Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Магомедов, Т. А. Магомедов, О приложении алгоритма вычисления подграфа максимальной плотности к задаче оптимизации расписания, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 2, 313–315

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8770>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 09:53:21

О приложении алгоритма вычисления подграфа максимальной плотности к задаче оптимизации расписания

А. М. Магомедов, Т. А. Магомедов

1. Задача вычисления плотности графа. Под *плотностью* графа понимают отношение числа ребер к числу вершин в графе. Для неориентированного графа $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, в [1] построен быстрый алгоритм вычисления подграфа графа G , обладающего максимальной плотностью (в дальнейшем тексте – $\text{density}(G)$). Если $M(v, e)$ – время, требуемое для нахождения пропускной способности минимального разреза в сети с v вершинами и e ребрами, то алгоритм [1] вычисляет значение $\text{density}(G)$ за время

$$O(M(n, n + m) \log n). \quad (1)$$

В данном сообщении предлагается подход к вычислению $\text{density}(G)$, отличный от подхода, принятого в [1], и рассмотрено его применение к проверке условий существования непрерывного расписания обслуживания.

2. Сведение к вычислению паросочетаний в двудольных графах. Для заданного графа $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_l\}$, построим двудольную интерпретацию $G_1 = (X_1, Y_1, E_1)$: $X_1 = \{x_1, \dots, x_l\}$, $Y_1 = \{y_1, \dots, y_n\}$, $d_{G_1} x_i = 2$ для всех $x_i \in X_1$; $(x_i, y_j) \in E_1$ в том и только в том случае, если ребро e_i и вершина v_j инцидентны в графе G .

Пусть $\Gamma_1(S)$ обозначает множество вершин, смежных в графе G_1 с вершинами множества $S \subseteq X_1$; отношение $|S|/|\Gamma_1(S)|$ есть плотность подграфа, порожденного в графе G подмножеством, образованном ребрами, соответствующими вершинам множества S ;

$$\text{density}(G) = \max_{S \subseteq X_1} \left\{ \frac{|S|}{|\Gamma_1(S)|} \right\}. \quad (2)$$

Для целого положительного p определим граф $G^{(p)} = (X^{(p)}, Y^{(p)}, E^{(p)})$ следующим образом: положим $X^{(p)} = X_1$ и для каждой вершины $y \in Y_1$ и всех инцидентных ей в графе G_1 ребер $(x_1, y), \dots, (x_k, y)$ выполним замену на конструкцию из p новых вершин $y_1, \dots, y_p \in Y^{(p)}$ и pk новых ребер $(x_j, y_i) \in E^{(p)}$; $j = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, p$. Множество вершин, смежных в графе $G^{(p)}$ с вершинами множества $S \subseteq X_p$, обозначим $\Gamma^{(p)}(S)$. Так как $|\Gamma^{(p)}(S)| = p|\Gamma_1(S)|$, условия

$$\frac{|S|}{|\Gamma_1(S)|} \leq p \quad \forall S \subseteq X_1 \quad (3)$$

равносильны условиям

$$\frac{|S|}{|\Gamma^{(p)}(S)|} \leq 1 \quad \forall S \subseteq X^{(p)},$$

которые согласно теореме Холла [2; 8.23] суть условия существования в графе $G^{(p)} = (X^{(p)}, Y^{(p)}, E^{(p)})$ полного паросочетания множества $X^{(p)}$ в множество $Y^{(p)}$. Таким образом, вычисление $\max_{S \subseteq X_1} \{|S|/|\Gamma_1(S)|\}$ сводится к нахождению в множестве $\{1, \dots, n\}$ наибольшего элемента p , для которого в соответствующем графе $G^{(p)} = (X^{(p)}, Y^{(p)}, E^{(p)})$ существует полное паросочетание множества $X^{(p)}$ в множество $Y^{(p)}$. Применение дихотомии приведет к появлению в оценке сомножителя $\log n$, аналогичного сомножителю в оценке (1); напомним, что вычисление максимального паросочетания в двудольном графе из k вершин может быть выполнено за время $O(k^{5/2})$ [3].

