Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Ш. Ш. Султанов, Дифференциальные операторы, симметричные в индефинитной метрике, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 6, 846–855

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8768>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:13:35

Дифференциальные операторы, симметричные в индефинитной метрике

Р. С. Исмагилов, Ш. Ш. Султанов

Дается описание классов дифференциальных операторов второго порядка на окружности, симметрических относительно индефинитной метрики с конечным рангом индефинитности.

Библиография: 11 названий.

1. Введение и постановка задачи. Кратко напомним необходимые понятия [1], [2].

Пусть H – комплексное гильбертово пространство и H_1, H_2 – его ненулевые взаимно ортогональные подпространства, $H_1 \oplus H_2 = H$, p_1, p_2 – соответствующие ортогональные проекторы. Эрмитова форма $[x, y] = (Jx, y)$, $J = p_1 - p_2$, называется *индефинитным скалярным произведением (индефинитной метрикой)*. Если $\dim H_2 = n$, $0 < n < \infty$, то в пространстве H имеем Π_n -метрику, число n называется *рангом индефинитности*; в этом случае H называют *пространством Понтрягина*. Если же $\dim H_1 = \dim H_2 = \infty$, то получаем пространство с Π_∞ -метрикой; его называют также *пространством Крейна*.

Линейный оператор A с плотной областью определения $D(A)$ в H называется *J -симметрическим (симметрическим относительно индефинитной метрики)*, если $[Ax, y] = [x, Ay]$; такой оператор допускает замыкание [1].

Мы не останавливаемся на определении самосопряженного оператора (см. [1]). Отметим лишь один из основных результатов: любой оператор, самосопряженный по отношению к Π_n -метрике, имеет n -мерное неположительное инвариантное подпространство (теорема Понтрягина [1]). Указанное подпространство назовем *понтрягинским*.

В ряде работ изучались дифференциальные операторы в пространствах Крейна (см. статьи [4]–[6], книги [2], [3]).

В предлагаемой работе рассматривается индефинитная метрика с конечным рангом индефинитности на пространстве периодических функций одной переменной; метрика задается ядром (функцией от пары точек), зависящим от разности переменных. Мы укажем все симметрические дифференциальные операторы второго порядка в полученных таким образом пространствах Понтрягина (Π_n -пространствах).

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00790).

В одной из дальнейших публикаций будут изучены условия J -самосопряженности указанных операторов и их понтрягинские подпространства.

Кратко поясним, почему подобное исследование представляется целесообразным.

Как показано в работах [7], [8], симметрические дифференциальные операторы в Π_n -пространствах (при $0 < n < \infty$) возникают при изучении тензорных произведений представлений группы матриц второго порядка (в настоящей работе мы не касаемся теории представлений групп). Еще одной мотивировкой предпринятого исследования служит то, что некоторые классические операторы также входят в указанный класс; спектральному анализу (в рамках теории Π_n -пространств) классического гипергеометрического оператора посвящена работа [9].

Переходим к постановке задачи.

Обозначим через D пространство 2π -периодических комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций, а через D' – пространство непрерывных линейных функционалов (обобщенных функций) на D . Значение функционала $\varphi \in D'$ на элементе $u \in D$ записываем в виде

$$\langle \varphi, u \rangle = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(t) u(t) dt.$$

Элементы из D' разлагаются в ряды Фурье по системе $z^k = \exp(ikt)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k z^k$, $\varphi_k = \langle \varphi, \bar{z}^k \rangle$, $\varphi \in D'$.

Пусть $q \in D'$, $q(t) = q(-t)$, $q(t) = \bar{q}(t)$ и $q_k = \langle q, \bar{z}^k \rangle$, тогда $q_{-k} = q_k$, $q_k \in \mathbb{R}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Всюду в дальнейшем будем считать $q_k < 0$ для всех k из некоторого конечного непустого множества и $q_k > 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, не входящих в это множество.

