Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Шаповалов, Сопряженные интерполяционные задачи в пространствах целых функций, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 4, 616–628

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm877>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:31:36

УДК 517.535.4

СОПРЯЖЕННЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

А. И. Шаповалов

Рассматривается понятие сопряженных интерполяционных задач на примере обобщения задачи и разложения целых функций в ряды Тейлора с переменным центром. Находятся радиусы существования, единственности и сходимости для таких задач. Находится связь между интерполяционными системами функционалов сопряженных друг с другом задач.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение и основные результаты

Обозначим через A_R ($0 < R < \infty$) пространство регулярных в круге $\{|z| < R\}$ функций с топологией равномерной сходимости на компактах из $\{|z| < R\}$. Через $A_0(|z| \geq R)$ обозначим пространство функций, регулярных на $\{|z| \geq R\}$ и обращающихся в нуль на бесконечности. Топология $A_0(|z| \geq R)$ задается равномерной сходимостью в какой-либо замкнутой области, содержащей $\{|z| \geq R\}$ строго внутри.

Всюду в дальнейшем, не оговаривая этого специально, через $m = \{m_n\}_0^\infty$ будем обозначать последовательность комплексных чисел, обладающих свойствами:

$$m_0 = 1, \quad 0 < |m_n| < \infty \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |m_n|^{1/n} = \infty. \quad (M)$$

С последовательностью m будем связывать целую функцию $\Phi(z) = \sum_{n=0}^\infty z^n / m_n$.

Обозначим через $A(\Phi, R)$ пространство целых функций $F(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n / m_n$ таких, что функции

$$g(\Phi, F; t) = \sum_{n=0}^\infty b_n t^{-n-1} \quad (1)$$

принадлежат пространству $A_0(|z| \geq R)$.

Топология пространства $A(\Phi, R)$ индуцируется топологией сопряженного с ним пространства A_R . Свойства пространств $A(\Phi, R)$ хорошо изучены (см., например, [1]). Связь между $F(z)$ и $g(\Phi, F; z)$ называется *обобщенным преобразованием Бореля*. Классическое преобразование Бореля соответствует функции $\Phi(z) = \exp(z)$.

Если $F(z) \in A(\Phi, R)$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{1/n} < R. \quad (2)$$

Пусть на некотором пространстве $A(\Phi, R)$ задана система линейных непрерывных функционалов $\{L_k\}_{k=0}^{\infty}$. Хорошо известно (см., например, [2]), что их можно представить в виде

$$L_k[F] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{m_n} l_n^{(k)}, \quad l_n^{(k)} = L_k[z^n], \quad n, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{l_n^{(k)}}{m_n} \right|^{1/n} \leq \frac{1}{R}.$$

Пусть

$$l_n^{(k)} = 0, \quad k > n, \quad l_n^{(n)} = 1, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Систему функционалов, удовлетворяющую условиям (3) и (4), будем называть *интерполяционной системой функционалов* пространства $A(\Phi, R)$.

Интерполяционной системе функционалов $\{L_k\}_{k=0}^{\infty}$ поставим в соответствие систему полиномов $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ с помощью условий биортогональности:

$$L_k[P_n] = \delta_{n,k} \quad (\delta_{n,k} = 0, \quad n \neq k, \quad \delta_{k,k} = 1, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Заметим, что условиями (5) каждый полином $P_n(z)$, степень которого равна n , определяется единственным образом, и в силу (4) коэффициент при z^n равен единице:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n P_k^{(n)} z^k.$$

Также и функционалы L_k определяются через полиномы $P_n(z)$ с помощью (5) единственным образом. Но не каждая система $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ определяет функционалы $\{L_k\}_{k=0}^{\infty}$ как линейные и непрерывные. Только в случае линейности и непрерывности $\{L_k\}_{k=0}^{\infty}$ (т.е. выполнения условия (3)) будем называть полиномы $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *интерполяционной системой полиномов* в соответствующем пространстве.

Интерполяционная задача состоит в восстановлении функции $F(z) \in A(\Phi, R)$ по заданной последовательности $\{L_k[F]\}_{k=0}^{\infty}$, где $\{L_k\}_{k=0}^{\infty}$ – интерполяционная система функционалов пространства $A(\Phi, R)$.

Другой способ постановки интерполяционной задачи состоит в задании интерполяционной системы полиномов $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$.

Поставим произвольной функции $F(z) \in A(\Phi, r)$ ($r > 0$) в соответствие формальный ряд

$$F(z) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} L_n[F] P_n(z), \quad (6)$$

который называется *интерполяционным рядом* функции $F(z)$.

Пространство $A(\Phi, R)$ ($0 < R \leq r$) такое, что любая функция $F(z) \in A(\Phi, R)$ представляется сходящимся в топологии $A(\Phi, R)$ рядом (6), назовем *пространством сходимости* интерполяционной задачи.

Пространство $A(\Phi, R)$ ($R > 0$) такое, что условия $F(z) \in A(\Phi, R)$ и $L_n[F] = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) влекут за собой тождество $F(z) = 0$, называется *пространством единственности* интерполяционной задачи.

