Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Брайчев, О. В. Шерстюкова, Наибольший возможный нижний тип целой функции порядка $\rho \in (0; 1)$ с нулями фиксированных ρ -плотностей, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 2, 199–215

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8766>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:41:10

Наибольший возможный нижний тип целой функции порядка $\rho \in (0; 1)$ с нулями фиксированных ρ -плотностей

Г. Г. Брайчев, О. В. Шерстюкова

В работе для значений $\rho \in (0, 1)$ найдена точная верхняя грань нижних ρ -типов целых функций, последовательность корней которых имеет заданные нижнюю и верхнюю плотности при порядке ρ .

Библиография: 8 названий.

Введение. В теории целых функций одно из центральных мест традиционно отводится изучению скорости роста функции в зависимости от характера распределения ее нулей на плоскости. Исследование этой глубокой связи приводит к постановкам экстремальных задач в классах целых функций с ограничениями на рост, решение которых имеет помимо внутреннего интереса важный прикладной аспект. Так оценки типа и нижнего типа целой функции в терминах плотностей распределения ее нулей имеют первостепенное значение в вопросах полноты систем экспонент и более общих функциональных систем, в задаче аналитического продолжения и других вопросах анализа.

Введем необходимые обозначения и перейдем к точным формулировкам. Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ – не имеющая конечных предельных точек неограниченная последовательность комплексных чисел, упорядоченная по возрастанию модулей, и $\rho > 0$. Пусть, далее, $n_{\Lambda}(t)$ – *считающая функция* последовательности Λ , определяемая как количество точек λ_n с учетом числа вхождений в Λ , попавших в круг $|z| \leq t$. Введем в рассмотрение *верхнюю* и *нижнюю плотности* последовательности Λ при порядке ρ (называемые в дальнейшем коротко ее ρ -плотностями):

$$\overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) := \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{n_{\Lambda}(t)}{t^{\rho}} \quad \text{и} \quad \underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) := \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{n_{\Lambda}(t)}{t^{\rho}}.$$

Тип ненулевой целой функции $f(z)$ при порядке ρ (коротко, ρ -тип) будем обозначать символом $\sigma_{\rho}(f)$. По определению этой величины

$$\sigma_{\rho}(f) = \overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |f(z)|.$$

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00225).

Соответствующий нижний предел называется *нижним ρ -типом* рассматриваемой функции и обозначается $\underline{\sigma}_\rho(f)$.

Следующие хорошо известные оценки снизу типа целой функции с корнями $(\lambda_n)_{n=1}^\infty = \Lambda_f =: \Lambda$ через их ρ -плотности фактически содержатся в [1]:

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\rho e} \quad \text{и} \quad \sigma_\rho(f) \geq \frac{\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\rho}.$$

Точная оценка сверху аналогичного характера имеет весьма громоздкий вид (см., например, [2]), и потому вряд ли разумно приводить ее во введении. В случае $\rho \in (0; 1)$ для $\Lambda \in \mathbb{C}$ и $\Lambda \in \mathbb{R}_+$ справедливы следующие точные оценки типов:

$$\sigma_\rho(f) \leq \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \quad \text{и} \quad \underline{\sigma}_\rho(f) \geq \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \underline{\Delta}_\rho(\Lambda).$$

Одновременный учет обеих ρ -плотностей приводит в общем случае к оценке (также точной), приведенной в [3; с. 16],

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\rho} \exp \left\{ \frac{\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)} - 1 \right\}.$$

Следует отметить, что оценкам нижнего типа целой функции уделялось гораздо меньше внимания. Комбинируя результаты работ [4] и [5; с. 110], при $\rho \in (0; 1)$ и $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ можно получить

$$\underline{\sigma}_\rho(f) \leq \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) + \frac{\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\rho} \ln \frac{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)} - \left(\frac{1}{\rho} - B(\rho) \right) (\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) - \underline{\Delta}_\rho(\Lambda)),$$

где

$$B(\rho) = \int_0^1 \frac{x^\rho}{1+x} dx.$$

Это неравенство важно для нас потому, что указывает на принципиальную возможность оценки сверху нижнего ρ -типа целой функции через нижнюю и верхнюю ρ -плотности ее корней. Получение наилучшей возможной оценки такого рода – главная задача этой работы. Сразу же укажем, что подобная оценка сверху нижнего ρ -типа только через нижнюю ρ -плотность корней невозможна, как это показывает теорема 5 нашей статьи. Без проведенного в работе исследования этот факт было трудно предвидеть. Он указывает на существенное отличие нашего случая от ситуации с оценкой снизу только через верхнюю ρ -плотность типа целой функции при порядке $\rho \in (0; 1)$ с положительными нулями. Именно, в статье [6] Попов решил следующую важную экстремальную проблему. Для положительных последовательностей $\Lambda = (\lambda_n)$ и фиксированного числа $\beta > 0$ требуется найти величину

$$s(\beta, \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(L_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta \},$$

где

$$L_\Lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n} \right).$$

ТЕОРЕМА А. При любых $\rho \in (0; 1)$ и $\beta > 0$ справедливо равенство

$$s(\beta, \rho) = \beta C(\rho),$$

в котором $C(\rho) = \max_{a>0} a^{-\rho} \ln(1+a)$. Нижняя грань $s(\beta, \rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности положительных чисел.

Совсем недавно в совместной работе Брайчева и Шерстюкова [7] была решена более сложная экстремальная задача, также поставленная Поповым. Конкретнее говоря, для фиксированных чисел $\rho \in (0; 1)$, α и β , $0 \leq \alpha \leq \beta < +\infty$, найдена величина

$$s(\alpha, \beta, \rho) := \inf \{ \sigma_\rho(L_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta \}.$$

ТЕОРЕМА В. Для произвольного $\rho \in (0; 1)$ и любых чисел $\alpha \geq 0$ и $\beta > 0$, $\alpha \leq \beta$, справедливо равенство

$$s(\alpha, \beta, \rho) = \beta \left(\frac{\pi k}{\sin \pi \rho} + \max_{a>0} \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right),$$

где $k = \alpha/\beta$. Нижняя грань $s(\alpha, \beta, \rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности $\hat{\Lambda} \subset \mathbb{R}_+$, у которой $\underline{\Delta}_\rho(\hat{\Lambda}) = \alpha$ и $\overline{\Delta}_\rho(\hat{\Lambda}) = \beta$.

Как показано в работе [7], аргументы нулей рассматриваемых целых функций влияют на величину их наименьшего возможного типа при различных $\rho \in (0; 1)$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda)$, $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)$. В контрасте с этим теорема 1 утверждает, что при таких значениях ρ наибольшая возможная величина нижнего ρ -типа целой функции с заданными верхней и нижней ρ -плотностями ее корней не зависит от того, находятся все нули на одном луче или распределены произвольно в комплексной плоскости.

