равно числу отрицательных собственных значений оператора $A + G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Домножим уравнение (2.3) на $\bar{y}$ и проинтегрируем по x от 0 до l и получим

$$\int_0^l y^{(4)} \bar{y} dx - \frac{1}{1 + i\alpha\lambda} \int_0^l (gy^{(1)})^{(1)} \bar{y} dx - \frac{\lambda^2}{1 + i\alpha\lambda} \int_0^l |y|^2 dx = 0. \quad (2.4)$$

Дважды интегрируя по частям и учитывая краевые условия, получаем

$$\begin{aligned} y^{(3)}(l)\bar{y}(l) + \int_0^l |y^{(2)}|^2 dx - \frac{g(l)y^{(1)}(l)\bar{y}(l)}{1 + i\alpha\lambda} \\ + \frac{1}{1 + i\alpha\lambda} \int_0^l g|y^{(1)}|^2 dx - \frac{\lambda^2}{1 + i\alpha\lambda} \int_0^l |y|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Выражая $y^{(3)}$ из (1.11) и подставляя в (2.5), получим следующее уравнение:

$$\frac{\lambda^2}{1 + i\alpha\lambda} \left(m|y(l)|^2 + \int_0^l |y|^2 dx \right) - \frac{1}{1 + i\alpha\lambda} \int_0^l g|y^{(1)}|^2 dx - \int_0^l |y^{(2)}|^2 dx = 0. \quad (2.6)$$

Рассмотрим мнимую часть (2.6)

$$\frac{\operatorname{Re} \lambda}{|1 + i\alpha\lambda|^2} \left[\left(2 \operatorname{Im} \lambda - \alpha|\lambda|^2 \right) \left(m|y(l)|^2 + \int_0^l |y|^2 dx \right) + \alpha \int_0^l g|y^{(1)}|^2 dx \right] = 0.$$

Отсюда следует, что собственные значения могут лежать на мнимой оси или в области, задаваемой уравнением, которое эквивалентно следующему:

$$(\operatorname{Re} \lambda)^2 + \left(\operatorname{Im} \lambda - \frac{1}{\alpha} \right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\int_0^l g|y^{(1)}|^2 dx}{m|y(l)|^2 + \int_0^l |y|^2 dx}. \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что при $g \geq 0$ не чисто мнимые собственные значения лежат вне открытого круга K , а при $g \leq 0$ – в замкнутом круге $\overline{K}$.

Пусть λ_0 – не чисто мнимое собственное значение, а y_0 – соответствующий собственный вектор, тогда справедливо равенство

$$(L(\lambda_0)y_0, y_0) = -\lambda_0^2(My_0, y_0) + (Gy_0, y_0) + (1 + i\lambda_0\alpha)(Ay_0, y_0) = 0. \quad (2.8)$$

Взяв мнимую часть (2.8) и учитывая самосопряженность оператора A и симметричность M и G , получаем

$$\operatorname{Re} \lambda_0(-2 \operatorname{Im} \lambda_0(My_0, y_0) + \alpha(Ay_0, y_0)) = 0$$

или, поскольку

$$\operatorname{Re} \lambda_0 \neq 0,$$

имеем

$$\operatorname{Im} \lambda_0 = \frac{\alpha(Ay_0, y_0)}{2(My_0, y_0)} \geq 0.$$

Следовательно, не чисто мнимые собственные значения лежат в $\overline{\mathbb{C}}_+$.

Рассмотрим теперь чисто мнимые собственные значения. Пусть $\lambda_0 = i\tau_0$, $\tau_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha^{-1}\}$, – собственные значения, тогда (2.8) примет вид

$$\tau_0^2(My_0, y_0) + (Gy_0, y_0) + (1 - \tau_0\alpha)(Ay_0, y_0) = 0,$$

откуда

$$\tau_0 = \frac{\alpha(Ay_0, y_0) \pm \sqrt{\alpha^2(Ay_0, y_0)^2 - 4(My_0, y_0)((Ay_0, y_0) + (Gy_0, y_0))}}{2(My_0, y_0)}.$$

Из этой формулы следует, что при $g(x) \geq 0$ чисто мнимые собственные значения отсутствуют на интервале $(0, i\alpha^{-1})$, а при $g(x) \leq 0$ они отсутствуют на интервале $(-\infty, -i|p|^{1/2}/(\min\{1, m\})^{1/2})$. Таким образом, утверждение 2) и 3) доказаны. Утверждения 4) и 5) следуют из [12].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Требование $g(x) \in W_2^1(0, l)$ можно ослабить, если строить модель в конфигурационном пространстве $H = \{y \in W_2^2(0, l) : y(0) = 0\}$ исходной механической системы (см. [9], [2]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждение 1) теоремы известно еще из [7]. Содержание пунктов 2) и 3), относящееся к не чисто мнимым собственным значениям, вытекает из [7; предложение 2.1].

