Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Конечная, Об асимптотическом интегрировании симметрических квазидифференциальных уравнений второго порядка, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 6, 875–884

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8764>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 17:53:46

Об асимптотическом интегрировании симметрических квазидифференциальных уравнений второго порядка

Н. Н. Конечная

В статье приводятся условия на коэффициенты уравнений

$$\begin{aligned} -(p(f' - rf))' - \bar{r}p(f' - rf) + qf &= 0, \\ -(P(f' - Rf))' - \bar{R}P(f' - Rf) + Qf &= 0, \end{aligned}$$

где $1/p, 1/P, q, Q, r, R \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$, p, P, q, Q – вещественнозначные и r, R – комплекснозначные функции, и фундаментальную систему решений второго уравнения, обеспечивающие асимптотическую близость решений этих уравнений. Полученные результаты применяются к исследованию спектральных свойств дифференциального оператора, порожденного выражением

$$-y'' + \sum_{k=0}^{+\infty} h_k \delta(x - x_k)y, \quad x_k \in \mathbb{R}_+, \quad h_k \in \mathbb{R},$$

в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$. В частности, найдены условия на h_k, x_k , при которых для этого оператора реализуется случай предельного круга.

Библиография: 8 названий.

1. Введение

Пусть вещественнозначные функции $1/p, q$ и комплекснозначная функция r измеримы на полуоси $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ и суммируемы на каждом ее замкнутом конечном подынтервале $(1/p, q, r \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+))$. Пусть далее f – локально абсолютно непрерывная функция на $\mathbb{R}_+$. Определим *первую квазипроизводную* функции f , полагая

$$f^{[1]} := p(f' - rf).$$

Предположив, что функция $f^{[1]}$ также абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}_+$, определим *вторую квазипроизводную* функции f , полагая

$$f^{[2]} := (f^{[1]})' + \bar{r}f^{[1]} - qf,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00192-а).

и рассмотрим квазидифференциальное выражение

$$l[f](x) := -f^{[2]}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (1.1)$$

Таким образом, областью определения Δ выражения $l[f]$ является множество всех локально абсолютно непрерывных функций f на $\mathbb{R}_+$ таких, что $f^{[1]}$ также локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}_+$. Для любых двух функций $f, g \in \Delta$ справедливо тождество Грина

$$\int_{\alpha}^{\beta} (l[f]\bar{g} - f\overline{l[g]}) = [f, g](\beta) - [f, g](\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq \beta < \infty, \quad (1.2)$$

где форма $[f, g]$ определена равенством

$$[f, g]x := f(x)\overline{g^{[1]}(x)} - f^{[1]}(x)\overline{g(x)}.$$

В силу тождества 1.2 выражение l является симметрическим (формально само-сопряженным) квазидифференциальным выражением второго порядка.

Пусть далее функции P, Q и R такие же, как p, q и r соответственно. И пусть функции f и $f_{[1]} := P(f' - Rf)$ локально абсолютно непрерывны на $\mathbb{R}_+$. Рассмотрим симметрические квазидифференциальные уравнения

$$l[f] := -(f^{[1]})' - \bar{r}f^{[1]} + qf = 0, \quad (1.3)$$

$$s[f] := -(f_{[1]})' - \bar{R}f_{[1]} + Qf = 0. \quad (1.4)$$

Данная работа посвящена установлению достаточных условий на коэффициенты p, q, r и P, Q, R уравнений (1.3) и (1.4) и фундаментальную систему решений u и v уравнения (1.4), обеспечивающих асимптотическую близость их решений. А именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть функции P, Q, R и p, q, r такие, что при некотором $a > 0$

- 1) $\int_a^{+\infty} \left| (Q - q) + 2PR \operatorname{Re}(R - r) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{P} \right) P^2 R^2 \right| |w|^2 < +\infty,$
- 2) $\int_a^{+\infty} \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{P} \right| P^2 |w'|^2 < +\infty,$
- 3) $\int_a^{+\infty} \left| (r - R)P - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{P} \right) P^2 R \right| |ww'_1| < +\infty,$
- 4) $\int_a^{+\infty} \left| (\bar{r} - \bar{R})P - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{P} \right) P^2 R \right| |ww'_1| < +\infty,$

где $w, w_1 \in \{u, v\}$.