Для формулировки этой теоремы мы обозначим, как и выше, через $\Lambda = \Lambda_f$ нулевое множество целой функции f порядка ρ и положим

$$\underline{s}_{\mathbb{R}_+}(\alpha, \beta, \rho) := \sup \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda = \Lambda_f \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \leq \beta \},$$

$$\underline{s}_{\mathbb{C}}(\alpha, \beta, \rho) := \sup \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda = \Lambda_f \subset \mathbb{C}, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \leq \beta \}.$$

ТЕОРЕМА 1. Для целых функций $f(z)$ порядка $\rho \in (0; 1)$, все нули которых образуют последовательности $\Lambda_f = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$, справедливо равенство

$$\underline{s}_{\mathbb{R}_+}(\alpha, \beta, \rho) = \underline{s}_{\mathbb{C}}(\alpha, \beta, \rho).$$

Таким образом, теорема 1 сводит нахождение наибольшей возможной величины нижнего ρ -типа целой функции порядка меньше единицы по верхней и нижней ρ -плотностям ее корней, распределенных в остальном произвольно, к случаю расположения их на одном луче. Тем самым, допустимо в дальнейшем использовать для краткости обозначение $\underline{s}(\alpha, \beta, \rho)$, имея в виду совпадающие друг с другом при $\rho \in (0; 1)$ величины $\underline{s}_{\mathbb{R}_+}(\alpha, \beta, \rho)$ и $\underline{s}_{\mathbb{C}}(\alpha, \beta, \rho)$.

В настоящей статье методом, разработанным в [7], экстремальная задача нахождения точной верхней грани $\underline{s}(\alpha, \beta, \rho)$ полностью решена. Основной результат работы дает

ТЕОРЕМА 2. Для произвольного $\rho \in (0; 1)$ и любых чисел $\alpha \geq 0$ и $\beta > 0$, $\alpha \leq \beta$, справедливо равенство

$$\underline{s}(\alpha, \beta, \rho) = \beta \left(\frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \sup_{a > 0} \int_a^{ak^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - ka^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right), \quad (1)$$

где обозначено $k = \alpha/\beta$. Верхняя грань $\underline{s}(\alpha, \beta, \rho)$ достигается на некоторой возрастающей последовательности $\tilde{\Lambda}$, у которой $\underline{\Delta}_\rho(\tilde{\Lambda}) = \alpha$ и $\overline{\Delta}_\rho(\tilde{\Lambda}) = \beta$.

В сжатой форме доказательство теоремы 2 приведено в [8]. Ниже мы даем развернутое изложение как доказательства основного результата, так и ряда важных дополнительных утверждений (теоремы 1–5).

Заметим, что при $\alpha = 0$ вычисление несобственного интеграла в (1) дает для любого $\beta > 0$

$$\underline{s}(0, \beta, \rho) = 0,$$

а при $\alpha = \beta > 0$ равенство (1) превращается в известный результат о вычислении типа функции с измеримой последовательностью положительных нулей:

$$\underline{s}(\beta, \beta, \rho) = \frac{\pi \beta}{\sin \pi \rho}.$$

Лишь в первой из рассмотренных крайних ситуаций равенство (1) нуждается в доказательстве. Прделав его, удобно в дальнейшем считать ввиду очевидного соотношения

$$\underline{s}(\alpha, \beta, \rho) = \beta \underline{s}\left(\frac{\alpha}{\beta}, 1, \rho\right),$$

что $\beta = 1$, $\alpha = k \in (0; 1)$, и находить величину $\underline{s}(k, 1, \rho)$. Для сокращения записи введем также обозначение

$$\underline{C}(k, \rho) := \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \max_{a > 0} \int_a^{ak^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - ka^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau.$$

Определение этой функции корректно. Действительно, при $k \in (0; 1)$ максимум достигается, поскольку функция

$$g(a) := \int_a^{ak^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - ka^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau$$

непрерывна при $a > 0$ и стремится к нулю, когда a стремиться к нулю, и бесконечности.

Поскольку функция $\underline{C}(k, \rho)$ не является, вообще говоря, элементарной, в теоремах 3 и 4 нами приводятся оценки $\underline{C}(k, \rho)$ через элементарные функции переменных k и ρ .

В заключительной части статьи доказывается

ТЕОРЕМА 5. При фиксированных $\rho \in (0; 1)$ и $\alpha > 0$ выполняется равенство

$$\sup_{\beta \geq \alpha} \underline{s}(\alpha, \beta, \rho) = +\infty.$$

Качественная сторона этого результата отражает невозможность получения оценки сверху нижнего ρ -типа целой функции только через нижнюю ρ -плотность ее нулей.

Переходя к доказательствам анонсированных утверждений, укажем, что теорема 2 – плод совместного исследования авторов, а остальные результаты принадлежат Шерстюковой.

1. Доказательство теоремы 1. Пусть $\rho \in (0; 1)$ и последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет конечную верхнюю ρ -плотность. Каждая целая функция $f(z)$ порядка ρ , нулевое множество которой совпадает с $\Lambda = \Lambda_f \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, будет иметь конечный ρ -тип (значит, и нижний ρ -тип) и представляться бесконечным произведением

$$L_{\Lambda}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right).$$

Обозначив

$$|\Lambda| = (|\lambda_n|)_{n=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad L_{|\Lambda|}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{|\lambda_n|}\right),$$

можем написать

$$\begin{aligned} \max_{|z|=R} |L_{\Lambda}(z)| &= \max_{|z|=R} \prod_{n=1}^{\infty} \left|1 - \frac{z}{\lambda_n}\right| \leq \max_{|z|=R} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{|z|}{|\lambda_n|}\right) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{R}{|\lambda_n|}\right) = \max_{|z|=R} |L_{|\Lambda|}(z)|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\underline{\sigma}_{\rho}(L_{\Lambda}) = \varliminf_{R \rightarrow +\infty} R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |L_{\Lambda}(z)| \leq \varliminf_{R \rightarrow +\infty} R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |L_{|\Lambda|}(z)| = \underline{\sigma}_{\rho}(L_{|\Lambda|}),$$

причем

$$|\Lambda| \subset \mathbb{R}_+, \quad \underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) = \underline{\Delta}_{\rho}(|\Lambda|), \quad \overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) = \overline{\Delta}_{\rho}(|\Lambda|).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \underline{s}_{\mathbb{C}}(\alpha, \beta, \rho) &= \sup\{\underline{\sigma}_{\rho}(L_{\Lambda}) : \underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) = \alpha, \overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) \leq \beta\} \\ &\leq \underline{s}_{\mathbb{R}_+}(\alpha, \beta, \rho) = \sup\{\underline{\sigma}_{\rho}(L_{\Lambda}) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) = \alpha, \overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) \leq \beta\}. \end{aligned}$$

Но, очевидно, $\underline{s}_{\mathbb{R}_+}(\alpha, \beta, \rho) \leq \underline{s}_{\mathbb{C}}(\alpha, \beta, \rho)$, так как множество функций, по которому берется $\sup$ в определении $\underline{s}_{\mathbb{C}}(\alpha, \beta, \rho)$, шире множества функций в определении $\underline{s}_{\mathbb{R}_+}(\alpha, \beta, \rho)$. Указанное обстоятельство позволяет завершить доказательство теоремы 1.