Введем в D индефинитную форму

$$[u, v] = (2\pi)^{-2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} q(t - \tau) u(t) \overline{v(\tau)} dt d\tau = \sum_k q_k u_k \bar{v}_k \quad (1)$$

и обычное скалярное произведение $(u, v) = \sum_k |q_k| u_k \bar{v}_k$. Пополнение пространства D по норме $\|u\| = \sqrt{(u, v)}$ обозначим через H . Форма (1) продолжается на H ; таким образом, H превращается в пространство с индефинитной метрикой. Элементы пространства H естественным образом отождествляются с формальными рядами

$$u(t) = \sum_k u_k z^k, \quad \sum_k |q_k| |u_k|^2 < \infty.$$

Ранг индефинитности совпадает с числом тех k , для которых $q_k < 0$; это число обозначим через $r(q) = r$.

Рассмотрим оператор L с областью определения $D(L) = D$, заданный формулой

$$Lu = p(t)u''(t) + r(t)u'(t) + s(t)u(t), \quad p, r, s, u \in D, \quad p \neq 0. \quad (2)$$

Пару (q, L) назовем *элементарной*, если оператор L является J -симметрическим в H и функции $p(t)$, $r(t)$, $s(t)$ имеют наименьший общий период, равный 2π .

Наша цель – описание всех элементарных пар (q, L) (иногда будем опускать эпитет “элементарная”) с конечным рангом индефинитности $r(q)$. Список этих пар будет приведен в п. 3. Следующий п. 2 подготовительный.

2. Коэффициенты Фурье; инволюция в множестве элементарных пар.

Зафиксируем некоторую пару (q, L) . Пусть q_k, p_k, r_k, s_k – коэффициенты Фурье обобщенной функции $q(x)$ и функций $p(x), r(x), s(x)$. Перечислим условия, которым удовлетворяют эти величины.

Напомним, во-первых, что $q_{-k} = q_k, q_k \neq 0$ для всех k и множество $\{k : q_k < 0\}$ непусто и конечно. Введем множество $E = \{n \in \mathbb{Z} : n \neq 0, |p_n| + |r_n| + |s_n| > 0\}$. Применив условие симметричности оператора L относительно скалярного произведения (1) и разложив функции в ряд Фурье, получаем (после простых вычислений) равенство

$$q_k f_n(k) = q_{k-n} h_n(k), \quad (3)$$

где

$$f_n(k) = p_{-n} k^2 + (ir_{-n} - 2np_{-n})k + p_{-n} n^2 - inr_{-n} - s_{-n}, \quad (4)$$

$$h_n(k) = \bar{p}_n k^2 - i\bar{r}_n k - \bar{s}_n, \quad n \in E. \quad (5)$$

Наконец, из определения элементарной пары следует, что

$$\text{наибольший общий делитель чисел из } E \text{ равен } 1. \quad (6)$$

ЛЕММА 1. Если k_0 – достаточно большое число, то функция $k \mapsto q_k/q_{k-1}, k \in \mathbb{Z}, k > k_0$, представима в виде $F(k)/G(k)$, где F и G – многочлены одинаковой степени. Справедливо соотношение $q_k \simeq a(|k| + 1)^c, |k| \rightarrow +\infty$, для некоторых $a > 0, c \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (6) следует, что число 1 можно представить в виде суммы чисел вида $\pm n, n \in E$ (в сумме возможны повторяющиеся слагаемые). Поэтому отношение q_k/q_{k-1} можно представить в виде произведения отношений вида

$$\frac{q_{k-l}}{q_{k-l \pm n}}, \quad n \in E, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Применяя соотношения (3), получаем, что при $k > k_0$ (для некоторого k_0) отношение q_k/q_{k-1} представимо в виде произведения отношений многочленов одинаковой степени (равной 1 либо 2). Отсюда следует первое утверждение леммы. Из него вытекает, что

$$q_k/q_{k-1} = 1 + ck^{-r} + O(k^{-r-1}), \quad k \rightarrow +\infty, \quad c \neq 0,$$

откуда следует утверждение леммы.

Из леммы следует, что при выполнении условий (3)–(6) числа q_k являются коэффициентами Фурье некоторой обобщенной функции.