Тогда для любой пары комплексных чисел α и β уравнение (1.3) имеет, причем единственное, решение $f(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} f(x) &= [\alpha + a(x)]u(x) + [\beta + b(x)]v(x), \\ f^{[1]}(x) &= [\alpha + a(x)]u_{[1]}(x) + [\beta + b(x)]v_{[1]}(x), \end{aligned}$$

где $a(x) = o(1)$ и $b(x) = o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Разделы 2 и 3 настоящей работы посвящены доказательству теоремы 1 и некоторым важным следствиям этой теоремы. Предполагая, в частности, что для решений уравнения (1.4) справедливы асимптотические формулы Лиувилля–Грина, получаем достаточный признак асимптотической близости решений дифференциальных уравнений (1.3) и (1.4) уже в терминах коэффициентов этих уравнений (теорема 2). Теоремы 1 и 2 позволяют найти дефектные числа минимального оператора, порожденного выражением l в пространстве интегрируемых с квадратом по Лебегу функций на полуоси, зная эти числа для оператора, порожденного выражением s (следствия 1 и 2).

В разделе 4 в качестве примера рассматривается дифференциальное выражение вида

$$l[y] = -(y' - \phi y)' - \phi(y' - \phi y) - \phi^2 y,$$

где $\phi^2(x) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$. Как известно, оператор, порожденный этим выражением, можно трактовать как оператор, порожденный выражением $-y'' + \phi'y$, в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$, где ϕ' – производная функции ϕ в смысле теории распределений. Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалом ϕ' , являющимся сингулярным распределением первого порядка, особенно в случае конечного отрезка, довольно обстоятельно были изучены ранее (см. [1] и имеющийся там список литературы). В разделе 4 как приложения теоремы 1 изучаются некоторые спектральные свойства оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом-распределением.

В случае общих дифференциальных уравнений второго порядка с непрерывными коэффициентами условия асимптотической близости решений двух дифференциальных уравнений хорошо известны и изложены, например, в книге Хартмана (см. [2; гл. XI, § 8]). Теорема 1 является аналогом этих результатов для квазидифференциальных уравнений второго порядка. Новизна данной работы по сравнению с [2] заключается в том, что непрерывность от коэффициентов дифференциальных уравнений не требуется, достаточно лишь, чтобы они были локально суммируемы на $\mathbb{R}_+$.

2. Теоремы об асимптотическом интегрировании квазидифференциальных уравнений второго порядка

2.1. Докажем, что справедлива теорема 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Записав уравнение (1.4) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{pmatrix} y \\ y_{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} R & P^{-1} \\ Q & -\bar{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y_{[1]} \end{pmatrix},$$

легко видеть, что матрица

$$T = \begin{pmatrix} u & v \\ u_{[1]} & v_{[1]} \end{pmatrix}$$

является фундаментальной матрицей этой системы. Заметив это, уравнение (1.3) также запишем в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{pmatrix} y \\ y_{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} r & p^{-1} \\ q & -\bar{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y_{[1]} \end{pmatrix}$$

и в полученной системе сделаем замену

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix} = Tz, \quad \text{где } z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что матрица T^{-1} , обратная к T , имеет вид

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} v^{[1]} & -v \\ -u^{[1]} & u \end{pmatrix} \cdot C \exp\left(-2i \int_{x_0}^x \operatorname{Im} R(t) dt\right), \quad C \neq 0,$$

после некоторых элементарных вычислений находим, что вектор-функция $z = z(x)$ удовлетворяет системе линейных уравнений

$$z' = \left\{ A(x) \cdot C \exp\left(-2i \int_{x_0}^x \operatorname{Im} R(t) dt\right) \right\} z, \quad (2.1)$$

где

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4,$$

$$A_1 = \left\{ (Q - q) + 2PR \operatorname{Re}(R - r) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{P}\right) P^2 R^2 \right\} \begin{pmatrix} uv & v^2 \\ -u^2 & -uv \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{P}\right) P^2 \begin{pmatrix} u'v' & (v')^2 \\ -(u')^2 & -u'v' \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \left\{ (\bar{r} - \bar{R})P - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{P}\right) P^2 R \right\} \begin{pmatrix} u'v & vv' \\ -uu' & -uv' \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \left\{ (r - R)P - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{P}\right) P^2 R \right\} \begin{pmatrix} uv' & v'v \\ -u'u & -u'v \end{pmatrix}.$$