Очевидно, что если $A(\Phi, R)$ является пространством сходимости, то оно представляет собой пространство единственности.

Пусть $A = (a_{n,k})_{n,k=0}^{\infty}$ – нижнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали.

Матрица A может задавать в каких-либо пространствах одновременно две интерполяционные задачи, одна из которых получается, если положить $a_{n,k} = l_n^{(k)}$ ($n, k = 0, 1, 2, \dots$), т.е. задать интерполяционную систему функционалов, а вторая, – если положить $a_{n,k} = P_k^{(n)}$, т.е. задать интерполяционную систему полиномов. Обозначим эти задачи соответственно ω и $\tilde{\omega}$ и назовем *сопряженными относительно матрицы A* .

Матрица $B = (b_{n,k})_{n,k=0}^{\infty}$, обратная к A , тоже будет нижнетреугольной с единицами на главной диагонали. Система интерполяционных полиномов задачи ω определяется равенствами $P_k^{(n)} = b_{n,k}$ ($n, k = 0, 1, 2, \dots$), а система интерполяционных функционалов задачи $\tilde{\omega}$ определяется равенствами $l_n^{(k)} = b_{n,k}$.

Всюду в дальнейшем через $\beta = \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ будем обозначать последовательность конечных комплексных чисел таких, что

$$\beta_0 = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n|^{1/n} = 0. \quad (B)$$

Определим класс $A_m^{\beta}(\Lambda)$ матриц $A(\lambda)$ таких, что

$$a_{n,k} = \beta_{n-k} \frac{m_n}{m_k} \lambda_n^{n-k}, \quad n \geq k, \quad a_{n,k} = 0, \quad n < k \quad (n, k = 0, 1, 2, \dots), \quad (7)$$

где последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda = \{\lambda : |\lambda_n| \leq 1, n = 0, 1, 2, \dots\}$.

Через $B_m^{\beta}(\Lambda)$ обозначим класс матриц $B(\lambda)$, обратных к $A(\lambda) \in A_m^{\beta}(\Lambda)$.

Каждый класс матриц $A_m^{\beta}(\Lambda)$ определяет два класса интерполяционных задач $\Omega_m^{\beta}(\Lambda)$ и $\tilde{\Omega}_m^{\beta}(\Lambda)$, которые представляют собой множества интерполяционных задач $\omega = \omega(\lambda)$ и $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, сопряженных относительно матриц A , принадлежащих классу $A_m^{\beta}(\Lambda)$. В следующих определениях символом Ω будем обозначать один из двух введенных выше классов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Радиусом существования* $R(\Omega, \Phi)$ класса Ω назовем наибольшее из чисел $R > 0$ таких, что в пространстве $A(\Phi, R)$ существует интерполяционная система функционалов каждой задачи из класса Ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Радиусом единственности* $E(\Omega, \Phi)$ класса Ω назовем наибольшее из чисел R ($R \leq R(\Omega, \Phi)$) таких, что пространство $A(\Phi, R)$ является пространством единственности каждой задачи из класса Ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Радиусом сходимости* $S(\Omega, \Phi)$ класса Ω назовем наибольшее из чисел R ($R \leq R(\Omega, \Phi)$) таких, что пространство $A(\Phi, R)$ является пространством сходимости каждой задачи из класса Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем будет показано, что в определениях 1–3 действительно можно говорить о наибольшем R , а не только о точных верхних границах.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, что $S(\Omega, \Phi) \leq E(\Omega, \Phi) \leq R(\Omega, \Phi)$.

Пусть матрица $A(\lambda)$ принадлежит классу $A_m^{\beta}(\Lambda)$. Тогда для взаимно-обратной матрицы $B(\lambda)$ справедливо равенство

$$\sum_{i=k}^n a_{n,i} b_{i,k} = \delta_{n,k}. \quad (8)$$

Отсюда, используя (7), получаем

$$\frac{m_k}{m_n} b_{n,k} = - \sum_{i=0}^{n-k-1} \beta_{n-k-i} \lambda_n^{n-k-i} \frac{m_k}{m_{i+k}} b_{i+k,k}, \quad b_{k,k} = 1, \quad \lambda \in \Lambda. \quad (9)$$

Из (9) следует, что величина $b_{n,k}$ зависит лишь от $n-k$ чисел $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n$ и величина $m_k b_{n,k} / m_n$ не зависит от последовательности m .

Для любой матрицы $B(\lambda) \in B_m^\beta(\Lambda)$ определим последовательность $\gamma = \{\gamma_n\}_{n=0}^\infty$ с помощью равенств

$$\frac{1}{|m_{n-k}|} \max_{\lambda \in \Lambda} |b_{n-k,0}| = \gamma_{n-k} \quad (n \geq k, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Последовательность γ зависит лишь от β и не зависит от m .

