Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Е. Кангужин, А. А. Аниязов, Корректные задачи для оператора Лапласа в проколотом круге, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 6, 856–867

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8767>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:06:30

Корректные задачи для оператора Лапласа в проколоте круге

Б. Е. Кангужин, А. А. Аниязов

В работе дано полное описание корректно разрешимых краевых задач для оператора Лапласа в круге и в проколоте круге. Приведены формулы резольвент корректных задач для оператора Лапласа в круге.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. При моделировании одномерных кристаллов [1] возникают операторы вида

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda \delta_i.$$

Поскольку δ_i – дельта-функции Дирака – имеют точечные носители, то речь идет о точечных взаимодействиях. В 1936 г. Ферми [2] использовал подобный подход при изучении движения нейтронов в жидких средах. И только в 1961 г. Березин и Фаддеев [3] дали математическое толкование точечных взаимодействий в рамках теории расширения абстрактных операторов. В течение последних лет понимание точечных взаимодействий и их свойств быстро росло. Создана богатая и сложная теория [4], [5]. Данная статья преследует более скромные цели: во-первых, будут выписаны возмущения задачи Дирихле для неоднородного уравнения Лапласа (теоремы 4, 5, 7); во-вторых, будут конструктивно построены их резольвенты (теорема 6).

2. Вспомогательные утверждения и доказательство теорем. В дальнейшем нам понадобится следующее известное утверждение [6; с. 49].

ТЕОРЕМА 1. *Решение задачи Дирихле для неоднородного гармонического уравнения в круге $\Delta W(x, y) = f(x, y)$, $x^2 + y^2 < r^2$, с граничным условием*

$$W|_{x^2+y^2=r^2} = 0$$

задается формулой

$$W(x, y) = \iint_{\xi^2 + \eta^2 < r^2} G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где

$$G(x, y, \xi, \eta) = d \ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2) - d \ln \left[\frac{\xi^2 + \eta^2}{r^2} \left(\left(x - \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} r^2 \right)^2 + \left(y - \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} r^2 \right)^2 \right) \right],$$

d – некоторая константа, конкретный вид которой не играет роли.

ОБСУЖДЕНИЕ ТЕОРЕМЫ 1. Теорема 1 утверждает, что функция Грина задачи Дирихле для круга выписывается в явном виде. Заметим также, что функция влияния $G(x, y, \xi, \eta)$ принимает только отрицательные значения при любых (x, y) и (ξ, η) , поскольку задаче Дирихле для гармонического уравнения соответствует отрицательно определенный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Известно [6], что фундаментальное решение гармонического уравнения при $(x, y), (\xi, \eta) \in \Omega = \{x^2 + y^2 < r^2\}$ имеет вид

$$\varepsilon(x, y, \xi, \eta) = d \ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2),$$

где d – некоторая константа.

Введем обозначения

$$X^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, \quad Y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{r^2} \left[\left(x - \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} r^2 \right)^2 + \left(y - \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} r^2 \right)^2 \right], \\ Z^2 = r^2 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{r^2} \right).$$

Для указанных чисел справедливо тождество $X^2 = Y^2 - Z^2$, которое проверяется непосредственно. Отсюда, в частности, следует неравенство $Y^2 > Z^2$ при $(x, y) \neq (\xi, \eta)$. Рассмотрим фундаментальное решение

$$\varepsilon(x, y, \xi, \eta) = d \ln X^2 = d \ln(Y^2 - Z^2) = d \ln Y^2 + d \ln \left(1 - \frac{Z^2}{Y^2} \right) \\ = d \ln Y^2 + d \left[-\frac{Z^2}{Y^2} - \frac{1}{2} \frac{Z^4}{Y^4} - \dots \right].$$

Указанные преобразования верны, поскольку $Y^2 > Z^2$, отсюда получим тождество

$$d \ln X^2 - d \ln Y^2 = -d \left[\frac{Z^2}{Y^2} + \frac{1}{2} \frac{Z^4}{Y^4} + \dots \right]. \quad (2.1)$$