Из условий 1)–4) теоремы 1 следует, что

$$\int_a^{+\infty} \|A(x)\| dx < +\infty,$$

где $\|A\|$ означает сумму абсолютных величин элементов матрицы A . Таким образом, условия задачи 1.4 (с) из [2; гл. X, § 1, с. 331] выполнены. Следовательно, для любой пары комплексных чисел α и β система дифференциальных уравнений (2.1) имеет единственное решение вида

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + a(x) \\ \beta + b(x) \end{pmatrix},$$

где $a(x) = o(1)$ и $b(x) = o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$. Остается учесть связи между вектором z и решением исходной системы. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко заметить, что если и функции R и r тоже вещественнозначные, то условиям 1), 3), 4) теоремы 1 можно придать следующий вид:

$$1) \quad \int_a^{+\infty} \left| (Q - q) + 2(R - r)PR + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{P}\right) P^2 R^2 \right| |w|^2 < +\infty,$$

$$3) \quad \int_a^{+\infty} \left| (r - R)P - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{P}\right) P^2 R \right| |ww'| < +\infty,$$

где $w = u$ или $w = v$,

$$4) \quad \int_a^{+\infty} \left| (r - R)P - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{P} \right) P^2 R \right| |(uv)'| < +\infty.$$

2.2. Теперь докажем, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть вещественнозначные функции P и R трижды непрерывно дифференцируемы, вещественнозначная функция Q дважды непрерывно дифференцируема, $P > 0$ и $Q_1 := (PR)' + R^2 P + Q < 0$ на $(a, +\infty)$ при некотором $a > 0$, и пусть выполнены условия

$$\int_a^{+\infty} \sqrt{-Q_1/P} = +\infty \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} (-PQ_1)^{-1/4} | [(-PQ_1)^{-1/4}]'' | < +\infty.$$

Пусть, кроме того,

$$\int_a^{+\infty} \left| (Q - q) + 2(R - r)PR + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{P} \right) P^2 R^2 \right| \frac{1}{\sqrt{-PQ_1}} < +\infty, \quad (2.2)$$

$$\int_a^{+\infty} \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{P} \right| \sqrt{-PQ_1} < +\infty \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} \left| (r - R) - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{P} \right) PR \right| < +\infty. \quad (2.3)$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При сделанных предположениях уравнение (1.4), очевидно, можно преобразовать к виду

$$-(Py')' + Q_1 y = 0.$$

При выполнении условий теоремы 2 для решений этого уравнения справедливы классические асимптотические формулы Лиувилля–Грина (см. [3; § 2.5, с. 69]). Таким образом, для решений u и v верны неравенства

$$|u|, |v| \leq c(-PQ_1)^{-1/4}, \quad |Pv'|, |Pu'| \leq c(-PQ_1)^{1/4},$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная (оценки Лиувилля–Грина). Учет этих неравенств в условиях 1)–4) теоремы 1 (см. замечание 1) и последующее применение неравенств (2.2) и (2.3) показывают справедливость теоремы 2.

3. Индексы дефекта оператора L_0

3.1. Пусть теперь D'_0 – множество всех комплекснозначных финитных на $(0, +\infty)$ функций из Δ . Определим оператор L'_0 в $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$ – в пространстве всех комплекснозначных, измеримых функций с суммируемыми квадратами на полуоси $\mathbb{R}_+$ – с областью определения D'_0 , действующий по формуле $L'_0 f = l[f]$ (см. раздел 1). Хорошо известно, что множество D'_0 образует всюду плотное множество в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$, а из формулы (1.2) следует, что оператор L'_0 является симметрическим. Таким образом, оператор L'_0 допускает замыкание. Символами L_0 и D_0 обозначим замыкание этого оператора и его область определения соответственно. Известно,