2. Доказательство теоремы 2. Поскольку ситуация с $k = 1$ ясна, для доказательства теоремы нужно при всех $\rho \in (0; 1)$ разобрать случай $k = 0$, а затем установить равенство $\underline{s}(k, 1, \rho) = \underline{C}(k, \rho)$, в котором $k \in (0; 1)$. Отметим, что случай $k = 0$ до определенного момента полностью укладывается в предлагаемую ниже схему рассуждений.

Будем отталкиваться от полученного в [4] представления

$$R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |L_{\Lambda}(z)| = \int_0^{\infty} \varphi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt, \quad (2)$$

где $\varphi_R(t) = n_{\Lambda}(Rt)/(Rt)^{\rho}$. Пусть теперь зафиксированы произвольно числа $a > 0$ и $q > 1$. Найдем из определения верхней ρ -плотности Λ число $c > 0$ так, чтобы при каждом $R \geq ac$ для всех $t \geq c/R$ выполнялось неравенство $\varphi_R(t) < q$. Полагая

$$\xi = \xi(R) = \varphi_R(1/a) = \frac{n_{\Lambda}(R/a)}{(R/a)^{\rho}},$$

в частности, имеем $\xi < q$. По условию

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \xi(R) \leq 1, \quad \underline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \xi(R) = k.$$

Ясно, что $n_{\Lambda}(Rt) \leq n_{\Lambda}(R/a)$ при $0 \leq t \leq 1/a$. Отсюда при $R > 0$ и $t \leq 1/a$ получаем

$$\varphi_R(t) = \frac{n_{\Lambda}(Rt)}{(Rt)^{\rho}} \leq \frac{n_{\Lambda}(R/a)}{(Rt)^{\rho}} = \frac{n_{\Lambda}(R/a)}{(R/a)^{\rho}} \frac{1}{(at)^{\rho}} = \frac{\xi}{(at)^{\rho}}.$$

Таким образом, вводя в рассмотрение функцию

$$\psi_R(t) = \begin{cases} q & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{a} \left(\frac{\xi}{q} \right)^{1/\rho}, \\ \frac{\xi}{(at)^{\rho}} & \text{при } \frac{1}{a} \left(\frac{\xi}{q} \right)^{1/\rho} < t < \frac{1}{a}, \\ q & \text{при } t \geq \frac{1}{a}, \end{cases}$$

можем утверждать, что при каждом $R \geq ac$ и любых $t \geq c/R$ справедливо неравенство

$$\varphi_R(t) \leq \psi_R(t). \quad (3)$$

Из (2) и (3) заключаем, что при фиксированном $R \geq ac$ имеет место оценка

$$R^{-\rho} \ln \max_{|z|=R} |L_{\Lambda}(z)| \leq \int_0^{c/R} \varphi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + \int_{c/R}^{\infty} \psi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt. \quad (4)$$

Проведем преобразования второго интеграла, стоящего в правой части (4):

$$\begin{aligned} & \int_{c/R}^{\infty} \psi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ &= q \int_{c/R}^{a^{-1}(\xi/q)^{1/\rho}} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + \xi a^{-\rho} \int_{a^{-1}(\xi/q)^{1/\rho}}^{a^{-1}} \frac{dt}{t(1+t)} + q \int_{a^{-1}}^{\infty} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ &= q \left(\int_{c/R}^{\infty} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt - \int_{a^{-1}(\xi/q)^{1/\rho}}^{a^{-1}} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \right) + \xi a^{-\rho} \int_{a^{-1}(\xi/q)^{1/\rho}}^{a^{-1}} \frac{dt}{t(1+t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= q \left(\frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \int_0^{c/R} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \right) + \int_{a^{-1}(\xi/q)^{1/\rho}}^{a^{-1}} \frac{\xi a^{-\rho} - q t^{\rho}}{t(1+t)} dt \\
 &= q \left(\frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \int_0^{c/R} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \right) + \int_a^{a(q/\xi)^{1/\rho}} \frac{\xi a^{-\rho} - q \tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau.
 \end{aligned}$$

Выбирая последовательность $R_j \rightarrow \infty$, для которой $\lim_{j \rightarrow \infty} \xi(R_j) = k$, из (4) выведем следующие оценки: для $k = 0$

$$\underline{\sigma}_\rho(L_\Lambda) \leq \frac{\pi q}{\sin \pi \rho} - q \int_a^{+\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau = q \int_0^a \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau, \quad (5)$$

а для $k \in (0; 1)$

$$\begin{aligned}
 \underline{\sigma}_\rho(L_\Lambda) &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{c/R_j}^\infty \psi_{R_j}(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt = \frac{\pi q}{\sin \pi \rho} + \int_a^{a(q/k)^{1/\rho}} \frac{k a^{-\rho} - q \tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau \\
 &= \frac{\pi q}{\sin \pi \rho} - \int_a^{a(q/k)^{1/\rho}} \frac{q \tau^{-\rho} - k a^{-\rho}}{1+\tau} d\tau.
 \end{aligned} \quad (6)$$

В первом случае, т.е. при $k = 0$, из оценки (5) следует неравенство

$$\underline{\sigma}_\rho(L_\Lambda) \leq q \int_0^a \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau \leq q \int_0^a \tau^{-\rho} d\tau = \frac{q a^{1-\rho}}{1-\rho}.$$

Отсюда в силу возможности выбора $a > 0$ сколь угодно малым вытекает, что $\underline{\sigma}_\rho(L_\Lambda) \leq 0$. Во втором случае, когда $k \in (0; 1)$, из (6), пользуясь произволом в выборе $a > 0$ и $q > 1$, получаем оценку

$$\underline{\sigma}_\rho(L_\Lambda) \leq \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \max_{a>0} \int_a^{a k^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - k a^{-\rho}}{1+\tau} d\tau = \underline{C}(k, \rho).$$

Таким образом, любая целая функция порядка $\rho \in (0; 1)$ с нулевой нижней ρ -плотностью корней имеет нижний ρ -тип, равный нулю. Поэтому и верхняя грань $\underline{s}(0, 1, \rho) = 0$.