Таким образом, описание всех пар свелось к анализу условий (3)–(6). Прежде чем перейти к нему, перепишем соотношение (3), используя величины $\tilde{q}_k = 1/q_k$. Это приведет к новой паре $(\tilde{q}, \tilde{L})$, где

$$\tilde{q}_k = q_k^{-1}, \quad \tilde{p}(t) = p(-t), \quad \tilde{r}(t) = r(-t) - 2p'(-t), \quad \tilde{s}(t) = s(-t) + p''(-t) - r'(-t).$$

Мы получили инволюцию $(q, L) \mapsto (\tilde{q}, \tilde{L})$ в множестве всех пар. (Заметим, что имеются такие пары (q, L) , что $(\tilde{q}, \tilde{L} = (q, L))$. В дальнейшем увидим, что указанная инволюция облегчает отыскание всех пар.

Приступая к основной задаче (описанию всех элементарных пар), выделим три совокупности таких пар; назовем их *рациональной*, *иррациональной* и *особой* сериями. Первая состоит (по определению) из таких пар (q, L) , что функция $k \mapsto q_k$ рациональна (точнее, продолжается до рациональной функции, определенной на $\mathbb{R}$), во второй серии функция $q \mapsto q_k$ не является рациональной и не постоянна ни на каком множестве вида $\{k : k > k_0\}$; наконец, третья (особая) серия состоит из всех пар (q, L) , где $q_k = l$ при $k > k_0$ (для некоторых l, k_0).

Эти серии не пересекаются и исчерпывают все множество элементарных пар.

3. Описание основного результата. Сейчас мы укажем примеры элементарных пар; затем докажем (в п. 4), что ими исчерпывается все множество элементарных пар.

Начнем с рациональной серии. Удобно разбить ее на два подмножества – *первую* и *вторую* рациональные серии; каждая из этих серий получается из другой применением упомянутой инволюции.

Первая рациональная серия разбивается на три группы. Мы выпишем явно только первую из них. Для двух других выпишем коэффициенты Фурье q_k и множество E ; этого достаточно для определения пары (q, L) , ибо равенства (3) дают нужные соотношения на коэффициенты Фурье p_k, r_k, s_k , задающие оператор L . Итак,

- 1) $q(t) = 2\pi(-\delta''(t) + a^2\delta(t))$, $q_k = k^2 - a^2$, $a \notin \mathbb{Z}$, $Lu = pu'' + a^2pu$, $p, u \in D$;
- 2) $q_k = \prod_{j=0}^{N-1} (k^2 - (\alpha + j))^2$, $N \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$; при этом $E = \{1, 2\}$ при $\alpha \in \{1/2, -N + 1/2\}$ и $E = \{1\}$ для других значений величины α ;
- 3) $q_k = (k^2 - ((m+n)/2)^2)(k^2 - ((m-n)/2)^2)$, $E = \{m, n\}$, где m, n – взаимно простые числа разной четности.

Применим инволюцию $(q, L) \mapsto (\tilde{q}, \tilde{L})$ к описанным сейчас парам первой рациональной серии; полученное таким образом семейство пар и назовем второй рациональной серией.

Во всех приведенных примерах обобщенная функция q есть линейная комбинация δ -функций и ее производных. Соответствующие (т.е. полученные применением указанной инволюции) пары второй рациональной серии имеют иную природу. Скажем, первому примеру соответствует пара (q, L) , где

$$q(t) = \frac{\pi}{a \sin a\pi} \cos \gamma(\pi - |t|), \quad t \in (-\pi, \pi), \quad \text{и} \quad Lu = (pu)'' + a^2u$$

(здесь p – произвольная функция из D .)

Перечислим теперь элементарные пары иррациональной серии.

- 1) $q(t) = (\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(1-\alpha-\beta))F(\alpha, \beta; 1/2; \cos^2(t/2))$, $q_k = \Gamma(k+\alpha)\Gamma(k+\beta)/\Gamma(k-\alpha+1)\Gamma(k-\beta+1)$,

$$L_1u = (p_1z + p_{-1}\bar{z})u''(t) + i(2-\alpha-\beta)(p_1z - p_{-1}\bar{z})u' - (1-\alpha)(1-\beta)(p_1z + p_{-1}\bar{z})u(t),$$

где $u \in D$, $p_1 = \bar{p}_{-1} \neq 0$.

