Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Сидоров, Р. Ю. Леонтьев, А. И. Дрегля, О малых решениях нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 1, 120–135

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8771>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:21:08

О малых решениях нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях

Н. А. Сидоров, Р. Ю. Леонтьев, А. И. Дрегля

Рассматривается нелинейное операторное уравнение $B(\lambda)x + R(x, \lambda) = 0$ с параметром λ , являющимся элементом линейного нормированного пространства Λ . Линейный оператор $B(\lambda)$ не имеет ограниченного обратного при $\lambda = 0$. Область значений оператора $B(0)$ может быть незамкнутой. Нелинейный оператор $R(x, \lambda)$ непрерывен в окрестности нуля, $R(0, 0) = 0$. Получены достаточные условия существования непрерывного решения $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ с максимальным порядком малости в некотором открытом множестве S пространства Λ . Нуль пространства Λ принадлежит границе множества S . Решения строятся методом последовательных приближений.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Пусть X, Y – банаховы пространства, Λ – линейное нормированное пространство. Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$B(\lambda)x + R(x, \lambda) = 0, \quad (1.1)$$

где $B(\lambda)$ – замкнутый линейный оператор с плотной в пространстве X областью определения, не зависящей от параметра $\lambda \in \Lambda$. Нелинейный оператор $R: X \times \Lambda \rightarrow Y$ непрерывен в окрестности нуля по x и λ , $R(0, 0) = 0$.

Требуется построить решение $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$, $S \in \Lambda$ (далее, кратко, при $\lambda \rightarrow 0$) максимального порядка малости (“минимальную ветвь” малого решения) в нерегулярном случае методом последовательных приближений, когда область значений оператора $B(0)$ может быть незамкнутой и размерность $\dim N(B(0)) \geq 1$. Основы теории ветвления решения нелинейных уравнений изложены в известной монографии [1]. Обзоры некоторых последних результатов в этой области имеются в [2]. В данной работе рассматривается задача построения “минимальных ветвей” решения уравнения (1.1) в предположении, что оператор $B(\lambda)$ имеет обратный оператор при $\lambda \in S$, причем

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \quad \text{при } S \ni \lambda \rightarrow 0, \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (госконтракт № П696). Работа третьего автора выполнена при поддержке Дублинского технологического института (Ирландия) и компании Klüber Lubrication KG (Германия).

где S – открытое множество в пространстве Λ , границе которого принадлежит точка $\lambda = 0$, $a(\lambda): S \subset \Lambda \rightarrow (0, +\infty)$ – положительный непрерывный функционал, $a(0) = 0$. Множество S назовем *секториальной окрестностью нуля*. Оценки вида (1.2) выполняются в ряде приложений. Например, пусть $X = Y = H$. Рассмотрим оператор $B(\lambda) = B_0 + a(\lambda)B_1$, где B_0 – самосопряженный неотрицательный оператор, B_1 – самосопряженный положительный оператор, т.е. $(B_0x, x) \geq 0$, $(B_1x, x) \geq \gamma(x, x)$ для всех $x \in H$. Тогда

$$\|(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}\| \leq \frac{1}{\gamma a(\lambda)}$$

и оценка (1.2) будет выполнена.

Если $B(0)$ – фредгольмов оператор, то для построения асимптотически малых решений уравнения (1.1) можно использовать классические результаты теории ветвления решений нелинейных уравнений [1]. Общие теоремы существования точек бифуркации во фредгольмовом случае и их приложение можно найти в монографиях [2; с. 5–49], [3; гл. 2, 5, 7], работе [4] и др. Приближенные итерационные методы и их регуляризация в окрестности точек ветвления изучались в [3], [5]–[7] и др. Однако, в этих работах предполагалось, что $\Lambda = \mathbb{R}^1$, область значений оператора $B(0)$ была замкнутой и использовался сложный способ выбора начальных приближений.