что верхнее (нижнее) дефектное число n_+ (n_-) минимального замкнутого симметрического оператора L_0 , порожденного выражением (1.1) в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$, определяемое максимальным количеством линейно независимых решений уравнения

$$l[f] = \lambda f \quad (3.1)$$

при $\operatorname{Im} \lambda > 0$ ($\operatorname{Im} \lambda < 0$), принадлежащих пространству $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$, равно либо 1, либо 2, причем $n_+ = n_-$. Следовательно, пара (n_+, n_-) , называемая *индексом дефекта* оператора L_0 , равна либо $(1, 1)$, либо $(2, 2)$. Следуя Вейлю (см. [4]), в первом случае говорят, что для выражения l имеет место *случай предельной точки*, а во втором – *случай предельного круга*. Известно также, что случай предельного круга реализуется в том и только том случае, когда при некотором (любом) λ все решения уравнения (3.1) принадлежат пространству $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$. Таким образом, для выражения l реализуется случай предельного круга тогда и только тогда, когда все решения уравнения (1.3) принадлежат пространству $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$.

Приведенные выше сведения хорошо известны и извлечены нами из работ [5], [6].

3.2. Обозначим теперь через S_0 минимальный оператор, порожденный выражением s (см. разделе 1) в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$ и, применяя перечисленные в п. 3.1 факты и теорему 1, докажем, что справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть справедливы условия теоремы 1. Тогда индексы дефекта оператора S_0 и индексы дефекта оператора L_0 совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через u_1 и v_1 решения уравнения (1.3), определяемые значениями постоянных $\alpha = 1, \beta = 0$ и $\alpha = 0, \beta = 1$ соответственно. Тогда

$$u_1(x) = (1 + a(x))u(x) + b(x)v(x), \quad v_1(x) = a(x)u(x) + (1 + b(x))v(x),$$

где $a(x) = o(1)$ и $b(x) = o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Покажем, что функции u_1 и v_1 являются линейно независимыми. Действительно,

$$\begin{aligned} D(x) &:= \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_1^{[1]} & v_1^{[1]} \end{pmatrix} = (1 + a(x) + b(x)) \det \begin{pmatrix} u & v \\ u^{[1]} & v^{[1]} \end{pmatrix} \\ &= C(1 + a(x) + b(x)) \exp \left(-2i \int_{x_0}^x \operatorname{Im} R(t) dt \right), \end{aligned}$$

где C – ненулевая постоянная, и, следовательно, определитель $D(x)$ отличен от нуля при больших значениях переменной x .

С другой стороны, вычисления показывают, что

$$|u_1|^2 + |v_1|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\{(\operatorname{Re} a + |a|^2)|u|^2 + (\operatorname{Re} b + |b|^2)|v|^2 + \operatorname{Re}[(b + 2\bar{a}b + \bar{a})\bar{u}v]\}.$$

Из этого равенства легко извлечь, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|u_1|^2 + |v_1|^2}{|u|^2 + |v|^2} = 1.$$

Таким образом, интегралы

$$\int_a^{+\infty} |u_1|^2 + |v_1|^2 \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} |u|^2 + |v|^2$$

сходятся или расходятся одновременно. Из этого следует справедливость утверждения следствия 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть справедливы условия теоремы 2. Тогда операторы S_0 и L_0 имеют индексы дефекта $(2, 2)$ в том и только том случае, когда

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{-PQ_1}} < +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В следствии 1 было показано, что индексы дефекта оператора S_0 и оператора L_0 совпадают. С другой стороны, согласно асимптотическим формулам Лиувилля–Грина уравнение (1.4) имеет фундаментальную систему решений u и v , для которых при $x \rightarrow +\infty$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} u &= (-PQ_1)^{-1/4} \exp\left(i \int_{x_0}^x \left(-\frac{Q_1}{P}\right)^{1/2} dt\right) (1 + o(1)), \\ v &= (-PQ_1)^{-1/4} \exp\left(-i \int_{x_0}^x \left(-\frac{Q_1}{P}\right)^{1/2} dt\right) (1 + o(1)) \end{aligned}$$

(см. [3; § 2.5, с. 69]). Поэтому

$$|u|^2 + |v|^2 \sim (-PQ_1)^{-1/2} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Следствие 2 доказано.