3. Асимптотика собственных значений. Рассмотрим асимптотику собственных значений задачи (1.7)–(1.11). Для упрощения будем считать, что $g = \text{const} \neq 0$. Фундаментальная система вида $y_k(\lambda, x)$, $k = 1, 2, 3, 4$, решений уравнения (1.7) [11] задается условиями $y_k^{(n-1)}(\lambda, 0) = \delta_{kn}$, $k, n = 1, 2, 3, 4$, где δ_{kn} – символ Кронекера.

Решение уравнения (1.7), которое удовлетворяет условиям (1.8), (1.9), (1.10), имеет вид

$$y = y_4^{(2)}(\lambda, l)y_2(\lambda, x) - y_2^{(2)}(\lambda, l)y_4(\lambda, x). \quad (3.1)$$

Подставляя его в краевое условие (1.11), получаем уравнение

$$\begin{aligned} & y_4^{(2)}(\lambda, l)((1 + i\alpha\lambda)y_2^{(3)}(\lambda, l) - m\lambda^2 y_2(\lambda, l) - gy_2^{(1)}(\lambda, l)) \\ & - y_2^{(2)}(\lambda, l)((1 + i\alpha\lambda)y_4^{(3)}(\lambda, l) - m\lambda^2 y_4(\lambda, l) - gy_4^{(1)}(\lambda, l)) = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Прямое вычисление показывает, что

$$y_2(\lambda, x) = -\frac{z_2^2 \operatorname{sh}(z_1 x)}{z_1(z_1^2 - z_2^2)} + \frac{z_1^2 \operatorname{sh}(z_2 x)}{z_2(z_1^2 - z_2^2)}, \quad (3.3)$$

$$y_4(\lambda, x) = \frac{\operatorname{sh}(z_1 x)}{z_1(z_1^2 - z_2^2)} - \frac{\operatorname{sh}(z_2 x)}{z_2(z_1^2 - z_2^2)}, \quad (3.4)$$

где

$$z_{1,2} = \sqrt{\frac{-g \pm \sqrt{g^2 + 4\lambda^2(1 + i\alpha\lambda)}}{2(1 + i\alpha\lambda)}}.$$

С учетом (3.3) и (3.4) уравнение (3.2) можно представить в следующем виде:

$$m\lambda^2(z_2^2 - z_1^2) \operatorname{sh} z_2 l + (1 + i\alpha\lambda) z_1^2 z_2^2 (z_2 \operatorname{ch} z_2 l - z_1 \operatorname{sh} z_2 l) + g z_1 z_2 (z_2 \operatorname{sh} z_2 l - z_1 \operatorname{ch} z_2 l) = 0. \quad (3.5)$$

Найдем асимптотические формулы для собственных значений задачи (1.7)–(1.11), т.е. для корней уравнения (3.5). Рассмотрим случай, когда $\lambda \rightarrow i\infty$. Сделаем замену $\lambda = i\theta$. Тогда после преобразований уравнение (3.5) примет вид

$$(1 - \theta\alpha) z_1^2 z_2^2 (z_2 \operatorname{ch} z_2 l - z_1 \operatorname{sh} z_2 l) - im\theta^2 (z_2^2 - z_1^2) \operatorname{sh} z_2 l + g z_1 z_2 (z_2 \operatorname{sh} z_2 l - z_1 \operatorname{ch} z_2 l) = 0. \quad (3.6)$$