При $k \in (0; 1)$ выше обоснована пока лишь справедливость неравенства $\underline{s}(k, 1, \rho) \leq \underline{C}(k, \rho)$, и чтобы завершить доказательство теоремы, требуется построить при любых $\rho \in (0; 1)$ и $k \in (0; 1)$ последовательность $\tilde{\Lambda} \subset \mathbb{R}_+$ с характеристиками $\underline{\Delta}_\rho(\tilde{\Lambda}) = k$, $\overline{\Delta}_\rho(\tilde{\Lambda}) = 1$, для которой $\underline{\sigma}_\rho(L_{\tilde{\Lambda}})$ совпадает с величиной

$$\underline{C}(k, \rho) = \int_0^{+\infty} \psi_0(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt.$$

Здесь под знаком интеграла стоит функция

$$\psi_0(t) := \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{a_0} k^{1/\rho}, \\ \frac{k}{(a_0 t)^\rho} & \text{при } \frac{1}{a_0} k^{1/\rho} < t < \frac{1}{a_0}, \\ 1 & \text{при } t \geq \frac{1}{a_0}; \end{cases} \quad (7)$$

$a_0 = a_0(k, \rho)$ – точка максимума на луче $a > 0$ определенной во введении функции

$$g_{k,\rho}(a) = g(a) = \int_a^{ak^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - ka^{-\rho}}{1 + \tau} d\tau.$$

Последовательность $\tilde{\Lambda} = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ строится по следующему правилу. Вначале зададим вспомогательную последовательность $(m_n)_{n=1}^\infty$ соотношением $m_{n+1} = m_n^4$, $n \in \mathbb{N}$, где положительное число m_1 выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $km_1^{2\rho} - m_1^\rho > 1$. Стремление к упрощению записи подсказывает обозначение $\Omega = (\lambda_n^\rho)_{n=1}^\infty$. Полагаем при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$\Omega \cap [m_n^\rho; km_n^{2\rho}] = \{m_n^\rho + \nu : \nu \in \mathbb{N}, \nu \leq km_n^{2\rho} - m_n^\rho\},$$

$$\Omega \cap (km_n^{2\rho}; m_n^{2\rho}) = \emptyset,$$

$$\begin{aligned} \Omega \cap [m_n^{2\rho}; (m_n^\rho + 1)^\rho] \\ = \left\{ m_n^{2\rho} + \nu \frac{\rho}{(1-k)m_n^2} : \nu \in \mathbb{N}, \nu \leq ((m_n^\rho + 1)^\rho - m_n^{2\rho})\rho^{-1}(1-k)m_n^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\Omega \cap [(m_n^\rho + 1)^\rho; m_{n+1}^\rho] = \{m_n^{2\rho} + 1 + \nu : \nu \in \mathbb{N}, \nu \leq m_{n+1}^\rho - (m_n^\rho + 1)^\rho\}.$$

Таким образом, на отрезках $[m_n; k^{1/\rho}m_n^2]$ точки λ_j последовательности $\tilde{\Lambda}$ выбираются так, чтобы λ_j^ρ образовывали арифметическую прогрессию с разностью 1. На интервалах $(k^{1/\rho}m_n^2; m_n^2)$ точки λ_j отсутствуют. Далее, на полуинтервалах $[m_n^2; m_n^2 + 1)$ точки λ_j таковы, что λ_j^ρ есть арифметическая прогрессия с разностью $\rho/((1-k)m_n^2)$. Наконец, для λ_j , помещенных на отрезки вида $[m_n^2 + 1; m_{n+1}]$, точки λ_j^ρ образуют арифметическую прогрессию с разностью 1.

Из определения последовательности Ω вытекает равенство $n_{\tilde{\Lambda}}(r) = n_\Omega(r^\rho)$, которое позволяет упростить дальнейшие вычисления. Для начала выведем асимптотику величины $n_\Omega(m_n^\rho)$, используя легко проверяемое соотношение

$$(m_n^\rho + 1)^\rho - m_n^{2\rho} = \rho m_n^{2\rho-2} + O(m_n^{2\rho-4}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Имеем при всех $n \in \mathbb{N}$ цепочку равенств

$$\begin{aligned} n_\Omega(m_{n+1}^\rho) - n_\Omega(m_n^\rho) \\ = km_n^{2\rho} - m_n^\rho + [(m_n^\rho + 1)^\rho - m_n^{2\rho}]\rho^{-1}(1-k)m_n^2 + m_{n+1}^\rho - (m_n^\rho + 1)^\rho + O(1) \\ = km_n^{2\rho} - m_n^\rho + [\rho m_n^{2\rho-2} + O(m_n^{2\rho-4})]\rho^{-1}(1-k)m_n^2 \\ + m_{n+1}^\rho - m_n^{2\rho} + O(m_n^{2\rho-2}) + O(1) \\ = m_{n+1}^\rho - m_n^\rho + O(1). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} n_\Omega(m_n^\rho) &= n_\Omega(m_{n-1}^\rho) + (m_n^\rho - m_{n-1}^\rho) + O(1) \\ &= n_\Omega(m_{n-2}^\rho) + (m_{n-1}^\rho - m_{n-2}^\rho) + (m_n^\rho - m_{n-1}^\rho) + 2O(1) = \dots \\ &= m_n^\rho - m_1^\rho + (n-1)O(1) = m_n^\rho + O(m_n^{\rho/2}). \end{aligned}$$

Таким образом, установлено, что

$$n_{\Omega}(m_n^{\rho}) = m_n^{\rho} + O(m_n^{\rho/2}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Опираясь на соотношение (8), выпишем выражения для считающей функции последовательности Ω на различных участках положительной полуоси.