Обозначим левую часть тождества через $G(x, y, \xi, \eta)$, тогда $G(x, y, \xi, \eta) = d \ln X^2 - d \ln Y^2$. Покажем, что введенная функция $G(x, y, \xi, \eta)$ представляет функцию Грина задачи Дирихле для неоднородного гармонического уравнения в круге. Для простоты при доказательстве теоремы считаем, что $r = 1$. Функция Грина состоит из фундаментального решения и компенсирующей функции:

$$G(x, y, \xi, \eta) = \varepsilon(x, y, \xi, \eta) - K(x, y, \xi, \eta),$$

где

$$\varepsilon(x, y, \xi, \eta) = d \ln X^2 = d \ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2),$$

$$K(x, y, \xi, \eta) = d \ln Y^2 = d \ln \left[(\xi^2 + \eta^2) \left[\left(x - \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \right)^2 + \left(y - \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \right)^2 \right] \right].$$

Вычислим вначале

$$\Delta_{x,y} G(x, y, \xi, \eta) = \Delta_{x,y} [\varepsilon(x, y, \xi, \eta) - K(x, y, \xi, \eta)],$$

В правой части каждое слагаемое вычисляем по отдельности

$$\Delta_{x,y} \varepsilon(x, y, \xi, \eta) = \Delta_{x,y} d \ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2).$$

С помощью формулы Лейбница можем записать соотношения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varepsilon(x, y, \xi, \eta) = d \frac{(-1)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)^2} (2(x - \xi))^2 + 2d \frac{1}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \varepsilon(x, y, \xi, \eta) = d \frac{(-1)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)^2} (2(y - \eta))^2 + 2d \frac{1}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (2.3)$$

Складывая соотношения (2.2) и (2.3), получаем

$$\Delta_{x,y} \varepsilon(x, y, \xi, \eta) = -4d \cdot \frac{1}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} + 4d \cdot \frac{1}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = 0$$

при $(x, y) \neq (\xi, \eta)$. Так как точка (x, y) находится внутри области Ω , а точка $(\xi/(\xi^2 + \eta^2), \eta/(\xi^2 + \eta^2))$ вне области Ω , то они не могут совпадать, и, следовательно, аналогично предшествующему выполняется равенство $\Delta_{x,y} K(x, y, \xi, \eta) = 0$. Поскольку $d \ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)$ – фундаментальное решение, то

$$\Delta_{x,y} d \ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2) = \delta_{\Omega}((x, y), (\xi, \eta)),$$

где $\delta_{\Omega}((x, y), (\xi, \eta))$ – дельта-функция Дирака в области Ω . Таким образом, функция $G(x, y, \xi, \eta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta_{x,y} G(x, y, \xi, \eta) = \delta_{\Omega}((x, y), (\xi, \eta))$. С другой стороны, $G(x, y, \xi, \eta)$ согласно тождеству (2.1) равняется правой части (2.1), т.е.

$$G(x, y, \xi, \eta) = -d \left[\frac{Z^2}{Y^2} + \frac{1}{2} \frac{Z^4}{Y^4} + \dots \right].$$

Поскольку $Z^2 = (1 - (x^2 + y^2)^2)(1 - (\xi^2 + \eta^2)^2)$, то след на границе $Z^2|_{(x,y) \in \partial\Omega}$ равен нулю. Поэтому функция $G(x, y, \xi, \eta)$ на границе $\partial\Omega$ удовлетворяет граничному условию Дирихле

$$G(x, y, \xi, \eta)|_{(x,y) \in \partial\Omega, (\xi,\eta) \in \Omega} = 0. \quad (2.4)$$

Теорема 1 полностью доказана.

Пусть $h(x, y)$ – произвольная дважды дифференцируемая в круге Ω функция, причем требуется, чтобы $\Delta h(x, y) \in L_2(\Omega)$. Введем новую функцию по формуле

$$I(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \Delta_{\xi,\eta} h(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где $\Delta_{\xi,\eta} = \partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2$ – оператор Лапласа по переменным ξ, η .

Ясно, что функция $I(x, y)$ обладает следующими свойствами:

$$\Delta_{x,y} I(x, y) = \Delta_{x,y} h(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.5)$$

$$I(x, y)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.6)$$

С другой стороны, вспоминая формулу Грина

$$\iint_{\Omega} \Delta uv \, dx \, dy = \iint_{\Omega} u \Delta v \, dx \, dy - \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \bar{n}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} v \right) ds,$$

функцию $I(x, y)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) \Delta_{\xi, \eta} h(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \\ &= \iint_{\Omega} \Delta_{\xi, \eta} G(x, y, \xi, \eta) h(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \left(G(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial h}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} - \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} h(\xi, \eta) \right) ds_{\xi, \eta}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\bar{n}_{\xi, \eta}$ – внешняя нормаль к окружности $\partial\Omega$ в точке (ξ, η) . Заметим, что

$$G(x, y, \xi, \eta) = 0 \quad \text{при} \quad (\xi, \eta) \in \partial\Omega,$$