При $\theta \rightarrow +\infty$ имеем

$$z_1 = \sqrt[4]{\frac{\theta}{\alpha}} \left(1 + \frac{1}{4\alpha\theta} + \frac{g}{4\sqrt{\alpha}\theta^{3/2}} + O\left(\frac{1}{\theta^{7/4}}\right) \right),$$

$$z_2 = i\sqrt[4]{\frac{\theta}{\alpha}} \left(1 + \frac{1}{4\alpha\theta} - \frac{g}{4\sqrt{\alpha}\theta^{3/2}} + O\left(\frac{1}{\theta^{7/4}}\right) \right).$$

Для нахождения асимптотики корней уравнения (3.6) подставим в него $\theta = \mu^4$ и

$$\mu = \frac{\pi n \sqrt[4]{\alpha}}{l} + A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Тогда, приравнявая к нулю коэффициенты перед степенями $1/n$, в полученном таким образом уравнении имеем

$$\theta_n = \frac{\pi^4 n^4 \alpha}{l^4} - \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{3lm^3} + \frac{\alpha}{2l^2 m^2} - \frac{\pi n \alpha}{l^2 m^2} - \frac{2\pi^2 n^2 \alpha}{l^3 m} + \frac{l^2 g}{\pi^2 n^2 \alpha} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

или, сделав обратную замену $\lambda = i\theta$,

$$\lambda_n = i \left(\frac{\pi^4 n^4 \alpha}{l^4} - \frac{2\pi^2 n^2 \alpha}{l^3 m} - \frac{\pi n \alpha}{l^2 m^2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{3lm^3} + \frac{\alpha}{2l^2 m^2} + \frac{l^2 g}{\pi^2 n^2 \alpha} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right). \quad (3.7)$$

Рассмотрим собственные значения при

$$\lambda = \frac{i}{\alpha} + i\tau, \quad \tau \rightarrow 0.$$

Решая аналогичным образом уравнение (3.2) при $\lambda \rightarrow i/\alpha + i\tau$, получаем асимптотику собственных значений

$$\lambda_n = \frac{i}{\alpha} + \frac{igl^2}{\alpha\pi^2 n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (3.8)$$

Из формул (3.7) и (3.8) видно, что по спектру задачи последовательно можно найти параметры задачи l , α , g , m , т.е. решить обратную задачу для случая $g = \text{const}$.

Автор выражает благодарность В. Н. Пивоварчику за постановку задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Болотин, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Физматгиз, М., 1961.
- [2] Ж. Бен Амара, А. А. Владимиров, “Об одной задаче четвертого порядка со спектральным и физическим параметрами в граничном условии”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:4 (2004), 3–18.
- [3] M. Möller, V. Pivovarchik, “Spectral properties of a fourth order differential equation”, *Z. Anal. Anwend.*, **25**:3 (2006), 341–366.
- [4] И. П. Андрейчиков, В. И. Юдович, “Об устойчивости вязко-упругих стержней”, *Изв. АН СССР. Сер. МТТ*, 1974, № 2, 78–87.
- [5] M. P. Païdoussis, N. T. Issid, “Dynamic stability of pipes conveying fluid”, *J. Sound Vibration*, **33**:3 (1974), 267–294.
- [6] В. Н. Зефирова, В. В. Колесов, А. И. Милославский, “Исследование собственных частот прямолинейного трубопровода”, *Изв. АН СССР. Сер. МТТ*, 1985, № 1, 179–188.
- [7] Р. О. Гринив, А. А. Шкаликов, “О пучке операторов, возникающем в задаче о колебаниях стержня с внутренним трением”, *Матем. заметки*, **56**:2 (1994), 114–131.
- [8] В. Н. Пивоварчик, “Краевая задача, связанная с колебаниями стержня с внутренним и внешним трением”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1987, № 3, 68–71.
- [9] А. А. Владимиров, “О накоплении собственных значений операторного пучка, связанного с задачей о колебаниях вязкоупругого стержня”, *Матем. заметки*, **79**:3 (2006), 369–383.
- [10] А. С. Маркус, *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков*, Штиинца, Кишинев, 1986.
- [11] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [12] V. Pivovarchik, “On positive spectra of one class of polynomial operator pencils”, *Integral Equations Operator Theory*, **19**:3 (1994), 314–326.

И. В. Горохова

Южно-Украинский педагогический университет
им. К. Д. Ушинского, г. Одесса
E-mail: i.gorochova@rambler.ru

Поступило

28.10.2009

Исправленный вариант

25.06.2010