Если $r \in [m_n^{\rho}; km_n^{2\rho}]$, то

$$n_{\Omega}(r) = n_{\Omega}(m_n^{\rho}) + r - m_n^{\rho} + O(1) = r + O(m_n^{\rho/2}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Если $r \in (km_n^{2\rho}; m_n^{2\rho})$, то

$$n_{\Omega}(r) = n_{\Omega}(km_n^{2\rho}) = km_n^{2\rho} + O(m_n^{\rho/2}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Если $r \in [m_n^{2\rho}; (m_n^2 + 1)^{\rho}]$, то

$$\begin{aligned} n_{\Omega}(r) &= n_{\Omega}(m_n^{2\rho}) + (r - m_n^{2\rho})\rho^{-1}(1 - k)m_n^2 + O(1) \\ &= km_n^{2\rho} + (r - m_n^{2\rho})\rho^{-1}(1 - k)m_n^2 + O(m_n^{\rho/2}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Если $r \in [(m_n^2 + 1)^{\rho}; m_{n+1}^{\rho}]$, то

$$\begin{aligned} n_{\Omega}(r) &= n_{\Omega}((m_n^2 + 1)^{\rho}) + r - (m_n^2 + 1)^{\rho} + O(1) \\ &= km_n^{2\rho} + ((m_n^2 + 1)^{\rho} - m_n^{2\rho})\rho^{-1}(1 - k)m_n^2 + r - (m_n^2 + 1)^{\rho} + O(m_n^{\rho/2}) \\ &= r + O(m_n^{\rho/2}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Собирая воедино полученную информацию, запишем

$$\frac{n_{\Omega}(r)}{r} = \begin{cases} 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) & \text{при } r \in [m_n^{\rho}; km_n^{2\rho}], \\ \frac{km_n^{2\rho}}{r} + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), & \text{при } r \in (km_n^{2\rho}; m_n^{2\rho}), \\ \rho^{-1}(1 - k)m_n^2 + r^{-1}m_n^{2\rho}(k - m_n^2\rho^{-1}(1 - k)) \\ + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) & \text{при } r \in [m_n^{2\rho}; (m_n^2 + 1)^{\rho}], \\ 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) & \text{при } r \in [(m_n^2 + 1)^{\rho}; m_{n+1}^{\rho}]. \end{cases} \quad (9)$$

Из представления (9) легко получить, что

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_{\rho}(\tilde{\Lambda}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n_{\tilde{\Lambda}}(x)}{x^{\rho}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n_{\Omega}(x^{\rho})}{x^{\rho}} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_{\Omega}(r)}{r} = k, \\ \overline{\Delta}_{\rho}(\tilde{\Lambda}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n_{\tilde{\Lambda}}(x)}{x^{\rho}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n_{\Omega}(x^{\rho})}{x^{\rho}} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_{\Omega}(r)}{r} = 1, \end{aligned}$$

а после замены $r = (Rt)^\rho$ также получить при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_R(t) = \frac{n_{\bar{\Lambda}}(Rt)}{(Rt)^\rho} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{t^{\rho/2}} O\left(\frac{1}{R^{\rho/2}}\right) & \text{при } t \in \left[\frac{m_n}{R}; \frac{k^{1/\rho} m_n^2}{R}\right], \\ \frac{k}{t^\rho} \left(\frac{m_n^2}{R}\right)^\rho + \frac{1}{t^{\rho/2}} O\left(\frac{1}{R^{\rho/2}}\right) & \text{при } t \in \left(\frac{k^{1/\rho} m_n^2}{R}; \frac{m_n^2}{R}\right), \\ \rho^{-1}(1-k)m_n^2 + \frac{1}{t^\rho} \left(\frac{m_n^2}{R}\right)^\rho (k - m_n^2 \rho^{-1}(1-k)) \\ + \frac{1}{t^{\rho/2}} O\left(\frac{1}{R^{\rho/2}}\right) & \text{при } t \in \left[\frac{m_n^2}{R}; \frac{m_n^2 + 1}{R}\right), \\ 1 + \frac{1}{t^{\rho/2}} O\left(\frac{1}{R^{\rho/2}}\right), & \text{при } t \in \left[\frac{m_n^2 + 1}{R}; \frac{m_n^4}{R}\right]. \end{cases}$$

Для удобства изложения введем функцию

$$\Phi_R(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in \left[\frac{m_n}{R}; \frac{k^{1/\rho} m_n^2}{R}\right], \\ \frac{k}{t^\rho} \left(\frac{m_n^2}{R}\right)^\rho & \text{при } t \in \left(\frac{k^{1/\rho} m_n^2}{R}; \frac{m_n^2}{R}\right), \\ \rho^{-1}(1-k)m_n^2 + \frac{1}{t^\rho} \left(\frac{m_n^2}{R}\right)^\rho \left(k - m_n^2 \rho^{-1}(1-k)\right) & \text{при } t \in \left[\frac{m_n^2}{R}; \frac{m_n^2 + 1}{R}\right), \\ 1 & \text{при } t \in \left[\frac{m_n^2 + 1}{R}; \frac{m_n^4}{R}\right], \end{cases}$$

где $n = 1, 2, \dots$, позволяющую записать

$$\varphi_R(t) = \Phi_R(t) + \frac{1}{t^{\rho/2}} O\left(\frac{1}{R^{\rho/2}}\right), \quad t \in \left[\frac{m_1}{R}; +\infty\right).$$

Выберем последовательность $R_n = a_0 m_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, зависящую от k и ρ через величину a_0 из определения (7), и запишем представление

$$\sigma_\rho(L_{\bar{\Lambda}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{R \in [R_n, R_{n+1}]} \int_0^{+\infty} \varphi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt.$$

Оценивая интеграл снизу, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \varphi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt &= \int_0^{m_n/R} \varphi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + \int_{m_n/R}^{+\infty} \varphi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ &\geq \int_{m_n/R}^{+\infty} \varphi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ &= \int_{m_n/R}^{+\infty} \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + O\left(\frac{1}{R^{\rho/2}}\right) \int_{m_n/R}^{+\infty} \frac{t^{\rho/2-1}}{1+t} dt \\ &= \int_{m_n/R}^{+\infty} \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + O\left(\frac{1}{R_n^{\rho/2}}\right), \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \int_{m_n/R}^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\rho/2}(1+t)} &\leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\rho/2}(1+t)} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\rho/2}(1+t)} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-\rho/2}(1+t)} \\ &\leq \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\rho/2}} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\rho/2}} = \frac{2}{\rho} + \frac{2}{2-\rho} = \frac{4}{\rho(2-\rho)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sigma_\rho(L_{\tilde{\Lambda}}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{R \in [R_n, R_{n+1}]} \int_{m_n/R}^{+\infty} \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt.$$

Достаточно точная оценка снизу последнего интеграла требует рассмотрения различных случаев.