поскольку $G(x, y, \xi, \eta) = G(\xi, \eta, x, y)$ и верно (2.4). Точно так же в силу симметрии функции Грина $G(x, y, \xi, \eta)$ относительно пар (x, y) и (ξ, η) имеем равенство

$$\Delta_{\xi, \eta} G(x, y, \xi, \eta) = \delta_{\Omega}((x, y), (\xi, \eta)), \quad (2.8)$$

где $\delta_{\Omega}((x, y), (\xi, \eta))$ – дельта функция Дирака в области Ω .

Из (2.7) и (2.8) следует равенство

$$I(x, y) = h(x, y) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} h(\xi, \eta) \, ds_{\xi, \eta}. \quad (2.9)$$

Удобно ввести обозначение $M(x, y) = h(x, y) - I(x, y)$. Подставим правую часть (2.9) в соотношение (2.5). В результате для любой гладкой функции $h(x, y)$ получим соотношение

$$\Delta_{x,y} M(x, y) = 0. \quad (2.10)$$

Теперь используем граничное условие (2.6). Подставим (2.9) в граничное условие (2.6), тогда для произвольной гладкой функции $h(x, y)$ имеем граничное соотношение

$$h|_{\partial\Omega} - M|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.11)$$

В силу произвольности $h(x, y)$ при $(\xi, \eta) \in \partial\Omega$ из соотношения (2.11) убеждаемся в справедливости следующего свойства функции Грина:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} G(x, y, \xi, \eta) \right|_{(x, y) \in \partial\Omega, (\xi, \eta) \in \partial\Omega} = \delta_{\partial\Omega}((x, y), (\xi, \eta)), \quad (2.12)$$

где $\delta_{\partial\Omega}((x, y), (\xi, \eta))$ – дельта-функция Дирака на границе $\partial\Omega$.

По-видимому, граничное соотношение (2.12) для функции Грина $G(x, y, \xi, \eta)$ известно, но авторы не смогли найти точные координаты для ссылок. Поэтому сформулируем необходимые для дальнейшего результаты в виде отдельного утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *Функция Грина задачи Дирихле для неоднородного гармонического уравнения в круге обладает следующими свойствами:*

- 1) $G(P, Q) = G(Q, P)$ для любых $Q, P \in \Omega$;
- 2) $G(P, Q) \leq 0$ для любых $Q, P \in \Omega$;
- 3) $\Delta_{x,y} G(Q, P) = \delta_\Omega(P, Q)$ для любых $Q, P \in \Omega$;
- 4) $G(P, Q) = 0$ для любых $P \in \partial\Omega, Q \in \Omega$;
- 5) при $P, Q \in \partial\Omega$ справедливо соотношение (2.12).

Теперь образуем новую функцию

$$W(x, y) = \iint_\Omega G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + h(x, y) - I(x, y), \quad (2.13)$$

где $h(x, y)$ – произвольная достаточно гладкая функция, $I(x, y)$ определяется по формуле (2.9).

ТЕОРЕМА 3. *Функция $W(x, y)$, введенная по формулам (2.13) и (2.9), является решением следующей задачи:*

$$\begin{cases} \Delta W(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ W(x, y)|_{\partial\Omega} = h(x, y)|_{\partial\Omega}, \end{cases} \quad (2.14)$$

где $h(x, y)$ – произвольная достаточно гладкая функция.

При этом решение задачи (2.14) единственно, т.е. решение задачи (2.14) зависит только от граничных значений $h(x, y)|_{\partial\Omega}$, но не зависит от $h(x, y)$, когда $(x, y) \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Заметим, что из соотношения (2.9) представление (2.13) можно переписать в виде

$$W(x, y) = \iint_\Omega G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} h(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta}. \quad (2.15)$$

Проверим для $W(x, y)$ первое соотношение из (2.14). Справедливость равенства (2.14) следует из того, что верны (2.10) и (2.8). Проверим для $W(x, y)$ второе соотношение из (2.14). Пусть $(x, y) \in \partial\Omega$. Тогда из равенства 4) теоремы 2 и соотношения (2.15) и (2.12) следует требуемое граничное соотношение из (2.14). Единственность задачи Дирихле для неоднородного гармонического уравнения в круге известна. Тем самым, теорема 3 полностью доказана.