Здесь F – гипергеометрическая функция, $\alpha, \beta \notin \mathbb{Z}/2$, $\alpha + \beta \notin \mathbb{Z}$, $\alpha < \beta$ и множество $[\alpha, \beta] \Delta [1-\beta, 1-\alpha]$ содержит целое число. (Здесь Δ означает симметрическую разность множеств; благодаря последнему условию последовательность $k \mapsto q_k$ не является знакопостоянной.)

Более точное описание обобщенных функций $q(t)$ таково. Сначала указанную функцию рассматриваем при $\alpha < -3$, $\beta < -3$. Из интегральной формулы для гипергеометрической функции следует, что (см. [10; с. 288]) при указанных α , β рассматриваемая функция $t \rightarrow q(t)$ определена всюду и принадлежит классу $C^2(\mathbb{R})$. Таким образом, получаем семейство обобщенных функций, голоморфно зависящих от параметров α , β , пробегающих указанное множество. Оно аналитически продолжается на область, задаваемую описанными выше условиями. Это продолжение и есть $q(t)$.

2) $q(t) = |\sin(t/2)|^{-2\alpha}$, $\alpha \notin \mathbb{Z}/2$, $\alpha \notin (0, 1)$, $q_k = \Gamma(k + \alpha)/\Gamma(k - \alpha + 1)$,

$$L_2 u = (p_1 z + p_{-1} \bar{z}) u''(t) + i \left(\frac{3}{2} - \alpha \right) (p_1 z - p_{-1} \bar{z}) u' - \frac{1}{2} (1 - \alpha)(1 - \beta) (p_1 z + p_{-1} \bar{z}) u(t),$$

где $u \in D$, $p_1 = \bar{p}_{-1} \neq 0$.

Более точное определение обобщенной функции $q(t)$ дается, как и в предыдущем случае, посредством аналитического продолжения; несложные подробности опускаем.

Наконец, особая серия имеет следующий вид

1) $q(x) = 2\pi\delta(x) + (b - 1)\sin(mx)/\sin(x)$, $q_k = 1$ при $|k| \geq m$, $q_k = b$ при $|k| \leq m - 1$, $b < 0$,

$$L_3 u = (p_1 z + p_{-1} \bar{z}) u''(t) + i(p_1 z - p_{-1} \bar{z}) u' + m(m - 1)(p_1 z + p_{-1} \bar{z}) u(t), \quad u \in D.$$

ТЕОРЕМА 1. *Указанные три серии исчерпывают множество элементарных пар.*

Добавим, что инволюция $(q, L) \mapsto (\tilde{q}, \tilde{L})$ сводится в особой серии к замене $b \mapsto b^{-1}$; примеры 1) и 2) рациональной серии не меняются под действием инволюции.

Доказательство теоремы 1 дано в п. 5; ближайший пункт – вспомогательный.

4. Предварительная лемма.

ЛЕММА 2. *Пусть пара (q, L) не принадлежит особой серии. Тогда для любого $n \in E$ соотношение (3) равносильно одному из следующих соотношений:*

- 1°) $q_k(k - \alpha)(k - \beta) = q_{k-n}(k + \alpha - n)(k + \beta - n)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $\alpha \neq n/2$, $\beta \neq n/2$, $\alpha + \beta \neq n$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \notin \mathbb{Z}$;
- 2°) $q_k(k - \alpha) = q_{k-n}(k + \alpha - n)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $\alpha \neq n/2$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$;
- 3°) $q_k(k - \alpha) = q_{k-2m}(k + \alpha - 2m)$, $k \neq m$, где $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_n \neq 0$. Из (3)–(5) и леммы 1 следует, что $\bar{p}_n = p_{-n}$. Имеем следующие возможности:

- 1) f_n и h_n не имеют общих корней; тогда сделав в равенстве (3) замену $k \mapsto n - k$ и учтя условие $q_j = q_{-j}$, приходим к равенству $q_{k-n} f_n(n - k) = q_k h_n(n - k)$; отсюда $f_n(k) f_n(n - k) = h_n(k) h_n(n - k)$; но так как f_n , h_n не имеют общих корней, то $h_n(n - k) = f_n(k)$; итак, $q_k f_n(k) = q_{k-n} f_n(n - k)$; так как последовательность q_k меняет знак, то многочлен f_n имеет различные вещественные корни; это приводит к случаю 1;
- 2) f_n и h_n имеют единственный общий корень β , причем $\beta \notin \mathbb{Z}$; это приводит к случаю 2;