Если $R \in [a_0 m_n^2; m_n^7]$, то

$$\begin{aligned} &\int_{m_n/R}^{+\infty} \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^{m_n/R} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + \int_{m_n/R}^{+\infty} \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt - \int_0^{m_n/R} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^{m_n/R} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + \int_{m_n/R}^{k^{1/\rho} \frac{m_{n+1}^2}{R}} \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + \int_{k^{1/\rho} \frac{m_{n+1}^2}{R}}^{+\infty} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ &\quad + \int_{k^{1/\rho} \frac{m_{n+1}^2}{R}}^{+\infty} (\Phi_R(t) - 1) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt - \int_0^{m_n/R} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ &\geq \int_0^{+\infty} \psi_0(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + o(1) - \int_{k^{1/\rho} \frac{m_{n+1}^2}{R}}^{+\infty} (1 - \Phi_R(t)) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt - \int_0^{m_n/R} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \psi_0(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + o(1). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали оценки

$$\begin{aligned} \int_{k^{1/\rho} \frac{m_{n+1}^2}{R}}^{+\infty} (1 - \Phi_R(t)) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt &\leq \int_{k^{1/\rho} \frac{m_n^8}{m_n^7}}^{+\infty} (1 - \Phi_R(t)) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\ &= \int_{k^{1/\rho} m_n}^{+\infty} (1 - \Phi_R(t)) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \leq (1-k) \int_{k^{1/\rho} m_n}^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\rho}} \\ &= \frac{1-k}{(1-\rho)k^{1/\rho-1} m_n^{1-\rho}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \\ \int_0^{m_n/R} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt &\leq \int_0^{m_n/(a_0 m_n^2)} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \leq \int_0^{1/(a_0 m_n)} \frac{1}{t^{1-\rho}} dt \\ &= \frac{1}{(a_0 m_n)^\rho \rho} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Если $R \in [m_n^7; a_0 m_n^8]$, то, привлекая аналогичные оценки, получим

$$\begin{aligned}
 & \int_{m_n/R}^{+\infty} \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\
 &= \int_{m_n/R}^{m_n^4/R} \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + \int_{m_n^4/R}^{+\infty} \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\
 &= \int_{m_n/R}^{m_n^4/R} \Phi_R(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + \int_0^{m_n^4/R} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + \int_{m_n^4/R}^{k^{1/\rho} m_{n+2}^2/R} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\
 &\quad + \int_{k^{1/\rho} m_{n+2}^2/R}^{+\infty} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt - \int_0^{m_n^4/R} \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + \int_{k^{1/\rho} m_{n+2}^2/R}^{+\infty} (\Phi_R(t) - 1) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \\
 &\geq \int_0^{+\infty} \psi_0(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt + o(1).
 \end{aligned}$$

Итак,

$$\underline{\sigma}_\rho(L_{\tilde{\Lambda}}) \geq \int_0^{+\infty} \psi_0(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt = \underline{C}(k, \rho).$$

Поскольку ранее было доказано, что для всех последовательностей с заданными выше характеристиками, а следовательно, и для последовательности $\tilde{\Lambda}$ выполнено

$$\underline{\sigma}_\rho(L_{\tilde{\Lambda}}) \leq \underline{C}(k, \rho),$$

то

$$\underline{\sigma}_\rho(L_{\tilde{\Lambda}}) = \underline{C}(k, \rho),$$

что доказывает теорему 2.

3. Свойства функции $\underline{C}(k, \rho)$. В этом пункте мы продолжаем изучение целых функций $f(z)$ порядка $\rho \in (0; 1)$ с нулями Λ , распределенными так, что

$$\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \alpha, \quad \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta > 0.$$

Заметим, что нижний тип $\underline{\sigma}_\rho(f)$ такой функции примет свое наибольшее значение, равное $\pi\beta/\sin \pi\rho$, если последовательность ее корней окажется положительной и измеримой, т.е. α и β зафиксированы равными ($k = 1$). Формула (1), доказанная в теореме 2, говорит, помимо прочего, и о том, что указанное наибольшее значение нижнего типа не может достигаться для целых функций с неизмеримой последовательностью корней. Действительно, для функций $f(z)$ с $k = \alpha/\beta < 1$ из (1) следует, что

$$\underline{\sigma}_\rho(f) \leq \underline{s}(\alpha, \beta, \rho) < \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho}.$$

Чтобы понять, насколько сильно неизмеримость последовательности корней целой функции (т.е. отличие $k = \alpha/\beta$ от единицы) влияет на величину ее нижнего типа, требуется дать простые двусторонние оценки неэлементарной функции $\underline{C}(k, \rho)$, наглядно характеризующие степень этого влияния. Необходимую информацию, содержащую упомянутые оценки, предоставляют теоремы 3 и 4. Без такого дополнения к основной теореме 2 исследование поставленной в работе задачи выглядело бы незавершенным. Кроме того, найденная нами оценка снизу экстремальной величины

нижнего типа позволяет привести короткое доказательство качественного результата, помещенного в теорему 5.

Начнем со следующего простого факта.

ТЕОРЕМА 3. *При каждом фиксированном $\rho \in (0; 1)$ функция $\underline{C}(k, \rho)$ вогнута по переменной k на отрезке $[0; 1]$, причем выполняются неравенства*

$$\frac{\pi k}{\sin \pi \rho} \leq \underline{C}(k, \rho) \leq \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \frac{(k-1)^2}{2} \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right)^{1-\rho}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде чем приступить к доказательству этого утверждения, проясним некоторые простые детали. Функция $\underline{C}(k, \rho)$ по первой переменной определялась на $(0; 1]$. Доопределяя ее по непрерывности, естественно считать, что $\underline{C}(0, \rho) \equiv 0$. Разумеется, того же можно добиться, заменив в определении $\underline{C}(k, \rho)$ $\max$ на $\sup$.

При фиксированных $\rho \in (0; 1)$ и $a > 0$ функция

$$\varphi_{a,\rho}(k) = \varphi(k) = \int_a^{ak^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - ka^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau$$

выпукла на $[0; 1]$, так как при всех $k \in (0; 1]$

$$\varphi'(k) = -a^{-\rho} \ln \frac{1 + ak^{-1/\rho}}{1 + a}, \quad \varphi''(k) = \frac{a^{1-\rho}}{\rho k^{1+1/\rho} (1 + ak^{-1/\rho})} > 0.$$

Отсюда получаем выпуклость функции

$$\max_{a>0} \int_a^{ak^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - ka^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau$$

по аргументу k на $[0; 1]$. Следовательно, при фиксированном $\rho \in (0; 1)$

$$\underline{C}(k, \rho) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \max_{a>0} \int_a^{ak^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - ka^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau$$