ТЕОРЕМА 1. *Существует*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{-1/n} =: W_\beta, \quad (11)$$

для которого справедливы соотношения

$$W_\beta = \inf_{n \geq 1} \gamma_n^{-1/n}, \quad (12)$$

$$r_{|\beta|} \leq W_\beta \leq \inf_{|q|=1} r_\beta(q), \quad (13)$$

где $r_{|\beta|}$ – единственный на интервале $(0, +\infty)$ корень целой функции

$$F_{|\beta|}(z) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| z^n, \quad (14)$$

а $r_\beta(q)$ (q – комплексное число такое, что $|q| = 1$) – расстояние от начала координат до ближайшего нуля целой функции

$$F_{\beta,q}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n q^{(n(n+1))/2} z^n. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы равенства*

$$R(\Omega_m^\beta(\Lambda), \Phi) = \infty, \quad (16)$$

$$R(\tilde{\Omega}_m^\beta(\Lambda), \Phi) = W_\beta, \quad (17)$$

$$S(\Omega_m^\beta(\Lambda), \Phi) = E(\Omega_m^\beta(\Lambda), \Phi) = W_\beta, \quad (18)$$

$$S(\tilde{\Omega}_m^\beta(\Lambda), \Phi) = E(\tilde{\Omega}_m^\beta(\Lambda), \Phi) = W_\beta. \quad (19)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{L_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{P_n(z)\}_{n=0}^\infty$ – интерполяционные системы функционалов и полиномов произвольной задачи $\omega(\lambda) \in \Omega_m^\beta(\Lambda)$, а $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{G_n(z)\}_{n=0}^\infty$ интерполяционные системы функционалов и полиномов сопряженной к $\omega(\lambda)$ задачи $\tilde{\omega}(\lambda)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если целая функция $F(z) = \sum_{n=0}^\infty d_n z^n$ принадлежит пространству $A(\Phi, W_\beta)$, то $L_k[F] = f^{(k)}(0)/k!$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), где целая функция $f(z) = \sum_{n=0}^\infty d_n G_n(z)$ принадлежит пространству $A(\Phi, W_\beta)$.

2) Если целая функция $f(z) = \sum_{n=0}^\infty d_n z^n$ принадлежит пространству $A(\Phi, W_\beta)$, то $V_k[f] = F^{(k)}(0)/k!$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), где целая функция $F(z) = \sum_{n=0}^\infty d_n P_n(z)$ принадлежит пространству $A(\Phi, W_\beta)$.

ПРИМЕР. Пусть последовательности $\hat{\beta}$ и $\hat{m}$ таковы, что $\hat{\beta}_n = 1/n!$, $\hat{m}_n = n!$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). В этом случае функция $\Phi(z) \equiv \exp(z)$. Из (7) следует, что

$$a_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda_n^{n-k} \quad (n \geq k).$$

Тогда интерполяционная система полиномов задачи $\tilde{\omega}(\lambda) \in \tilde{\Omega}_m^{\hat{\beta}}(\Lambda)$ такова, что

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \lambda_n^{n-k} z^k = (z + \lambda_n)^n. \quad (20)$$

Полиномы вида (20) называются *полиномами Тейлора* с переменным центром. Разложение целых функций в ряды по таким полиномам изучалось многими авторами. В частности, Ю. А. Казьмин в [3] доказано, что $S(\tilde{\Omega}_m^{\hat{\beta}}(\Lambda), \exp) = W$, где W – известная константа Уиттекера. Значит, как следует из теоремы 2, в нашем случае $W_{\hat{\beta}} = W$.

Найдем явный вид интерполяционной системы функционалов этой задачи. Из (4) видно, что $L_k[z^n] = 0$, $n < k$. Из (9) и (20) следует, что при $n \geq k$

$$\begin{aligned} L_k[z^n] &= b_{n,k} = - \sum_{i=k}^{n-1} \frac{\lambda_n^{n-i}}{(n-i)!} \frac{n!}{i!} b_{i,k} = \int_{\lambda_n}^0 \sum_{i=k}^{n-1} \frac{z_1^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \frac{n!}{i!} b_{i,k} dz_1 \\ &= \int_{\lambda_n}^0 dz_1 \left(\sum_{i=k}^{n-2} \frac{z_1^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \frac{n!}{i!} b_{i,k} + \frac{n!}{(n-1)!} b_{n-1,k} \right) \\ &= \int_{\lambda_n}^0 dz_1 \left(\sum_{i=k}^{n-2} \frac{z_1^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \frac{n!}{i!} b_{i,k} - \sum_{i=k}^{n-2} \frac{\lambda_{n-1}^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \frac{n!}{i!} b_{i,k} \right) \\ &= \int_{\lambda_n}^0 dz_1 \int_{\lambda_{n-1}}^{z_1} dz_2 \left(\sum_{i=k}^{n-2} \frac{z_2^{n-i-2}}{(n-i-2)!} \frac{n!}{i!} b_{i,k} \right) = \dots \\ &= \frac{n!}{k!} \int_{\lambda_n}^0 dz_1 \int_{\lambda_{n-1}}^{z_1} dz_2 \dots \int_{\lambda_{k+1}}^{z_{n-k-1}} dz_{n-k}. \end{aligned}$$

§ 2. Доказательства теорем

Для доказательства теорем 1–3 нам понадобятся ряд лемм.