- 3) f_n и h_n имеют единственный общий корень m , причем $m \in \mathbb{Z}$; тогда, разделив обе части равенства (3) на $k - m$ при $k \neq p$ и повторив рассуждения, относящиеся к случаю 1), получаем $q_k(k - \alpha) = q_{k-n}(k + \alpha - n)$, $k \neq p$; заменив k на $n - k$ и учтя, что последовательность $\{q_k\}$ четна, получаем $q_k(k - \alpha) = q_{k-n}(k + \alpha - n)$, $k \neq n - m$; если $m \neq n/2$, то приходим к случаю 2, а при $m = n/2$ — к случаю 3;
- 4) f_n и h_n имеют два общих корня; тогда функция $k \mapsto q_k$, $k > k'$ является n -периодической для некоторого k' ; такова и функция $k \mapsto q_k/q_{k-1}$, $k > k'$; из леммы 1 следует, что эта функция постоянна; это приводит к особой серии, которую мы исключили из рассмотрения в этой лемме.

Мы разобрали случай $p_n \neq 0$. Если $p_n = 0$, то легко приходим к случаям 2 и 3. Лемма доказана.

5. Описание особой серии. Пусть пара (q, L) принадлежит особой серии. Покажем, что она имеет вид, указанный в п. 3 (перед формулировкой теоремы).

Из определения особой серии следует существование такого $m > 0$, что $q_k = 1$ при $|k| \geq m$ и $q_{-m+1} = q_{m-1} = b \neq 1$. Возьмем число $n \in E$. Ясно, что в равенстве (3) многочлены f_n, h_n совпадают и обращаются в нуль ровно в точках $-m + 1, m - 1 + n$. Отсюда $q_k = q_{k-n}$ при $k \neq -m + 1, k \neq m - 1 + n$. Следовательно, $q_k = b$ в точности при $k = -m + 1 + jn$, $j = 0, \dots, l$, $-m + 1 + nl = m - 1$. Таким образом, число n однозначно определено (как наименьшее число $i > 1$ такое, что $q_{-m+1+i} \neq 1$). Итак, E состоит из единственного числа n . Но тогда в силу условия (6) $E = \{1\}$, а многочлены f_1, h_1 из равенства условия (3) совпадают с $k \mapsto (k + m - 1)(k - m)$. Мы показали, что пара (q, L) имеет вид, указанный в п. 3.

6. Описание рациональной серии. Начнем с простых вычислений с многочленами. Пусть вещественный многочлен $Q(x)$ удовлетворяет условиям

$$Q(x) = Q(-x), \quad \frac{Q(x)}{Q(x-c)} = \frac{f(x)}{h(x)}, \quad \deg f = \deg h \leq 2, \quad (7)$$

$$c > 0, \quad f, h - \text{взаимно-простые многочлены.}$$

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 2 (случай 1), получаем, что условие (7) принимает вид

$$\frac{Q(x)}{Q(x-c)} = \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(x+\alpha-c)(x+\beta-c)}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{c}{2}, \quad \alpha + \beta \neq c, \quad (8)$$

либо

$$\frac{Q(x)}{Q(x-c)} = \frac{(x-\alpha)}{(x+\alpha-c)}, \quad \alpha \neq \frac{c}{2}. \quad (9)$$

ЛЕММА 3. Многочлен со старшим коэффициентом 1, удовлетворяющий условию (7), представляется в виде

$$Q(x) = \prod_{j=0}^{N-1} (x^2 - (a + jc)^2). \quad (10)$$

Если выполнено условие (9), то многочлен представим в виде (10), где $a = c/2$ либо $a = (-N + 1/2)c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства отщепляем от многочлена множитель $(x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)$, что приводит к многочлену меньшей степени, удовлетворяющему аналогичному условию (с измененными α, β). Повторяя этот прием, получаем (10).