Введем множество

$$\Omega = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r, \lambda \in S\}. \quad (1.3)$$

Цель этой статьи – доказательство конструктивных теорем существования и единственности минимальных ветвей решений уравнения (1.1) в областях вида (1.3) с векторным параметром λ в секториальной окрестности S в общем случае, когда оператор $B(0)$ может не быть нормально разрешимым и $\dim N(B(0)) \geq 1$.

Результаты статьи получены на основе методов из [1]–[3], [5]–[7] и являются дальнейшим развитием теории приближенных методов в окрестности точек ветвления решений нелинейных уравнений. На основании доказанных теорем искомая ветвь решения строится методом последовательных приближений, сходящимся в области S при нулевом начальном приближении. Таким образом, в излагаемом методе нет проблемы выбора начального приближения.

В разделе 2 подробно рассмотрен случай, когда $B(0)$ – фредгольмов оператор и регуляризация соответствующего метода последовательных приближений основана на применении обобщенной леммы Шмидта ([1; § 21, п. 21.4] и [8; с. 221]). Показано, что во фредгольмовом случае при решении уравнения (1.1) можно построить метод последовательных приближений, применяя “асимптотические регуляризаторы”, ранее использованные в работе [9] и монографии [3].

В разделе 3 работы приведены теоремы существования и метод последовательных приближений минимальных ветвей решений уравнения (1.1) при выполнении оценки (1.2). Область значений оператора $B(0)$ может быть не замкнутой. В соответствующих итерационных формулах раздела 3 присутствует оператор $B^{-1}(\lambda)$. Поэтому ввиду неизбежных погрешностей вычислений этот метод последовательных приближений требует регуляризации в смысле теории некорректных задач [10]. Регуляризация может быть проведена в окрестности точки ветвления решения сдвигом по параметру λ [11]. В некоторых конкретных примерах, когда оператор $B^{-1}(\lambda)$

построен явно, а точка $\lambda = 0$ оказывается устранимой особой точкой, регуляризация достигается путем сокращения на допустимую степень параметра λ в редуцированном уравнении.

Общие теоремы существования и метод последовательных приближений иллюстрируются на примерах решения часто встречающихся в приложениях нелинейных интегральных уравнений II и I рода и краевых задач.

2. Построение минимальных ветвей решений уравнения (1.1) с фредгольмовым оператором $B(0)$. Пусть уравнение (1.1) имеет вид

$$B(\lambda)x = R(x, \lambda) + b(\lambda). \quad (2.1)$$

Линейный оператор $B(\lambda)$ удовлетворяет условиям введения, причем $B(0)$ – фредгольмов оператор, $\{\varphi_i\}_1^n$ – базис в $N(B(0))$, $\{\psi_i\}_1^n$ – базис в $N^*(B(0))$. Нелинейный оператор $R: X \times \Lambda \rightarrow Y$ непрерывен по x и λ в окрестности нуля, $R(0, 0) = 0$,

$$\|R(x_1, \lambda) - R(x_2, \lambda)\| \leq L(r)\|x_1 - x_2\|,$$

при $|\lambda| \leq \rho$ и x_1, x_2 из шара $S(0, r)$, $L(r) = O(r)$. Функция $b(\lambda): \Lambda \rightarrow Y$ определена и непрерывна в окрестности точки $\lambda = 0$, $b(0) = 0$. Так как $B(0)$ – фредгольмов оператор, то нетрудно указать способ проверки условия (1.2) построением обратного оператора $B^{-1}(\lambda)$. Действительно, введем, согласно обобщенной лемме Шмидта [1; § 21, п. 21.4], ограниченный оператор Треногина

$$\Gamma = \left(B(0) + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1}.$$

Здесь $\langle \varphi_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}$, $\langle z_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}$.

Введем обозначение $A(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} B(\lambda) - B(0)$. Пусть при $x \in D(B(0))$

I. $\|A(\lambda)x\| \leq c(\lambda)(\|x\| + b\|B(0)x\|)$, где $c(\lambda): S \subset \Lambda \rightarrow (0, +\infty)$ – определенный в секториальной окрестности S нуля положительный непрерывный функционал, $c(0) = 0$, $b \geq 0$.