ЛЕММА 1. Пусть матрица $A(\lambda) \in A_m^\beta(\Lambda)$ такова, что

$$\lambda_n = q^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (21)$$

где комплексное число $q : |q| = 1$. Тогда для обратной матрицы $B(\lambda)$ справедливо

$$b_{n,k} = c_{n-k} \frac{m_n}{m_k} q^{n(n-1)/2 - k(k-1)/2}, \quad n \geq k, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

где $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ – последовательность коэффициентов разложения в ряд по степеням z функции $1/F_{\beta,q}(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ (функция $F_{\beta,q}(z)$), а также число $r_\beta(q)$ определены в теореме 1). Поэтому $c_0 = 1$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = \frac{1}{r_\beta(q)}. \quad (23)$$

Если же не существует нулей $F_{\beta,q}(z)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (9) и (21) получаем

$$\frac{m_k}{m_n} b_{n,k} = - \sum_{i=0}^{n-k-1} \beta_{n-k-i} \frac{m_k}{m_{i+k}} q^{n(n-i-k)} b_{i+k,k}, \quad b_{k,k} = 1.$$

Полагая $n = s + k$, перепишем последние рекуррентные соотношения в виде

$$q^{-s(s+k)} \frac{m_k}{m_{s+k}} b_{s+k,k} = - \sum_{i=0}^{s-1} \beta_{s-i} q^{-i(s-i)} \frac{m_k}{m_{i+k}} q^{-i(i+k)} b_{i+k,k}, \quad b_{k,k} = 1. \quad (24)$$

Отсюда видно, что величина $m_k q^{-i(i+k)} b_{i+k,k} / m_{i+k}$ не зависит от k и от последовательности m . Обозначим эту величину r_i . Тогда (24) можно представить в виде

$$r_s = - \sum_{i=0}^{s-1} \beta_{s-i} q^{-i(s-i)} r_i, \quad r_0 = 1. \quad (25)$$

С помощью (15) нетрудно видеть, что коэффициенты c_s могут быть определены с помощью рекуррентных соотношений

$$q^{-s(s+1)/2} c_s = - \sum_{i=0}^{s-1} \beta_{s-i} q^{-i(s-i)} c_i q^{-i(i+1)/2}, \quad c_0 = 1.$$

Сравнивая полученное и (25), получаем

$$q^{-s(s+1)/2} c_s = r_s = \frac{m_k}{m_{s+k}} q^{-s(s+k)} b_{s+k,k} \quad (s = 0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда, полагая $s = n - k$, получаем (22). Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Для любой матрицы $B \in B_m^\beta(\Lambda)$ справедливо

$$|b_{n,k}| \leq \mu_{n-k} \left| \frac{m_n}{m_k} \right| \quad (n \geq k, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots), \quad (26)$$

где $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность положительных чисел ($\mu_0 = 1$), которые являются коэффициентами разложения в ряд по степеням z функции $1/F_{|\beta|}(z)$ ($F_{|\beta|}(z)$), а также $r_{|\beta|}$ определены в теореме 1). Отсюда, в частности, следует, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{1/n} = \frac{1}{r_{|\beta|}}. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью (9) получаем

$$\left| \frac{m_k}{m_n} \right| |b_{n,k}| \leq \sum_{i=0}^{n-k-1} |\beta_{n-k-i}| \left| \frac{m_k}{m_{i+k}} \right| |b_{i+k,k}|, \quad b_{k,k} = 1.$$

Отсюда следует (26), где полагаем

$$\mu_{n-k} = \sum_{i=0}^{n-k-1} |\beta_{n-k-i}| \mu_i, \quad \mu_0 = 1. \quad (28)$$

Из (28) и (14) видно, что утверждения леммы доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Существует континуум матриц, для которых в (26) имеет место знак равенства. Чтобы показать это, для произвольного q такого, что $|q| = 1$, определим новую последовательность $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(q)$:

$$\tilde{\beta}_0 = \beta_0, \quad \tilde{\beta}_n = -|\beta_n| q^{-n(n+1)/2}, \quad n \geq 1. \quad (29)$$

Из (29) следует (в терминах лемм 1, 2), что $F_{\tilde{\beta},q}(z) \equiv F_{|\beta|}(z)$, и поэтому $c_n = \mu_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и $r_{|\beta|} = r_{\tilde{\beta}}(q)$. Следовательно, для этого случая в (26) знак равенства.

ЛЕММА 3. Для любой матрицы $B \in B_m^\beta(\Lambda)$ справедливы равенства

$$\left| \frac{m_k}{m_n} \right| \max_{\lambda \in \Lambda} |b_{n,k}| = \left| \frac{1}{m_{n-k}} \right| \max_{\lambda \in \Lambda} |b_{n-k,0}| = \gamma_{n-k} \quad (n \geq k). \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (30) следует из (9) и принципа максимума модуля, если заметить, что $b_{n,k}$ и $b_{n-k,0}$ зависят от одинакового количества переменных из последовательности λ , которые отличаются лишь нумерацией.