Теперь покажем, как, используя теорему 3, можно получать новые граничные корректно разрешимые задачи для неоднородного гармонического уравнения в круге.

Для этого достаточно, чтобы функция $h(x, y)$ непрерывным образом зависела от функции $f(x, y)$, т.е. чтобы существовал непрерывный оператор K , отображающий $f(x, y)$ из пространства $L_2(\Omega)$ в $h(x, y)$ из пространства $W_2^2(\Omega)$. Напомним, $h(x, y)$ – гладкая функция. Итак, пусть $h = K(f)$. Тогда задача (2.14) примет вид

$$\Delta W(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.16)$$

$$W(x, y)|_{\partial\Omega} - K(\Delta W)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.17)$$

Условие (2.17), накладываемое на функцию $W(x, y)$, можно интерпретировать как дополнительное условие для того, чтобы уравнение (2.16) при любой правой части $f(x, y)$ имело единственное решение. Таким образом, задача (2.16), (2.17) представляет корректную всюду разрешимую задачу с новым “краевым” условием вида (2.17). Слово “краевое” пишем в кавычках из-за того, что в общем случае это условие не является граничным. Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Для любого непрерывного оператора K , отображающего пространство $L_2(\Omega) \ni \{f\}$ в множество гладких функций $\{h\} \in W_2^2(\Omega)$, задача (2.16), (2.17) имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях f .*

Теперь докажем обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Если уравнение (2.16) при всех $f \in L_2(\Omega)$ с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение, то найдется непрерывный оператор K , отображающий пространство $L_2(\Omega) \ni \{f\}$ в множество гладких функций $\{h\} \in W_2^2(\Omega)$, такой, что дополнительное условие примет вид (2.17).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть уравнение (2.16) с некоторыми дополнительными условиями однозначно разрешимо для любой правой части $f(x, y)$. Соответствующее единственное решение обозначим через $W(x, y, f)$. Введем функцию

$$u(x, y, f) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

и составим разность

$$v(x, y) = W(x, y, f) - u(x, y, f). \quad (2.18)$$

Ясно, что $v(x, y)$ является решением однородного уравнения $\Delta v = 0$ и однозначно определяется по f . Таким образом, любому элементу f соответствует единственная функция v , которая представляет функцию из $W_2^2(\Omega)$. Обозначим через K оператор, ставящий каждой f из $L_2(\Omega)$ в соответствие функцию v по формуле (2.18), т.е. $v = K(f)$. Рассмотрим совершенно новую функцию, заданную по формуле

$$w(x, y) = u(x, y, f) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} v(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta}.$$

Последняя формула аналогична формуле (2.15). В данном случае роль $h(x, y)$ играет функция $v(x, y)$. Следовательно, вышеприведенные рассуждения из теоремы 3 показывают, что

$$\Delta w(x, y) = f(x, y), \quad w(x, y)|_{\partial\Omega} = v(x, y)|_{\partial\Omega}, \quad (2.19)$$

где $v(x, y) = K(f)$ или $v(x, y) = K(\Delta w)$.

С другой стороны, из представления (2.18) следует, что

$$W(x, y, f) = u(x, y, f) + v(x, y)$$

также удовлетворяет соотношениям (2.19). Поэтому из теоремы единственности вытекает, что $W(x, y, f) = w(x, y)$. Следовательно, дополнительные условия для однозначной разрешимости имеют вид (2.19). Теорема 5 полностью доказана.

Для конкретности приведем примеры, вытекающие из теорем 4 и 5. Согласно теореме 4, выбирая оператор K , можно получить те или иные корректные задачи для неоднородного гармонического уравнения в круге. Причем согласно теореме 5 этот способ позволяет описать все возможные корректные задачи.

ПРИМЕР 1. Пусть оператор K имеет интегральный вид

$$(Kf)(x, y) = \int_{\Omega} K(x, y, t, s) f(t, s) dt ds,$$

где $K(x, y, t, s)$ – достаточно гладкое по (x, y) ядро интегрального оператора. Тогда дополнительное условие (2.17) примет вид

$$W(x, y)|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} K(x, y, t, s) \Delta W(t, s) dt ds|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.20)$$

Если к тому же ядро $K(x, y, t, s)$ по переменным (t, s) является гармонической функцией, то дополнительное условие (2.20), используя формулу Грина, можно записать в виде краевого условия

$$W(x, y)|_{\partial\Omega} - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{t,s}} W(t, s) K(x, y, t, s) - W(t, s) \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{t,s}} K(x, y, t, s) \right) ds_{t,s} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.21)$$

Таким образом, краевая задача (2.16)–(2.21) однозначно разрешима при любых допустимых правых частях, если $K(x, y, t, s)$ – гладкая по (x, y) и гармоническая по (t, s) .