есть вогнутая функция переменной $k \in [0; 1]$. Из вогнутости $\underline{C}(k, \rho)$ при каждом $\rho \in (0; 1)$ сразу вытекает оценка снизу через линейную (по k) функцию, принимающую вместе с $\underline{C}(k, \rho)$ при $k = 0$ и $k = 1$ значения 0 и $\pi / \sin \pi \rho$ соответственно:

$$\underline{C}(k, \rho) \geq \frac{\pi k}{\sin \pi \rho}.$$

Для доказательства оценки сверху в (10) снова рассмотрим, зафиксировав a и ρ , функцию

$$\varphi(k) = \int_a^{ak^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - ka^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau.$$

Вычислив

$$\varphi'''(k) = \frac{a^{1-\rho}}{\rho} \left(\frac{k^{-1}}{a + k^{1/\rho}} \right)' = -\frac{a^{1-\rho} k^{1/\rho-2}}{[\rho(a + k^{1/\rho})]^2} (\rho a k^{-1/\rho} + 1 + \rho) < 0,$$

видим, что $\varphi''(k)$ убывает на $(0; 1)$, откуда для $k_0 \in (k; 1)$ выполняется

$$\varphi''(k_0) \geq \varphi''(1) = \frac{a^{1-\rho}}{\rho(1+a)}.$$

Применяя формулу Тейлора, получим

$$\varphi(k) = \varphi(1) + \varphi'(1)(k-1) + \frac{\varphi''(k_0)}{2}(k-1)^2 = \frac{\varphi''(k_0)}{2}(k-1)^2 \geq \frac{\varphi''(1)}{2}(k-1)^2.$$

Значит, при всех $k \in (0; 1]$

$$\varphi(k) \geq \frac{a^{1-\rho}}{2\rho(1+a)}(k-1)^2.$$

Отсюда получаем оценку

$$\max_{a>0} \varphi_{a,\rho}(k) \geq \frac{(k-1)^2}{2\rho} \max_{a>0} \frac{a^{1-\rho}}{1+a} = \frac{(k-1)^2}{2} \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right)^{1-\rho},$$

влекущую неравенство

$$\underline{C}(k, \rho) \leq \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \frac{(k-1)^2}{2} \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right)^{1-\rho}.$$

Завершив доказательство теоремы, отметим, что левое неравенство из (10) имеет вполне прозрачный смысл, поскольку

$$\underline{C}(k, \rho) = \max\{\underline{\sigma}_\rho(L_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = k, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \leq 1\},$$

а

$$\frac{\pi k}{\sin \pi \rho} = \min\{\underline{\sigma}_\rho(L_\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = k, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \leq 1\}$$

Правое же неравенство дает количественную характеристику отклонения нижнего типа целой функции с неизмеримой последовательностью нулей ($k < 1$) от максимального возможного значения.

Найденные в теореме 3 границы изменения функции $\underline{C}(k, \rho)$ характеризуют ее поведение вблизи $k = 1$, но заметно расходятся при приближении k к нулю. В теореме 4 мы устраняем эту особенность. Полученные ниже оценки носят равномерный, а не асимптотический характер. В них, в первую очередь, необходимо было проследить за тем, чтобы приближающие величину $\underline{C}(k, \rho)$ функции “стыковались” с ней на концах отрезка $[0; 1]$ изменения аргумента k при всех $\rho \in (0; 1)$. Желание увеличить точность приближения и внутри отрезка $[0; 1]$ приводит, конечно же, к некоторому усложнению оценок.

ТЕОРЕМА 4. Для любых $\rho \in (0; 1), k \in [0; 1]$ справедливы неравенства

$$\frac{\pi k}{\sin \pi \rho} + A_\rho k^{1-\rho}(1-k) \leq \underline{C}(k, \rho) \leq \frac{\pi k}{\sin \pi \rho} + B_\rho k^{1-\rho}(1-k) \ln \frac{e}{k},$$

где $A_\rho = \min\{1/2; \rho\}$, а $B_\rho = (\rho(1-\rho))^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, выражение в правой части неравенства при $k = 0$ понимается в смысле предельного значения, равного нулю. Имеем

$$\begin{aligned} \underline{C}(k, \rho) - \frac{\pi k}{\sin \pi \rho} &= (1 - k) \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \max_{a > 0} \int_a^{ak^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - ka^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \\ &\geq (1 - k) \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - (1 - k) \max_{a > 0} \int_a^{ak^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \\ &=: (1 - k) \min_{a > 0} \eta(a), \quad k, \rho \in (0; 1). \end{aligned}$$

Функция

$$\eta_{k, \rho}(a) = \eta(a) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \int_a^{ak^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau$$

достигает на луче $a > 0$ глобального минимума в точке

$$a_*(k, \rho) = a_* = \frac{k - k^{1/\rho}}{1 - k},$$

так как

$$\eta'(a) = \frac{a^{-\rho}}{a + 1} - \frac{a^{-\rho} k^{1-1/\rho}}{ak^{-1/\rho} + 1} = \frac{a^{-\rho}}{(a + 1)(a + k^{1/\rho})} [a(1 - k) - (k - k^{1/\rho})].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \underline{C}(k, \rho) - \frac{\pi k}{\sin \pi \rho} &\geq (1 - k) \eta(a_*) = (1 - k) \left\{ \int_0^{a_*} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau + \int_{a_* k^{-1/\rho}}^{+\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right\} \\ &\geq (1 - k) \int_0^{a_*} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \geq (1 - k) a_*^{-\rho} \ln(1 + a_*) \geq (1 - k) \frac{a_*^{1-\rho}}{1 + a_*}. \end{aligned}$$

Для дальнейшей оценки полученного выражения воспользуемся справедливыми при $k \in (0; 1)$ неравенствами

$$1 \leq \frac{1 - k^\gamma}{1 - k} \leq \gamma, \quad \text{если } \gamma > 1, \quad (11)$$

$$0 \leq \frac{1 - k^\gamma}{1 - k} \leq \gamma, \quad \text{если } 0 < \gamma < 1, \quad (12)$$

которые вытекают из выпуклости (вогнутости) функции $y = x^\gamma$ при $\gamma > 1$ ($0 < \gamma < 1$). Оценим сначала $1 + a_*$:

$$1 + a_* = 1 + \frac{k - k^{1/\rho}}{1 - k} = \frac{1 - k^{1/\rho}}{1 - k} \leq \frac{1}{\rho}$$

в силу правой части (11), так как $\gamma = 1/\rho > 1$. Далее,

$$a_*^{1-\rho} = \left(\frac{k - k^{1/\rho}}{1 - k} \right)^{1-\rho} = k^{1-\rho} \left(\frac{1 - k^{1/\rho-1}}{1 - k} \right)^{1-\rho} =: k^{1-\rho} \delta(k).$$

При $\rho \in (0; 1/2]$ имеем $\gamma = 1/\rho - 1 \geq 1$, откуда $\delta(k) \geq 1$ благодаря левой части (11). При $\rho \in (1/2; 1)$ имеем $\gamma = 1/\rho - 1 < 1$, и поэтому из (12) вытекает

$$\delta(k) \geq \gamma^{1-\rho} = \left(\frac{1}{\rho} - 1\right)^{1-\rho} = \frac{(1-\rho)^{1-\rho} \rho^\rho}{\rho} \geq \frac{1}{2\rho}.$$

Таким образом, при любом $\rho \in (0; 1)$ имеем $\delta(k) \geq A_\rho/\rho$.