ЛЕММА 4. Для чисел γ_i , определенных в (10), справедливы соотношения

$$\gamma_n \geq \gamma_k \gamma_{n-k} \quad (n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n). \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по k докажем формулу

$$b_{n,0} = b_{k,0}b_{n,k} - \sum_{i=k}^{n-1} b_{n,i+1} \sum_{j=0}^{k-1} b_{j,0}a_{i+1,j}. \quad (32)$$

Из свойства взаимной обратности матриц $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ следует, что числа $b_{n,s}$ можно определять с помощью равенств

$$b_{s,s} = 1, \quad b_{n,s} = - \sum_{i=0}^{n-s-1} b_{n,s+i+1}a_{s+i+1,s}. \quad (33)$$

Полагая в (33) $s = 0$, получаем

$$b_{0,0} = 1, \quad b_{n,0} = - \sum_{i=1}^{n-1} b_{n,i+1}a_{i+1,0} - b_{n,1}a_{1,0}. \quad (34)$$

Полагая в (8) $k = 0$, получаем

$$b_{n,0} = - \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,0}a_{n,i}. \quad (35)$$

Из (35) следует, что $b_{1,0} = -a_{1,0}$, и, подставляя это в (34), получаем, что формула (32) при $k = 1$ верна. Предположим, что (32) верна для $k = p - 1$ ($p \geq 2$) и покажем, что она верна тогда и для $k = p$. Выразим $b_{n,p-1}$ из (33) и подставим в формулу (32), написанную для $k = p - 1$. Мы получим

$$b_{n,0} = b_{p-1,0} \left(-b_{n,p}a_{p,p-1} - \sum_{i=1}^{n-p} b_{n,i+p}a_{i+p,p-1} \right) - \sum_{i=p-1}^{n-1} b_{n,i+1} \sum_{j=0}^{p-2} b_{j,0}a_{i+1,j}.$$

Преобразовывая, получаем

$$b_{n,0} = -b_{n,p} \left(\sum_{j=0}^{p-2} b_{j,0}a_{p,j} + b_{p-1,0}a_{p,p-1} \right) - \sum_{i=p}^{n-1} b_{n,i+1} \sum_{j=0}^{p-1} b_{j,0}a_{i+1,j}. \quad (36)$$

Замечая, что выражение в скобке в правой части (36) равно $-b_{p,0}$ (это следует из (35)), получаем, что формула (32) справедлива для $k = p$.

Из рекуррентных соотношений (9) видно, что числа $b_{n,s}$ можно рассматривать как однородные полиномы от $\lambda_{s+1}, \lambda_{s+2}, \dots, \lambda_n$, т.е.

$$b_{n,s} \equiv b_{n,s}(\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n), \\ b_{n,s}(t\lambda_{s+1}, \dots, t\lambda_n) = t^{n-s}b_{n,s}(\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n) \quad t \in \mathbb{C}.$$

Воспользуемся свойством однородности и формулой (32):

$$b_{n,0}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, t\lambda_{k+1}, \dots, t\lambda_n) = t^{n-k} [b_{k,0}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)b_{n,k}(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) + C_k(t)],$$

где $C_k(t)$ – многочлен степени k по переменной t такой, что $C_k(0) = 0$. Далее имеем $\max_{|t| \leq 1} |b_{n,0}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, t\lambda_{k+1}, \dots, t\lambda_n)| \geq |b_{k,0}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)| |b_{n,k}(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n)|$. Поскольку величины $b_{k,0}$ и $b_{n,k}$ не имеют общих аргументов, то, беря в обеих частях последнего неравенства максимум по последовательности $\lambda \in \Lambda$ и учитывая лемму 3, получаем (31). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для произвольных натуральных n и k ($n \geq 2$, $1 \leq k \leq n$) выберем натуральное p так, чтобы $0 \leq n - pk = s < k$. Тогда с помощью (31) получаем неравенство

$$\gamma_n \geq \gamma_k^p \gamma_s = \gamma_k^{n/k} \gamma_k^{-s/k} \gamma_s,$$

откуда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{1/n} \geq \gamma_k^{1/k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (37)$$

Беря в неравенстве (37) верхний предел по $k \rightarrow \infty$, получаем, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{-1/n}$, который обозначим W_β , т.е. справедливо (11). Из (37) следует и равенство (12). Очевидно, что $c_n \leq \gamma_n \leq \mu_n$ (последовательности c_n и μ_n определены в леммах 1, 2), откуда с помощью равенств (23) и (27) получаем (13). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для любой последовательности β можно с помощью формул (29) взять последовательность $\tilde{\beta}$, для которой $W_{\tilde{\beta}} = r_{|\beta|}$.