ПРИМЕР 2. Если оператор K имеет вид

$$(Kf)(x, y) = \int_{\Omega} K(x, y, t, s) \exp\left(-\frac{1}{|f(t, s)|}\right) dt ds,$$

где $K(x, y, t, s)$ – достаточно гладкое по (x, y) ядро интегрального оператора, то приходим к нелинейному граничному условию. На самом деле, для записи дополнительного условия (2.17) нам нет необходимости знать значения $(Kf)(x, y)$ во внутренних точках (x, y) из Ω . Достаточно знание информации о следах $(Kf)(x, y)$ на границе $\partial\Omega$.

В дальнейшем нам удобно вместо $K(f)$ писать $(Kf)(x, y)$ и считать K линейным оператором. Оператор, соответствующий задаче (2.16), (2.17), обозначим через L_K . Тогда L_0 соответствует задаче Дирихле из теоремы 1. В следующей теореме дано представление резольвенты оператора L_K .

ТЕОРЕМА 6. Если K – линейный непрерывный оператор из теорем 4 и 5, то резольвента оператора L_K имеет вид

$$\begin{aligned} & (L_K - \lambda I)^{-1} f(x, y) \\ &= (L_0 - \lambda I)^{-1} f(x, y) \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left[L_K (L_K - \lambda I)^{-1} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} \right] K L_0 (L_0 - \lambda I)^{-1} f(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta}. \end{aligned}$$

Теорема 6 показывает, что для вычисления резольвенты на произвольном элементе f достаточно уметь вычислять значения резольвенты на конкретных функциях $\partial G(x, y, \xi, \eta) / \partial \bar{n}_{\xi, \eta}$ при $(\xi, \eta) \in \partial\Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Удобно ввести следующие обозначения:

$$u(x, y) = (L_0 - \lambda I)^{-1} f(x, y), \quad v(x, y, \xi, \eta) = L_K (L_K - \lambda I)^{-1} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}},$$

$$g(\xi, \eta) = (KL_0(L_0 - \lambda I)^{-1} f)(\xi, \eta), \quad W(x, y) = u(x, y) + \int_{\partial\Omega} v(x, y, \xi, \eta) g(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta}.$$

Покажем, что $\Delta W = \lambda W + f$, $(x, y) \in \Omega$. Действительно, рассмотрим

$$\begin{aligned} \Delta W &= \Delta u + \Delta \int_{\partial\Omega} v(x, y, \xi, \eta) g(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta} \\ &= \lambda u + f + \int_{\partial\Omega} \left[\Delta L_K (L_K - \lambda I)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} \right] g(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta}. \end{aligned}$$

Поскольку $L_K p(x, y) \equiv \Delta p(x, y)$ при $p \in D(L_K)$, то

$$\begin{aligned} \Delta L_K (L_K - \lambda I)^{-1} &= \Delta (I + \lambda (L_K - \lambda I)^{-1}) \\ &= \Delta + \lambda \Delta (L_K - \lambda I)^{-1} = \Delta + \lambda L_K (L_K - \lambda I)^{-1}. \end{aligned}$$

Вспомяная также, что

$$\Delta_{x, y} \frac{\partial G}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

можем записать соотношение

$$\Delta W = \lambda u + f + \lambda \int_{\partial\Omega} v(x, y, \xi, \eta) g(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta} = \lambda W + f.$$