Из (10) видно, что корни многочлена $Q(x)$ образуют арифметические прогрессии $a + jc$ и $-a - jc$, $j = 0, \dots, N - 1$. Прогрессии имеют общие элементы, если $-2a/c \in \{0, \dots, 2(N - 1)\}$; это будут кратные корни многочлена. Если $a = c/2$ либо $a = (-N + 1/2)c$, то объединение этих прогрессий есть прогрессия с той же разностью. Если $a = (-2N + 1)c/4$, либо $a = (-2N + 3)c/4$, то члены прогрессий перемежаются, а объединение прогрессий есть прогрессия с разностью $c/2$. В остальных случаях эти две прогрессии не пересекаются, их объединение не является арифметической прогрессией.

В следующей лемме отмечены все случаи, когда условие (7) выполняется для более чем одного значения c ; она вытекает из леммы 3 и приведенного за ней рассуждения.

ЛЕММА 4. Пусть $Q(x)$ – четный многочлен. Пусть множество тех чисел $c > 0$, для которых выполнено условие (7), содержит более одного элемента. Тогда имеет место один из следующих случаев:

- 1) $Q(x) = x^2 - b$, $b \in \mathbb{R}$ (в этом случае указанное условие выполняется для всех c);
- 2) $Q(x) = \prod_{j=0}^{N-1} (x^2 - (b/2 + jb)^2)$, $b \neq 0$ (в этом случае $c = b$, либо $c = 2b$);
- 3) $Q(x) = (x^2 - ((m + n)/2)^2)(x^2 - ((m - n)/2)^2)$, (здесь $c = m$, либо $c = n$).

Рассмотрим теперь рациональные функции (не только многочлены), удовлетворяющие условию (7).

ЛЕММА 5. Любая рациональная функция со свойством (7) есть либо многочлен вида (10), либо функция вида $1/Q(x)$ (с таким же многочленом $Q(x)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q(x) = A(x)/B(x)$, где A, B – многочлены. Записав соотношение (7), убеждаемся, что каждая из функций $A(x)/A(x - c)$, $B(x)/B(x - c)$ есть отношение многочленов первой степени. Из второго утверждения леммы 3 следует, что

$$A(x) = \prod_{j=0}^{N-1} \left(x^2 - \left(\frac{c}{2} + jc \right)^2 \right), \quad B(x) = \prod_{j=0}^{M-1} \left(x^2 - \left(\frac{c}{2} + jc \right)^2 \right).$$

Но это невозможно, ибо A, B взаимно просты.

Из лемм 3, 4 и 5 вытекает теорема 1.

7. Описание иррациональной серии. В этом пункте и далее мы обозначаем через (x) дробную часть числа x .

Пусть пара (q, L) принадлежит иррациональной серии.

ЛЕММА 6. Пусть последовательность $\{q_k\}$ удовлетворяет условию

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = \prod_{j=0}^l \frac{k - a_j}{k - b_j}, \quad k > k_0, \quad (11)$$

для некоторого k_0 . Пусть последовательности дробных частей $(a_j), (b_j)$ совпадают с точностью до перестановки. Тогда функция $k \mapsto q_k$, $k \in \mathbb{Z}$, рациональна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены указанные условия. Покажем, что функция $k \mapsto q_k$ рациональна при $k \in \mathbb{Z}$, $k > k_0$, где k_0 – достаточно большое число. При соответствующей группировке наборов $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ правая часть равенства (11) представится в виде произведения дробей $(k - a_j)/(k - a_j - r)$, где $r \in \mathbb{Z}$. Но дробь $(k - a_j)/(k - a_j - r)$, $r > 0$, можно представить в виде отношения $A(k)/A(k - 1)$, где $A(k) = (k - a_j) \cdots (k - a_j - r + 1)$. Аналогичное представление имеем и при $r < 0$. Отсюда следует, что функция $k \mapsto q_k$ рациональна при $k > k_1$ для достаточно большого k_1 .

Чтобы избавиться от ограничения $k > k_0$, возьмем любое нечетное число $n \in E$ (существование такого числа следует из условия (6)). Для него выполнено одно из условий 1° либо 2°, указанных в лемме 2. Эти условия дают продолжение рациональной функции $k \mapsto q_k$, $k > k_0$, до рациональной функции, определенной на всем множестве $\mathbb{Z}$. Этим доказана лемма.

В следующей лемме (q, L) – это пара, принадлежащая иррациональной серии; $E = \{n : |p_n| + |r_n| + |s_n| \neq 0\}$.