ЛЕММА 5. Для того чтобы система функционалов $\{L_k(t)\}_{k=0}^\infty$, удовлетворяющая условиям (4), была интерполяционной для произвольной интерполяционной задачи в пространстве $A(\Phi, R)$ ($R > 0$), необходимо и достаточно, чтобы функции

$$f_k(t) \equiv L_k(\Phi(tz)) = t^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{l_{i+k}^{(k)}}{m_{i+k}} t^i, \quad k \geq 0, \quad (38)$$

принадлежали пространству A_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (38) равносильно (3). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из работы [1] следует, что

1) полнота в пространстве A_R системы функций $\{f_k(t)\}_{k=0}^\infty$ заданной интерполяционной задачи равносильна тому, что пространство $A(\Phi, R)$ является пространством единственности этой интерполяционной задачи;

2) базисность в пространстве A_R системы функций $\{f_k(t)\}_{k=0}^\infty$ заданной интерполяционной задачи равносильна тому, что пространство $A(\Phi, R)$ является пространством сходимости этой интерполяционной задачи.

При доказательстве следующей леммы используется метод работы [4].

ЛЕММА 6. Существует последовательность $\lambda^* \in \Lambda$ такая, что

- 1) система функций $\{f_k(z)\}_{k=0}^\infty$ задачи $\omega(\lambda^*) \in \Omega_m^\beta(\Lambda)$ не является полной в пространствах A_R для любого $R > W_\beta$,
- 2) при некотором $k = 0, 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n,k}^*}{m_n} \right|^{1/n} = \frac{1}{W_\beta},$$

где $b_{n,k}^* \equiv b_{n,k}(\lambda_{k+1}^*, \dots, \lambda_n^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в соответствии с леммой 5 систему функций

$$f_k(z) = z^k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{k+s,k} z^s}{m_{k+s}}, \quad k \geq 0. \quad (39)$$

Из (39), (7), а также условий (М) и (В) видно, что функции $f_k(z)$ являются целыми и задают интерполяционную систему функционалов задачи $\omega(\lambda)$. Для функций (39), учитывая условия (В), для любого $\rho \geq 0$ и любого $\lambda \in \Lambda$ справедливы неравенства

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[m_k \max_{|z| \leq \rho} |f_k(z)| \right]^{1/k} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left[\rho^k \sum_0^{\infty} \beta_s \rho^s \right]^{1/k} \leq \rho. \quad (40)$$

Воспользуемся рассуждениями Евграфова [5, с. 110–113].

Возьмем произвольное натуральное число n . Выберем числа $\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$ так, чтобы $|\lambda_i^{(n)}| = 1$ ($i = 1, \dots, n$) и определенные с их помощью величины $b_{n,k}^{(n)} \equiv b_{n,k}(\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)})$ удовлетворяли бы равенствам $|b_{n,0}^{(n)}|/|m_n| = \gamma_n$. Если остальные $\lambda_i^{(n)}$ ($i = n+1, n+2, \dots$) положить произвольными, но с условием $|\lambda_i^{(n)}| \leq 1$, то определенные для такой последовательности $\lambda^{(n)} \in \Lambda$ интерполяционные функционалы задачи $\omega(\lambda^{(n)})$ будем обозначать $L_k^{(n)}$, а элементы матрицы $A(\lambda^{(n)})$ будем обозначать $a_{s,k}^{(n)}$.

Рассмотрим последовательность полиномов

$$Q_0(z) \equiv 1, \quad Q_n(z) = \frac{1}{b_{n,0}^{(n)}} \sum_{s=0}^n b_{n,s}^{(n)} z^s, \quad n \geq 1. \quad (41)$$

Из (41) видно, что $Q_n(0) = 1$ ($n \geq 0$). Из (41) получаем

$$L_k^{(n)}(Q_n) = \frac{1}{b_{n,0}^{(n)}} \sum_{s=k}^n b_{n,s}^{(n)} a_{s,k}^{(n)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Используя лемму 4, имеем

$$|Q_n(z)| \leq \sum_{s=0}^n \frac{\gamma_{n-s}}{\gamma_n} \frac{|z|^s}{|m_s|} \leq \sum_{s=0}^{\infty} \frac{|z|^s}{\gamma_s |m_s|}, \quad n \geq 0. \quad (42)$$

Неравенства (42) показывают, что последовательность $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ является равномерно ограниченной, следовательно, из нее можно выбрать равномерно сходящуюся на каждом компакте подпоследовательность $\{Q_{n_s}(z)\}_{s=0}^{\infty}$. Ее предел обозначим через $Q(z) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} q_i z^i \neq 0$. Из построения видно, что $|q_i| \leq 1/(\gamma_i |m_i|)$, следовательно, $Q(z) \in A(\Phi, R)$, $R > W_{\beta}$.