Таким образом, функция W удовлетворяет требуемому дифференциальному соотношению

$$\Delta W = \lambda W + f.$$

Остается проверить справедливость краевого условия вида (2.17). Для этого рассмотрим разность

$$\begin{aligned} [W - K(\Delta W)]|_{\partial\Omega} &= \left[u + \int_{\partial\Omega} v(x, y, \xi, \eta) g(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta} - K(\lambda W + f) \right] \Big|_{\partial\Omega} \\ &= \int_{\partial\Omega} L_K (L_K - \lambda I)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} \Big|_{\partial\Omega} g(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta} - K(\lambda W + f)|_{\partial\Omega} \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} \Big|_{\partial\Omega} g(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta} \\ &\quad + \lambda \int_{\partial\Omega} (L_K - \lambda I)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} \Big|_{\partial\Omega} g(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta} - K(\lambda W + f)|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Вспомяная соотношение (2.12), можно записать

$$\begin{aligned} [W - K(\Delta W)]|_{\partial\Omega} &= g(x, y)|_{\partial\Omega} + \lambda \int_{\partial\Omega} (L_K - \lambda I)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} \Big|_{\partial\Omega} g(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta} \\ &\quad - K(\lambda u + f)|_{\partial\Omega} - K \left(\int_{\partial\Omega} \lambda v(x, y, \xi, \eta) g(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta} \right) \Big|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Заметим, что $g(x, y)|_{\partial\Omega} = K(\lambda u + f)|_{\partial\Omega}$, так как

$$\lambda u + f = \lambda(L_0 - \lambda I)^{-1}f + f = L_0(L_0 - \lambda I)^{-1}f.$$

С другой стороны, функция $(L_K - \lambda I)^{-1}\partial G/\partial\bar{n}_{\xi,\eta} \in D(L_K)$ и поэтому удовлетворяет соответствующим краевым условиям

$$(L_K - \lambda I)^{-1}\frac{\partial G}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Big|_{\partial\Omega} = K\left(L_K(L_K - \lambda I)^{-1}\frac{\partial G}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\right)\Big|_{\partial\Omega} = K(v)|_{\partial\Omega}.$$

Поэтому

$$\lambda \int_{\partial\Omega} (L_K - \lambda I)^{-1}\frac{\partial G}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}g(\xi, \eta) ds_{\xi,\eta} = K\left(\int_{\partial\Omega} \lambda v(x, y, \xi, \eta)g(\xi, \eta) ds_{\xi,\eta}\right)$$

поскольку K – линейный оператор. Следовательно, справедливо краевое условие $W|_{\partial\Omega} - K(\Delta W)|_{\partial\Omega} = 0$. Что и требовалось доказать.

Выделим конечномерные возмущения задачи (2.16), (2.17) для неоднородного уравнения Лапласа. Для этого применим вышеуказанный метод к проколотому кругу $\Omega_0 = \Omega \setminus \{M_0\}$, где M_0 – некоторая внутренняя точка круга Ω . Возьмем произвольную функцию $h(x, y)$ из пространства $W_2^2(\Omega_0)$ и введем функцию по формуле

$$I(x, y) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Omega_\delta} G(x, y, \xi, \eta) \Delta_{\xi,\eta} h(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где

$$\Omega_\delta = \Omega \setminus \Pi_\delta(M_0), \quad \Pi_\delta(M_0) = \{(\xi, \eta) : x_0 - \delta \leq \xi \leq x_0 + \delta, y_0 - \delta \leq \eta \leq y_0 + \delta\},$$

(x_0, y_0) – координаты точки M_0 . Преобразуем функцию $I(x, y)$ аналогично формулам (2.5)–(2.9). В результате имеем

$$\begin{aligned} I(x, y) &= h(x, y) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}} h(\xi, \eta) ds_{\xi,\eta} \\ &\quad - \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\partial\Pi_\delta(M_0)} \left(G(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial h(\xi, \eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}} - \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}} h(\xi, \eta) \right) ds_{\xi,\eta} \quad (2.22) \end{aligned}$$

при $(x, y) \neq M_0$. Предполагаем также, что относительно $h(\xi, \eta)$ в окрестности точки (x_0, y_0) выполнены условия

$$\sup_{0 < \delta < \delta_0} \sup_{y_0 - \delta < \eta < y_0 + \delta} \left\{ \delta \left(\left| \frac{\partial h(x_0 + \delta, \eta)}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial h(x_0 - \delta, \eta)}{\partial \xi} \right| + |h(x_0 + \delta, \eta)| + |h(x_0 - \delta, \eta)| \right) \right\} \leq C, \quad (2.23)$$

$$\sup_{0 < \delta < \delta_0} \sup_{x_0 - \delta < \xi < x_0 + \delta} \left\{ \delta \left(\left| \frac{\partial h(\xi, y_0 - \delta)}{\partial \eta} \right| + \left| \frac{\partial h(\xi, y_0 + \delta)}{\partial \eta} \right| + |h(\xi, y_0 - \delta)| + |h(\xi, y_0 + \delta)| \right) \right\} \leq C \quad (2.24)$$