ЛЕММА 7. *Множество E состоит либо из единственного числа 1, либо из чисел 1, 2. Справедливо одно из равенств*

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{(k + \alpha - 1)(k + \beta - 1)}{(k - \alpha)(k - \beta)} \quad (12)$$

либо

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{k + \alpha - 1}{k - \alpha}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала изучим последовательность $\{q_k\}$ при $k > k_0$, где k_0 – достаточно большое число. Согласно лемме 1 функция представима в виде отношения двух многочленов одинаковой степени. Таким образом,

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{\prod_{j=1}^N (k - a_j)}{\prod_{j=1}^N (k - b_j)}. \quad (14)$$

Допустим, что E содержит число $\tilde{n} \geq 3$, и покажем, что это приводит к противоречию.

Применяя последнее соотношение последовательно $\tilde{n}$ раз, получаем

$$\frac{q_k}{q_{k-\tilde{n}}} = \frac{\prod_{j=1}^N \prod_{s=0}^{\tilde{n}-1} (k - a_j - s)}{\prod_{j=1}^N \prod_{s=0}^{\tilde{n}-1} (k - b_j - s)}. \quad (15)$$

С другой стороны, так как $\tilde{n} \in E$, то справедливо одно из соотношений

$$\frac{q_k}{q_{k-\tilde{n}}} = \frac{(k - c)(k - d)}{(k - c')(k - d')}, \quad \frac{q_k}{q_{k-\tilde{n}}} = \frac{(k - c)}{(k - c')}. \quad (16)$$

Дальнейшие рассуждения проведем в предположении, что имеет место первое из этих соотношений.

Выпишем числа, участвующие в числителях и знаменателях равенств (14) и (15). Это числа

$$a_j, \quad b_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (17)$$

$$a_j + s, \quad b_j + s, \quad j = 1, \dots, N, \quad s = 0, \dots, \tilde{n} - 1. \quad (18)$$

Обращаясь к равенству (16), видим, что двучлены, стоящие в числителе и знаменателе в равенстве (15) сокращаются – за исключением двучленов $k - c$, $k - d$ (они остаются в числителе) и $k - c'$, $k - d'$ (они остаются в знаменателе). Именно эти двучлены, оставшиеся после сокращений в выражении (15), содержатся в (16). Отсюда следует, что если в каждом из двух наборов из (18) удалить по два члена (c , d из первой и c' , d' из второй), то оставшиеся части наборов совпадают с точностью до перестановки. Возьмем теперь наборы, составленные из дробных частей чисел указанных наборов. Получим

$$(a_j), \quad (b_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (19)$$

$$(a_j + s), \quad (b_j + s), \quad j = 1, \dots, N, \quad s = 0, \dots, \tilde{n} - 1. \quad (20)$$

Ясно, что каждый из двух наборов (20) есть $\tilde{n}$ -кратное повторение соответствующего набора из (19), ибо добавление к a_j , b_j целого числа s не меняет дробной части чисел a_j , b_j . Разумеется, для наборов (20) также выполняется описанное обстоятельство: если из первого набора удалить числа (c) , (d) и из второго удалить (c') , (d') , то останутся одинаковые (с точностью до перестановки) наборы. (Поясним, что указанные числа входят в указанные наборы не менее $\tilde{n}$ раз; мы удаляем ровно одно вхождение каждого из них.)

Докажем, что наборы (19) совпадают с точностью до перестановки. Действительно, предположим, что некоторое число t входит в первый из этих наборов l_1 раз, а во второй набор – l_2 раз. Тогда в первый из наборов (20) число t входит $\tilde{n}l_1$ раз, а во второй входит $\tilde{n}l_2$ раз. Далее, в набор (точнее, в пару) (c) , (d) число t входит s_1 раз, а в набор (c') , (d') входит s_2 раз, $s_1 \leq 2$, $s_2 \leq 2$. Когда из первого из наборов (19) удаляем (c) , (d) , а из второго удаляем (c') , (d') , то в оставшихся наборах число t участвует $\tilde{n}l_1 - s_1$ раз и $\tilde{n}l_2 - s_2$ раз соответственно. Но так как оставшиеся наборы совпадают, то $\tilde{n}l_1 - s_1 = \tilde{n}l_2 - s_2$. Отсюда $\tilde{n}(l_1 - l_2) = s_1 - s_2$. Но так как $|s_1 - s_2| \leq 2$ и $\tilde{n} \geq 3$, то $s_1 = s_2$, $l_1 = l_2$, что и утверждалось.