Если через λ^* обозначить последовательность чисел λ_i^* , каждое из которых есть предельная точка последовательности $\lambda_i^{(n)}$ ($n = n_s, s = 1, 2, \dots$), ($|\lambda_i^*| = 1, i = 1, 2, \dots$), то для интерполяционных функционалов L_n^* задачи $\omega(\lambda^*)$ будет выполнено $L_n^*(Q) = 0$, $n = 0, 1, \dots$. Отсюда и из принципа двойственности, связывающего полноту и единственность (см., например, [1]), заключаем, что утверждение 1) леммы верно.

Определим с помощью равенств

$$\mathcal{L}_n^*(z^k) = m_k b_{n,k}^*, \quad k \leq n, \quad \mathcal{L}_n^*(z^k) = 0, \quad k > n \quad (n, k = 0, 1, \dots), \quad (43)$$

систему функционалов. Из (43) и [2] следует, что $\{\mathcal{L}_n^*\}_{n=0}^\infty$ – система линейных и непрерывных в A_R функционалов при любом $R > 0$.

Из (43) и (39) легко следует, что для функций $f_k(z) \equiv f_k(z, \lambda^*)$ задачи $\omega(\lambda^*)$, определенной с помощью матрицы $(a_{n,k}^*)_{n,k=0}^\infty$, справедливо

$$\mathcal{L}_n^*(f_k(z, \lambda^*)) = \sum_{s=0}^{n-k} a_{k+s,k}^* b_{n,k+s}^* = \delta_{n,k},$$

т.е. система $\{\mathcal{L}_n^*\}_{n=0}^\infty$ биортогональна с системой $\{f_k(z, \lambda^*)\}_{k=0}^\infty$. Поэтому z^k можно поставить в соответствие формальный ряд

$$z^k \mapsto m_k \sum_{n=k}^\infty b_{n,k}^* f_n(z, \lambda^*). \quad (44)$$

Из определения числа W_β следует, что для любой матрицы $B(\lambda) \in B_m^\beta(\Lambda)$ для $k = 0, 1, \dots$ справедливо неравенство $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |b_{n,k}/m_n|^{1/n} \leq 1/W_\beta$. Предположим, что утверждение 2) леммы неверно, а именно, существует число $R > W_\beta$, для которого при всех $k = 0, 1, \dots$ и всех $\lambda \in \Lambda$ выполняются неравенства $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |b_{n,k}/m_n|^{1/n} \leq 1/R$. Из этого предположения и из (40), где ρ выбираем из интервала (W_β, R) , получаем неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[|b_{n,k}^*| \max_{|z| \leq \rho} |f_n(z, \lambda^*)| \right]^{1/n} \leq \frac{\rho}{R} < 1,$$

которое показывает, что ряд (44) равномерно сходится в круге $|z| \leq \rho$, а поскольку система $\{f_n(z, \lambda^*)\}_{n=0}^\infty$ является первой приведенной системой, то (см. [6]) этот ряд сходится именно к функции z^k , т.е. в (44) имеет место равенство и, следовательно, система $\{f_n(z, \lambda^*)\}_{n=0}^\infty$ полна в A_R , $R > W_\beta$, что невозможно. Лемма доказана.

Рассмотрим квазистепенную базисность систем функций $\{f_n(t) \equiv L_t(\Phi(tz))\}_{n=0}^\infty$ заданной интерполяционной задачи.

Система $\{f_n(z)\}_{n=0}^\infty$ называется *квазистепенным базисом* (КС-базисом) в A_R , $R > 0$, если любая $f(z) \in A_R$ представляется (единственным образом) сходящимся в топологии A_R рядом $f(z) = \sum_{n=0}^\infty x_n f_n(z)$ таким, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{1/n} < R$, и, обратно, если последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ удовлетворяет предыдущему неравенству, то ряд $f(z) = \sum_{n=0}^\infty x_n f_n(z)$ сходится в топологии A_R .

Из определения видно, что системы функций мы должны нормировать.

ЛЕММА 7. Система функций $\{m_n f_n(z)\}_{n=0}^\infty$ произвольной задачи $\omega(\lambda) \in \Omega_m^\beta(\Lambda)$ образует КС-базис в пространствах A_R для любого $R \in (0, W_\beta]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем явный вид целых функций $m_n f_n(z)$. Из леммы 5 и (7) следует, что

$$m_n f_n(z) = z^n \sum_{s=0}^\infty \beta_s \lambda_{s+n}^s z^s. \quad (45)$$

Единственной биортогональной с функциями (45) является система функций $g_n(t)/m_n \equiv g(\Phi, P_n(z); t)$, где $P_n(z)$ – интерполяционные полиномы рассматриваемой задачи.