и существуют пределы

$$\begin{aligned}\alpha &= -\lim_{\delta \rightarrow +0} \left\{ \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left[\frac{\partial h(x_0+\delta, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial h(x_0-\delta, \eta)}{\partial \xi} \right] d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left[\frac{\partial h(\xi, y_0+\delta)}{\partial \eta} - \frac{\partial h(\xi, y_0-\delta)}{\partial \eta} \right] d\xi \right\}, \\ \beta &= -\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} [h(x_0-\delta, \eta) - h(x_0+\delta, \eta)] d\eta, \\ \gamma &= -\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [h(\xi, y_0-\delta) - h(\xi, y_0+\delta)] d\xi.\end{aligned}$$

Тогда выпишем предел

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\partial \Pi_\delta(M_0)} \left(G(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial h(\xi, \eta)}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} - \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} h(\xi, \eta) \right) ds_{\xi, \eta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \frac{G(x, y, x_0+\delta, \eta) - G(x, y, x_0, y_0)}{\delta} \cdot \delta \cdot \frac{\partial h(x_0+\delta, \eta)}{\partial \xi} d\eta \\ &\quad + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \frac{G(x, y, x_0, y_0) - G(x, y, x_0-\delta, \eta)}{\delta} \cdot \delta \cdot \frac{\partial h(x_0-\delta, \eta)}{\partial \xi} d\eta \\ &\quad + G(x, y, x_0, y_0) \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left[\frac{\partial h(x_0+\delta, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial h(x_0-\delta, \eta)}{\partial \xi} \right] d\eta \\ &\quad + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{G(x, y, x_0, y_0) - G(x, y, \xi, y_0-\delta)}{\delta} \cdot \delta \cdot \frac{\partial h(\xi, y_0-\delta)}{\partial \eta} d\xi \\ &\quad + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{G(x, y, \xi, y_0+\delta) - G(x, y, x_0, y_0)}{\delta} \cdot \delta \cdot \frac{\partial h(\xi, y_0+\delta)}{\partial \eta} d\xi \\ &\quad + G(x, y, x_0, y_0) \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left[\frac{\partial h(\xi, y_0+\delta)}{\partial \eta} - \frac{\partial h(\xi, y_0-\delta)}{\partial \eta} \right] d\xi \\ &\quad + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0)/\partial \xi - \partial G(x, y, x_0+\delta, \eta)/\partial \xi}{\delta} \cdot \delta \cdot h(x_0+\delta, \eta) d\eta \\ &\quad + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \frac{\partial G(x, y, x_0-\delta, \eta)/\partial \xi - \partial G(x, y, x_0, y_0)/\partial \xi}{\delta} \cdot \delta \cdot h(x_0-\delta, \eta) d\eta \\ &\quad + \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0)}{\partial \xi} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} [h(x_0-\delta, \eta) - h(x_0+\delta, \eta)] d\eta \\ &\quad + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial G(x, y, \xi, y_0-\delta)/\partial \eta - \partial G(x, y, x_0, y_0)/\partial \eta}{\delta} \cdot \delta \cdot h(\xi, y_0-\delta) d\xi \\ &\quad + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0)/\partial \eta - \partial G(x, y, \xi, y_0+\delta)/\partial \eta}{\delta} \cdot \delta \cdot h(\xi, y_0+\delta) d\xi \\ &\quad + \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0)}{\partial \eta} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [h(\xi, y_0-\delta) - h(\xi, y_0+\delta)] d\xi.\end{aligned}$$

Поскольку по предположению для функции $h(\xi, \eta)$ существует $\delta_0 > 0$ и $C > 0$ такие, что выполняются соотношения (2.23), (2.24), то справедливо предельное соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\partial \Pi_\delta(M_0)} \left(G(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial h(\xi, \eta)}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} - \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} h(\xi, \eta) \right) ds_{\xi, \eta} \\ = \alpha G(x, y, x_0, y_0) + \beta \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0)}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0)}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

где числа α, β, γ были определены выше.