Заметим, что $\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} A(\lambda)\Gamma = 0$ и оператор $I - A(\lambda)\Gamma$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S_0 \subset S$, где $\|A(\lambda)\Gamma\| \leq q < 1$.

Пусть

II. $|\det \langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} A(\lambda) \varphi_i, \psi_k \rangle_{i,k=1,\dots,n}| = \Delta(\lambda)$, где $\Delta(\lambda) \sim a(\lambda)$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$, $a(\lambda)$ – положительный непрерывный функционал, $a(0) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $|\det \langle \sum_{j=0}^{p-1} (A(\lambda)\Gamma)^j A(\lambda) \varphi_i, \psi_k \rangle_{i,k=1,\dots,n}| \sim c\|\lambda\|^\alpha$ при $\lambda \rightarrow 0$ и $\alpha \leq p$, то условие II выполняется при $a(\lambda) = c\|\lambda\|^\alpha$.

ЛЕММА 1. Пусть $B(0)$ – фредгольмов оператор и выполнены условия I, II. Тогда оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$ и выполнена оценка (1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать решение линейного уравнения $B(\lambda)x = f$ при $\lambda \in S$ в виде

$$x = \Gamma u + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i,$$

где $\langle u, \psi_k \rangle = 0$, $k = 1, \dots, n$. Тогда $u = (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1}(f + A(\lambda)\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i)$. При этом вектор $c = (c_1, \dots, c_n)'$ определится при $\lambda \in S$ из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n \langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} A(\lambda) \varphi_i, \psi_k \rangle c_i = \langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} f, \psi_k \rangle, \quad k = 1, \dots, n,$$

с невырожденной при $\lambda \in S$ матрицей, согласно условию II. В силу условия II выполнена оценка $\|c\| = O(1/a(\lambda))$ и лемма 1 доказана.

Далее пусть $B(\lambda) = B_0 - c(\lambda)B_1$, и при $x \in D(B(0))$ $\|B_1 x\| \leq a(\|x\| + b\|B_0 x\|)$, $a > 0$, $b \geq 0$. Пусть [1; гл. 9]

III. элементы $\{\varphi_i^{(k)}\}$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p_i$, образуют полный B_1 -жорданов набор фредгольмова оператора B_0 , а функционалы $\{\psi_i^{(k)}\}$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p_i$, образуют полный B_1^* -жорданов набор оператора B_0^* .

Напомним [1; гл. 9], что не ограничивая общности в условии III далее можно считать

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(k)} &= (\Gamma B_1)^{k-1} \varphi_i^{(1)}, \quad \psi_i^{(k)} = (\Gamma^* B_1^*)^{k-1} \psi_i^{(1)}, \quad k = 2, \dots, p_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \langle B_1 \varphi_i^{(p_i)}, \psi_k^{(1)} \rangle &= \delta_{ik}, \quad \langle B_1^* \psi_i^{(p_i)}, \varphi_k^{(1)} \rangle = \delta_{ik}, \\ \Gamma &= \left(B_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1}, \quad \gamma_i = B_1^* \psi_i^{(p_i)}, \quad z_i = B_1 \varphi_i^{(p_i)}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейный оператор $\Gamma(\lambda)$ называется *левым асимптотическим регуляризатором* оператор-функции $B(\lambda)$, если $\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} \Gamma(\lambda)B(\lambda)x = x$ при всех $x \in D(B)$.

Аналогично вводится правый асимптотический регуляризатор оператора $B(\lambda)$. Если $\lambda = 0$ является изолированной особой фредгольмовой точкой оператор-функции $B(\lambda)$, то асимптотические регуляризаторы можно построить в явном виде.