Возвращаясь к оценке $\underline{C}(k, \rho)$ снизу, запишем

$$\underline{C}(k, \rho) - \frac{\pi k}{\sin \pi \rho} \geq (1-k) \frac{a_*^{1-\rho}}{1+a_*} \geq \rho(1-k) k^{1-\rho} \delta(k) \geq A_\rho k^{1-\rho} (1-k),$$

откуда при всех $\rho \in (0; 1)$, $k \in [0; 1]$ получаем

$$\underline{C}(k, \rho) \geq \frac{\pi k}{\sin \pi \rho} + A_\rho k^{1-\rho} (1-k).$$

Теперь докажем заявленную в теореме оценку функции $\underline{C}(k, \rho)$ сверху. При $k \in (0; 1]$, заменяя максимальное значение выражения на его значение в точке $a = k$, можем записать

$$\begin{aligned} & \underline{C}(k, \rho) - \frac{\pi k}{\sin \pi \rho} \\ &= (1-k) \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \max_{a>0} \int_a^{ak^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - ka^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \\ &\leq (1-k) \frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \int_k^{k^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho} - k^{1-\rho}}{\tau+1} d\tau \\ &\leq (1-k) \left[\frac{\pi}{\sin \pi \rho} - \int_k^{k^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \right] - k \int_k^{k^{1-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau + k^{1-\rho} \ln \frac{1+k^{1-1/\rho}}{1+k} \\ &= (1-k) \left[\int_0^k \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau + \int_{k^{1-1/\rho}}^{+\infty} \frac{\tau^{-\rho}}{\tau+1} d\tau \right] + k^{1-\rho} (1-k) \ln \frac{1+k^{1-1/\rho}}{1+k} \\ &\leq (1-k) \left[\int_0^k \tau^{-\rho} d\tau + \int_{k^{1-1/\rho}}^{+\infty} \tau^{-\rho-1} d\tau \right] + k^{1-\rho} (1-k) \ln k^{-1/\rho} \\ &= (1-k) \left(\frac{k^{1-\rho}}{1-\rho} + \frac{k^{1-\rho}}{\rho} \right) - \frac{k^{1-\rho}}{\rho} (1-k) \ln k \\ &= \frac{k^{1-\rho}}{\rho(1-\rho)} (1-k) (1 - (1-\rho) \ln k) \\ &\leq \frac{k^{1-\rho}}{\rho(1-\rho)} (1-k) (1 - \ln k) = B_\rho k^{1-\rho} (1-k) \ln \frac{e}{k}. \end{aligned}$$

4. Доказательство теоремы 5. Мы уже отмечали в замечании к равенству (1), что при $\alpha = 0$ нижний ρ -тип рассматриваемой функции не зависит от β и равен нулю. Однако, дать оценку сверху для $\underline{\sigma}_\rho$ только через нижнюю ρ -плотность нулей невозможно. Оказывается, что при фиксированном $\alpha > 0$ величина нижнего ρ -типа может быть сколь угодно велика. В этом состоит существенное отличие экстремальной задачи о наименьшем ρ -типе из теоремы Попова от задачи о наибольшем нижнем

ρ -типе целых функций порядка $\rho \in (0; 1)$ с $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$, имеющей заданную нижнюю ρ -плотность. Именно, убедимся, что для произвольно зафиксированных $\alpha > 0$ и $\rho \in (0; 1)$ справедливо соотношение

$$\sup_{\beta \geq \alpha} \underline{s}(\alpha, \beta, \rho) = \sup_{\beta \geq \alpha} \left\{ \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho} - \max_{a>0} \int_a^{a(\beta/\alpha)^{1/\rho}} \frac{\beta\tau^{-\rho} - \alpha a^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau \right\} = +\infty, \quad (13)$$

составляющее содержание теоремы 5. Для этого воспользуемся равенством

$$\sup_{\beta \geq \alpha} \underline{s}(\alpha, \beta, \rho) = \alpha \sup_{\nu \geq 1} \left\{ \nu \underline{C}\left(\frac{1}{\nu}, \rho\right) \right\}$$

и оценкой функции $\underline{C}(k, \rho)$ снизу, доказанной в теореме 4. Получим

$$\nu \underline{C}\left(\frac{1}{\nu}, \rho\right) \geq \frac{\pi}{\sin \pi\rho} + A_\rho \nu \frac{1}{\nu^{1-\rho}} \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} + A_\rho \frac{\nu - 1}{\nu^{1-\rho}} \rightarrow +\infty$$

при $\nu \rightarrow +\infty$, откуда и следует (13).

Авторы выражают благодарность А. Ю. Попову за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions*, Transl. Math. Monogr., **150**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [2] А. А. Гольдберг, “Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. II”, *Матем. сб.*, **65**:3 (1964), 414–453.
- [3] R. P. Boas, jr., *Entire Functions*, Pure Appl. Math., **5**, Academic Press, New York, 1954.
- [4] Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, “Связь типов целой функции конечного порядка с плотностями ее нулей”, *Сб. трудов XIV Межд. конф. “Математика. Экономика. Образование”*, РГУ, Ростов-на-Дону, 2006, 52–55.
- [5] Г. Г. Брайчев, *Введение в теорию роста выпуклых и целых функций*, Прометей, М., 2005.
- [6] А. Ю. Попов, “Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ -плотности”, *Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 1, 31–36.
- [7] Г. Г. Брайчев, В. Б. Шерстюков, “О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:1 (2011), 3–28.
- [8] Г. Г. Брайчев, О. В. Шерстюкова, “Об одной экстремальной задаче для нижнего типа целой функции порядка $\rho \in (0; 1)$ ”, *Исследования по математическому анализу*, Математический форум, **3**, Владикавказ, ВНИЦ РАН и РСО-А, 2009, 48–54.

Г. Г. Брайчев

Московский педагогический государственный университет

E-mail: braichev@mail.ru

Поступило

10.02.2010

О. В. Шерстюкова

Национальный исследовательский ядерный университет

“МИФИ”

E-mail: sherov73@mail.ru