Здесь учтено, что функция $G(x, y, \xi, \eta)$ при $(x, y) \neq (\xi, \eta)$ является достаточно гладкой функцией. Таким образом, из соотношения (2.22) получаем

$$\begin{aligned} I(x, y) = h(x, y) - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} h(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta} \\ + \alpha G(x, y, x_0, y_0) + \beta \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0)}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0)}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} h(x, y) - I(x, y) = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} h(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta} \\ - \alpha G(x, y, x_0, y_0) - \beta \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0)}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0)}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Поэтому аналог формулы (2.15) примет вид

$$\begin{aligned} W(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \bar{n}_{\xi, \eta}} h(\xi, \eta) ds_{\xi, \eta} \\ - \alpha G(x, y, x_0, y_0) - \beta \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0)}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0)}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Для того чтобы решение $W(x, y)$ задаваемое формулой (2.25) принадлежало пространству $L_2(\Omega_0)$, необходимо положить $\beta = \gamma = 0$, т.е. функция $h(x, y)$ должна быть непрерывной в точке M_0 . Формула (2.25) дает решение неоднородного уравнения Лапласа в проколотой области Ω_0 , которое отличается от решения задачи (2.16), (2.17) конечным числом слагаемых. Следовательно, правая часть соотношения (2.25) представляет решение конечномерного возмущения задачи (2.16), (2.17) для оператора Лапласа.

Теперь мы готовы сформулировать аналоги теорем 3, 4, 5 для проколотой области. К примеру аналог теоремы 3 в случае проколотой области примет следующий вид.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $h(x, y) \in W_2^2(\Omega_0) \cap C(\Omega)$ и существует предел

$$\begin{aligned} - \lim_{\delta \rightarrow +0} \left\{ \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left[\frac{\partial h(x_0+\delta, \eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial h(x_0-\delta, \eta)}{\partial \xi} \right] d\eta \right. \\ \left. + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left[\frac{\partial h(\xi, y_0+\delta)}{\partial \eta} - \frac{\partial h(\xi, y_0-\delta)}{\partial \eta} \right] d\xi \right\} = \alpha. \end{aligned}$$

Тогда формула (2.25) представляет единственное решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta W &= f, \quad (x, y) \in \Omega_0, \quad W|_{\partial\Omega} = h|_{\partial\Omega}, \\ \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [W(\xi, y_0 - \delta) - W(\xi, y_0 + \delta)] d\xi &= 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} [W(x_0 - \delta, \eta) - W(x_0 + \delta, \eta)] d\eta &= 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow +0} \left\{ \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} W(x_0 - \delta, \eta) - \frac{\partial}{\partial \xi} W(x_0 + \delta, \eta) \right] d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} W(\xi, y_0 - \delta) - \frac{\partial}{\partial \eta} W(\xi, y_0 + \delta) \right] d\xi \right\} = \alpha. \end{aligned}$$

Если далее считать, что $h(x, y)$ непрерывным образом в Ω_0 по норме L_2 зависит от правой части $f(x, y)$, то можно сформулировать аналоги теорем 4, 5. В силу ограниченности объема статьи их здесь не приводим. В заключение укажем, что оператор $h = K(f)$ можно взять в следующем виде:

$$K(f)(x, y) = G(x, y; x_0, y_0) \int_{\Omega} f(t, s) \psi(t, s) dt ds,$$

где $\psi(t, s)$ – фиксированная функция из $L_2(\Omega)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. L. De Kronig, W. G. Penney, “Quantum mechanics of electrons in crystal lattices”, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **130**:814 (1931), 499–513.
- [2] E. Fermi, “Sul moto dei neutroni nelle sostanze idrogenante”, *Ric. Sci. Progr. Tecn. Econom. Naz.*, **2** (1936), 13–52.
- [3] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев, “Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом”, *Докл. АН СССР*, **137**:5 (1961), 1011–1014.
- [4] S. Albeverio, R. Høegh-Krohn, F. Gesztesy, H. Holden, “Some exactly solvable models in quantum mechanics and the low energy expansions”, *Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals, and Their Applications in Theoretical Physics* (Leipzig, 1983), Teubner-Texte Math., **67**, Teubner, Leipzig, 1984.
- [5] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями”, *Тр. ММО*, **64** (2003), 159–212.
- [6] А. В. Бицадзе, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1976.

Б. Е. Кангужин

Казахский национальный университет им. аль-Фараби

E-mail: kanbalta@mail.ru

Поступило

03.01.2010

Исправленный вариант

01.09.2010

А. А. Аниязов

Семипалатинский государственный педагогический институт

им. Шакарима

E-mail: almir84@mail.ru