4. Примеры

4.1. Пусть $\phi(x)$, $\Phi(x)$ – вещественнозначные измеримые функции на $\mathbb{R}_+$ такие, что $\phi^2(x)$, $\Phi^2(x) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$. В выражениях l и s положим $p = 1$, $r = \phi(x)$, $q = -\phi^2(x)$ и $P = 1$, $R = \Phi(x)$, $Q = -\Phi^2(x)$. В рассматриваемом случае операторы L_0 и S_0 , порожденные выражениями l и s , можно трактовать как операторы, порожденные выражениями $-y'' + \phi'y$ и $-y'' + \Phi'y$ соответственно, где $\phi'(x)$, $\Phi'(x)$ – обобщенные производные, т.е. производные в смысле теории распределений.

В этой ситуации теорема 1 (см. замечание 1), теорема 2 и следствие 2 принимают следующий вид.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть функции $\phi(x)$ и $\Phi(x)$ такие, что при некотором $a > 0$

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_a^{+\infty} (\phi - \Phi)^2 w^2 < +\infty, \\ 2) \quad & \int_a^{+\infty} |\phi - \Phi| |w w'| < +\infty, \end{aligned}$$

где $w = u$ или $w = v$, u

$$3) \quad \int_a^{+\infty} |\phi - \Phi| |(uv)'| < +\infty.$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2'. Пусть функция $\Phi(x)$ имеет непрерывную производную третьего порядка, $\Phi'(x) < 0$ на $(a, +\infty)$ при некотором $a > 0$, и пусть выполнены условия

$$\int_a^{+\infty} \sqrt{-\Phi'} = +\infty \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} (-\Phi')^{-1/4} | [(-\Phi')^{-1/4}]'' | < +\infty. \quad (4.1)$$

Пусть далее, функции $\phi(x)$ и $\Phi(x)$ такие, что

$$\int_a^{+\infty} \frac{(\phi - \Phi)^2}{\sqrt{-\Phi'}} < +\infty \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} |\phi - \Phi| < +\infty. \quad (4.2)$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 2'. Пусть справедливы условия теоремы 2'. Тогда операторы S_0 и L_0 имеют индексы дефекта $(2, 2)$ в том и только том случае, когда

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{-\Phi'}} < +\infty. \quad (4.3)$$

4.2. Построим примеры реализации случая предельного круга для симметрических дифференциальных уравнений второго порядка. В ниже обсуждаемых примерах мы предполагаем, что функция $\phi'(x)$ имеет вид

$$\phi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k \delta(x - x_k), \quad (4.4)$$

где h_k – некоторые вещественные постоянные, $x_k \in \mathbb{R}_+$, $k = 0, 1, \dots$.

Пусть x_n , $n = 1, 2, \dots$, – возрастающая последовательность положительных чисел, $x_0 = 0$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$. Пусть далее $\Phi(x)$ – отрицательная, строго убывающая и трижды непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}_+$ такая, что $\Phi'(x)$ также строго убывает на $(a, +\infty)$ и удовлетворяет условию (4.3). Выберем произвольную точку $\nu_k \in [x_k, x_{k+1})$ и определим функцию $\phi(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, полагая

$$\phi(x) = \Phi(\nu_k) \quad \text{при} \quad x \in [x_k, x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots$$

Тогда распределение $\phi'(x)$, очевидно, имеет вид (4.4), где $h_k = \Phi(\nu_{k+1}) - \Phi(\nu_k)$. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены перечисленные выше условия и

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\Phi'(x_{k+1})|^2 (x_{k+1} - x_k)^2 < +\infty. \quad (4.5)$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x_{k+1} - x_k)^2 < +\infty \quad (4.6)$$