Итак, наборы (19) совпадают с точностью до перестановки. Согласно лемме 6 функция $k \mapsto q_k$ рациональна, и мы пришли к противоречию.

Мы доказали, что E не содержит чисел $\tilde{n} \geq 3$, а потому $E \subset \{1, 2\}$. Но случай $E = \{2\}$ невозможен в силу условия (6). Поэтому $E = \{1\}$, либо $E = \{1, 2\}$. Это доказывает лемму.

Теперь легко описать иррациональную серию. Пусть пара (q, L) принадлежит этой серии. Пусть сначала выполняется условие (12). Из него следует, что в качестве коэффициентов Фурье искомой обобщенной функции $q(t)$ можно взять

$$q_k = \frac{\Gamma(k + \alpha)\Gamma(k + \beta - 1)}{\Gamma(k - \alpha + 1)\Gamma(k - \beta + 1)}.$$

Явный вид обобщенной функции q получается из следующего равенства:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1 - \alpha - \beta)} F\left(\alpha, \beta, \cos^2 \frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(k + \alpha)\Gamma(k + \beta - 1)}{\Gamma(k - \alpha + 1)\Gamma(k - \beta + 1)} e^{ikt}. \quad (21)$$

Приведем доказательство этого равенства, опуская некоторые простые подробности. Из дифференциального уравнения для гипергеометрической функции без

труда выводится, что функция $\Phi(t) = F(\alpha, \beta, 1/2; \cos^2(t/2))$ удовлетворяет уравнению

$$\sin \frac{t}{2} \Phi''_{tt} + \cos \frac{t}{2} (\alpha + \beta) \Phi' - \alpha \beta \Phi \sin \frac{t}{2} = 0.$$

Из него следует, что коэффициенты Фурье этой функции удовлетворяют тому же соотношению (12), что и последовательность $\{q_k\}$, а потому имеют вид cq_k с некоторым c . Для нахождения числа c следует рассмотреть коэффициент q_0 . Отсюда вытекает (21).

Пусть теперь выполнено условие (13). Оно получается из (12) при $\beta = 1/2$. Отсюда получаем q_k и $q(t)$, указанные в описании иррациональной серии. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. С. Понтрягин, “Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **8**:6 (1944), 243–280.
- [2] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986.
- [3] И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов, *Неклассические дифференциально-операторные уравнения*, Наука, Новосибирск, 2000.
- [4] R. Beals, “Indefinite Sturm–Liouville problems and half-range completeness”, *J. Differential Equations*, **56**:3 (1985), 391–407.
- [5] B. Ćurgus, H. Langer, “A Krein space approach to symmetric ordinary differential operators with an indefinite weight function”, *J. Differential Equations*, **79**:1 (1989), 31–61.
- [6] B. Ćurgus, B. Najman, “A Krein space approach to elliptic eigenvalue problems with indefinite weights”, *Differential Integral Equations*, **7**:5-6 (1994), 1241–1252.
- [7] Ш. Ш. Султанов, “О тензорных произведениях представлений группы $SL(2, \mathbb{R})$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **10**:2 (1976), 90–92.
- [8] Ш. Ш. Султанов, “Разложение тензорных произведений двух неприводимых унитарных в P_∞ -метрике представлений группы $SL(2, \mathbb{R})$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **29**:1 (1988), 179–191.
- [9] Р. С. Исмагилов, Ш. Ш. Султанов, “О спектральном анализе некоторых дифференциальных операторов, самосопряженных в пространстве с индефинитной метрикой”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 568–580.
- [10] Н. Н. Лебедев, *Специальные функции и их приложения*, ГИТТЛ, М., 1953.
- [11] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, *Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений*, Обобщенные функции, **5**, Физматиз, М., 1962.

Р. С. Исмагилов

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Поступило

25.01.2010

Ш. Ш. Султанов

Нижевартовский государственный гуманитарный
университет

E-mail: ngpi@wsmail.ru