Из (1) следует, что

$$g_n(t) = \sum_{s=0}^n m_s b_{n,s} t^{-s-1}. \quad (46)$$

Из (46) видно, что $g_n(t) \in A_0 (|t| \geq \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Воспользуемся критерием КС-базисности, данным в [7]. В нашем случае надо проверить два утверждения:

1) для любого $r \in (0, R)$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\max_{|z| \leq r} |m_n f_n(z)| \right]^{1/n} < R; \quad (47)$$

2) для каждого фиксированного $\rho \in (0, R)$ существует $\mu = \mu(\rho) \in (0, R)$ такое, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\max_{|t| \geq \mu} \left| \frac{g(t)}{m_n} \right| \right]^{1/n} \leq \frac{1}{\rho}. \quad (48)$$

Докажем первое утверждение. Из (45) и условий (В) следует, что

$$\max_{|z| \leq r} |m_n f_n(z)| \leq r^n \sum_{s=0}^{\infty} |\beta_s| r^s = r^n B(r),$$

где $B(r)$ есть константа, зависящая от r , а так как $r < R$, то 1) доказано.

Для доказательства второго утверждения положим $\mu(\rho) = \rho$. Тогда из (46) и определения чисел γ_s следует, что

$$\max_{|t| \geq \rho} \left| \frac{g_n(z)}{m_n} \right| \leq \frac{1}{\rho^{n+1}} \sum_{s=0}^n \gamma_{n-s} \rho^{n-s} \leq \frac{1}{\rho^{n+1}} \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s \rho^s,$$

а так как $\rho < W_\beta$, то ряд в последнем неравенстве сходится, откуда и следует 2). Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Система функций $\{m_n f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ произвольной задачи $\tilde{\omega}(\lambda) \in \tilde{\Omega}_m^\beta(\Lambda)$ образует КС-базис в пространствах A_R для любого $R \in (0, W_\beta]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем явный вид функций $m_n f_n(z)$. Из леммы 5 следует, что

$$m_n f_n(z) = z^n \sum_{s=0}^{\infty} m_n b_{s+n,n} \frac{z^s}{m_{s+n}}. \quad (49)$$

Из (49), определения числа W_β и леммы 6 видно, что функции $f_n(z)$ являются регулярными в круге $|z| < W_\beta$. Единственной биортогональной с функциями (49) является система функций $g_n(t)/m_n \equiv g(\Phi, P_n(z); t)$, где $P_n(z)$ – интерполяционные полиномы задачи $\tilde{\omega}(\lambda)$.

Из (1) и (7) следует, что

$$\frac{g_n(t)}{m_n} = \sum_{s=0}^n \beta_{n-s} \lambda_n^{n-s} t^{-s-1}. \quad (50)$$

Из (50) видно, что $g_n(t) \in A_0 (|t| \geq \varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$.

Воспользуемся критерием КС-базисности из [7], а именно, в нашем случае надо доказать утверждения (47) и (48).

Доказательство (47) следует из того факта, что ряд в (49) сходится при $|z| \leq \rho \leq W_\beta$. Для доказательства (48) положим $\mu(\rho) = \rho$. Далее, при оценке нужного нам максимума модуля конечную сумму увеличим до бесконечной и, воспользовавшись условиями (В), получим утверждение (48). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Утверждение (16) следует из (7), леммы 5 и условий (М) и (В). Для доказательства (17) нужно еще второе утверждение леммы 6. Так как из квазистепенной базисности следует просто базисность, то из лемм 6, 7, 8, замечания 2, а также замечания 5 получаем утверждения (18) и (19) теоремы. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из работы [8] следует, что леммы 7, 8 позволяют утверждать, что соответствующие интерполяционные ряды сходятся в топологии более сильной, чем топология пространства $A(\Phi, R)$ для любых $R \leq W_\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. 1). Используя обозначения теоремы, легко видим, что $d_n = V_n[f]$; поэтому из теоремы 2 заключаем, что функция $f(z)$ принадлежит пространству $A(\Phi, W_\beta)$. Далее, производя почленное дифференцирование ряда функции $f(z)$ и учитывая, как связаны коэффициенты интерполяционных полиномов и функционалов сопряженных задач, мы получаем

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty} d_n \frac{G_n^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty} d_n G_k^{(n)} = \sum_{n=k}^{\infty} d_n l_n^{(k)} = L_k[F].$$

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Евграфов М. А. Основные понятия интерполяции целых функций. препринт 20. М.: Ин-т прикладной матем. АН СССР, 1975.
- [2] Маркушевич А. И. О базисе в пространстве аналитических функций // Матем. сб. 1945. Т. 17. № 2. С. 211–252.
- [3] Казьмин Ю. А. Возмущенные многочлены Аппеля и ассоциированные с ними системы функций // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 1. С. 19–22.
- [4] Осколков В. А. О базисности некоторых полиномиальных систем в пространствах целых функций экспоненциального типа // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 3. С. 179–191.
- [5] Евграфов М. А. Интерполяционная задача Абеля–Гончарова. М.: Гостехиздат, 1954.
- [6] Евграфов М. А. Метод близких систем в пространстве аналитических функций и его применения к интерполяции // Труды московского матем. общества. 1956. Т. 5. С. 89–201.
- [7] Осколков В. А. Об одном критерии квазистепенного базиса и его применении // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 6. С. 72–78.
- [8] Осколков В. А. Свойства функций, заданных значениями их линейных функционалов. Дисс. ... д.ф.-м.н. М.: МГУ, 1994.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
15.04.1999