3. Приложение. Пусть исходные данные к расписанию обслуживания n требований l приборами заданы в виде графа $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, \dots, e_l\}$: если $e_i = (v_k, v_j)$, то набор из двух чисел k и j обозначим ω_i ; i -й прибор должен выполнить одну операцию с каждым из требований (необязательно различных) из набора ω_i ; семейство наборов ω_i , $i = 1, \dots, l$, обозначим Ω . Предполагается, что длительность каждой операции равна единице, порядок выполнения операций произволен, условия предшествования отсутствуют, запрещается одновременное обслуживание одним прибором более одного требования и одного требования более чем одним прибором.

Задача о существовании *непрерывного* расписания, соответствующего исходным данным, формулируется следующим образом (через q обозначена максимальная степень вершины в графе G): *существует ли матрица T из l строк и q столбцов и с элементами из множества $\{0, 1, \dots, n\}$ такая, что ненулевые элементы в каждом столбце матрицы попарно различны, в каждой i -й строке ненулевые элементы образуют набор ω_i и располагаются в соседних ячейках строки?*

Интерпретация: если $T_{i,j} = k$, то в j -ю единицу времени прибор i

- а) выполняет операцию над требованием k , если $k > 0$;
- б) не обслуживает никакого требования, если $k = 0$.

При $l \geq 2$ и отсутствии ограничений на количество требований, предписанных отдельным приборам, в [4] доказана NP -полнота задачи о непрерывном расписании.

Равносильная формулировка: требуется проверить возможность раскраски q цветами ребер двудольной интерпретации G_1 графа G так, чтобы

- а) для каждой вершины $x_i \in X$ цвета инцидентных ребер отличались точно на 1;
- б) для каждой вершины $y_j \in Y$ все инцидентные ребра имели разные цвета.

Вопросы NP -трудности проблемы в общем виде рассмотрены в [5].

Для четных q непрерывное расписание всегда существует [6]. Мы рассматриваем случай, когда q нечетно, $q = 2p + 1$. Несмотря на простоту формулировки, для этого случая неизвестно даже, разрешима ли задача за полиномиальное время. В [7] приведен развернутый обзор по данной проблематике.

Пусть искомое непрерывное расписание T существует. Обозначим: $N(\Omega')$ – количество различных чисел в наборах ω_i подсемейства $\Omega' \subseteq \Omega$; Ω'_i – подсемейство, образованное в Ω' наборами, один из элементов каждого из которых расположен в столбце с номером $2i$ расписания T , $i = 1, \dots, p$. Легко видеть, что

$$|\Omega'| \leq p \cdot \max_{i=1, \dots, p} |\Omega'_i| \leq p \cdot N(\Omega').$$

Итак, для существования непрерывного расписания необходимо выполнение условий

$$\frac{|\Omega'|}{N(\Omega')} \leq p \quad \forall \Omega' \subseteq \Omega. \quad (4)$$

Эти условия равносильны условиям (3). Таким образом, мы доказали, что их проверка сводится к вычислению $\text{density}(G)$.

В [8] доказано, что при $p = 1, 2$ эти условия являются и достаточными для существования непрерывного расписания.

ГИПОТЕЗА. Условия (4) являются необходимыми и достаточными для существования непрерывного расписания в общем случае.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. V. Goldberg, *Finding a Maximum Density Subgraph*, Technical Report No. UCB/CSD-84-171, University of California, Berkeley, CA, 1984. [2] М. Свами, К. Тхуласираман, *Графы, сети и алгоритмы*, Мир, М., 1984. [3] J. E. Hopcroft, R. M. Karp, *SIAM J. Comput.*, **2** (1973), 225–231. [4] В. С. Танаев, Ю. Н. Сотсков, В. А. Струевич, *Теория расписаний. Многостадийные системы*, Экономико-математическая библиотека, Наука, М., 1989. [5] В. Г. Визинг, *Дискретн. анализ и исслед. опер.*, сер. 1, **12:3** (2005), 48–53. [6] А. М. Магомедов, *Матем. заметки*, **85:1** (2009), 65–72. [7] В. Г. Визинг, А. В. Пяткин, Российская конференция “Дискретный анализ и исследование операций” (Новосибирск, 28 июня – 2 июля 2004), Материалы конференции, Изд-во Ин-та математики, Новосибирск, 2004, 6–11. [8] А. М. Магомедов, А. А. Сапоженко, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем., кибернет.*, 2010, № 1, 39–44.

А. М. Магомедов

Дагестанский государственный университет

Поступило

04.02.2010

Т. А. Магомедов

Дагестанский государственный университет

E-mail: magomedtagiri@yandex.ru