и функции $\phi(x)$, $\Phi(x)$ удовлетворяют условиям (4.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения леммы доказываются единообразно, поэтому ограничимся доказательством первого соотношения условия (4.2). Используя теорему о конечных разностях и свойства функции Φ , легко заметить, что при $x, \nu_k \in [x_k, x_{k+1}]$ выполняются неравенства

$$|\Phi(\nu_k) - \Phi(x)| \leq |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| = |\Phi'(\xi_k)|(x_{k+1} - x_k) \leq |\Phi'(x_{k+1})|(x_{k+1} - x_k),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{(\phi - \Phi)^2}{\sqrt{-\Phi'}} &\leq \sum_{k=k_0}^{+\infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(\Phi(\nu_k) - \Phi(x))^2}{\sqrt{-\Phi'(x)}} dx \\ &\leq \sum_{k=k_0}^{+\infty} (\Phi'(x_{k+1}))^2 (x_{k+1} - x_k)^2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{\sqrt{-\Phi'}} \\ &\leq c \sum_{k=k_0}^{+\infty} (\Phi'(x_{k+1}))^2 (x_{k+1} - x_k)^2 < \infty, \end{aligned}$$

где c – значение интеграла в неравенстве (4.3). Лемма 1 доказана.

Из следствия 2' и леммы 1 следует справедливость следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть функция $\Phi(x)$ удовлетворяет условиям (4.1), (4.3) и (4.5). Тогда оператор L_0 имеет индексы дефекта $(2, 2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из результатов работы [7] очевидным образом следует, что если $(a_n, b_n) \subset \mathbb{R}_+$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность непересекающихся интервалов таких, что $\phi'(x) = 0$ при $x \in (a_n, b_n)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)^2 = +\infty,$$

то, независимо от поведения функции $\phi(x)$ вне этих интервалов, оператор L_0 имеет индексы дефекта $(1, 1)$. В частности, это утверждение справедливо для оператора L_0 с потенциалом (4.4), если

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x_{k+1} - x_k)^2 = +\infty,$$

а h_k – произвольная последовательность вещественных чисел. Другое доказательство справедливости последнего утверждения приведено также в [8].

4.3. Приведем примеры последовательности чисел x_k и функций $\Phi(x)$, удовлетворяющие всем перечисленным в п. 4.2 условиям.

ПРИМЕР 1. Пусть $x_k = \alpha \ln k$, $k = 1, 2, \dots$, и $\Phi(x) = -x^\beta - 1$, где $\alpha > 0$ и $\beta > 3$.

ПРИМЕР 2. Пусть $x_k = \alpha \ln k$, $k = 1, 2, \dots$, и $\Phi(x) = -e^{\beta x}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha\beta < 1$.

Простые рассуждения показывают, что последовательность x_k и функции Φ в примерах 1 и 2 являются подходящими. Покажем, например, что в примере 1 ряд (4.5) сходится. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\Phi'(x_{k+1})|^2 (x_{k+1} - x_k)^2 = \beta^2 \alpha^{2\beta-1} \sum_{k=1}^{+\infty} (\ln(k+1))^{2\beta-2} \ln^2 \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

и последний ряд сходится, так как

$$(\ln(k+1))^{2\beta-2} \ln^2 \left(1 + \frac{1}{k}\right) \sim (\ln(k+1))^{2\beta-2} \frac{1}{k^2} \quad \text{при } k \rightarrow +\infty.$$

Автор благодарит К. А. Мирзоева за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями”, Тр. ММО, **64**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2003, 159–212.
- [2] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970.
- [3] M. S. P. Eastham, *The Asymptotic Solution of Linear Differential Systems. Applications of the Levinson Theorem*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **4**, Clarendon Press, Oxford, 1989.
- [4] H. Weyl, “Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen”, *Math. Ann.*, **68**:2 (1910), 220–269.
- [5] W. N. Everitt, A. Zettl, “Generalized symmetric ordinary differential expressions I: The general theory”, *Nieuw Arch. Wisk.* (3), **27**:3 (1979), 363–397.
- [6] W. N. Everitt, L. Marcus, *Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differential Operators*, Math. Surveys Monogr., **61**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [7] К. А. Мирзоев, “Функция Коши и $\mathcal{L}_w^p$ -свойства решений квазидифференциальных уравнений”, *УМН*, **46**:4 (1991), 161–162.
- [8] A. Kostenko, M. Malamud, *1-D Schrödinger Operators with Local Interactions on a Discrete Set*, 2009, arXiv: [math.SP/0908.3542v1](https://arxiv.org/abs/math.SP/0908.3542v1).

Н. Н. Конечная

Поморский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, г. Архангельск
E-mail: mermaid5979@yandex.ru

Поступило
25.11.2010