ЛЕММА 2. Пусть $B(\lambda) = B_0 - c(\lambda)B_1$ и условие III выполнено. Тогда в окрестности $0 < |c(\lambda)| < \varepsilon$ существует ограниченный обратный оператор $B^{-1}(\lambda)$, а также левый и правый регуляризаторы $\Gamma_l(\lambda)$ и $\Gamma_r(\lambda)$ оператора $B(\lambda)$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} \Gamma_l(\lambda) &= \Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(p_i+1-s)} \rangle \varphi_i^{(1)}, \\ \Gamma_r(\lambda) &= \Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle \varphi_i^{(p_i+1-s)}. \end{aligned}$$

При этом имеем $B^{-1}(\lambda) = \Gamma_r(\lambda)(I - c(\lambda)B_1\Gamma)^{-1}$, где $\|B^{-1}(\lambda)\| = O(1/c^p(\lambda))$, $p = \max(p_1, \dots, p_n)$.

Если B_1 – ограниченный оператор и $0 < |c(\lambda)| < 1/(\|\Gamma\| \|B_1\|)$, то будут справедливы операторные тождества

$$B^{-1}(\lambda) = (I - c(\lambda)\Gamma B_1)^{-1} \Gamma_l(\lambda) = \Gamma_r(\lambda)(I - c(\lambda)B_1\Gamma)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование обратного оператора $B^{-1}(\lambda)$ в окрестности $0 < |c(\lambda)| < \varepsilon$ при выполнении условия III хорошо известно [1; с. 428]. Справедливость операторных тождеств

$$\Gamma_l(\lambda)(B_0 - c(\lambda)B_1) = I - c(\lambda)\Gamma B_1, \quad (B_0 - c(\lambda)B_1)\Gamma_r(\lambda) = I - c(\lambda)B_1\Gamma$$

проверяется простыми вычислениями, исходя из определения оператора

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \left(B_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1}$$

и построения элементов $\{\varphi_i^{(j)}\}$, $\{\psi_i^{(j)}\}$, $\{\gamma_i\}$, $\{z_i\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Используя определение оператора Γ и тождества

$$\langle z_l, \psi_i^{(k)} \rangle = 0$$

при $i \neq l$, $k \neq 1$, легко проверить, что регуляризаторы $\Gamma_r(\lambda)$ и $\Gamma_l(\lambda)$ являются эпиморфизмами.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Лемма 3 обобщается на случай ограниченных операторов $B(\lambda) = B_0 - c(\lambda)MB_1$, если линейный оператор $M \in \mathcal{L}(X \rightarrow X)$ коммутирует с операторами B_1 , B_0 и имеет ограниченный обратный. Для такого оператора, если выполнено условие III, то левый регуляризатор имеет вид

$$\Gamma_l(\lambda) = \Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \langle M^{-s} \cdot, \psi_i^{(p_i+1-s)} \rangle \varphi_i^{(1)}$$

и выполнится тождество

$$\Gamma_l(\lambda)(B_0 - c(\lambda)MB_1) = I - c(\lambda)\Gamma MB_1.$$

Левые и правые регуляризаторы для оператора $L(\partial/\partial t)B_0 - B_1$ с дифференциальным оператором при фредгольмовом операторе B_0 вводились в ([3; гл. 1]). Подобные регуляризаторы использовались при численном решении алгебро-дифференциальных уравнений [12].

Левые и правые регуляризаторы можно использовать при построении решений уравнения (2.1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор $B(\lambda) = B_0 - c(\lambda)B_1$ и выполнено условие III, причем $\max(p_1, \dots, p_n) = p$, B_1 – ограниченный оператор. Пусть $\|b(\lambda)\| = o(c(\lambda))$, $\|R(x, \lambda)\| = O(\|x\|^l)$, $l \geq 2$, $m \geq p \cdot l/(l-1)$. Тогда уравнение (2.1) при $\lambda \in S_0 \subset S$ имеет единственную минимальную ветвь $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Ветвь $x(\lambda)$ удовлетворяет оценке $\|x(\lambda)\| = o(c(\lambda)^{p/(l-1)})$, последовательность $x_n(\lambda)$, где

$$x_n = c(\lambda)\Gamma B_1 x_{n-1} + \Gamma_l(\lambda)(R(x_{n-1}, \lambda) + b(\lambda)), \quad (2.2)$$

$x_0 = 0$, $n = 1, 2, \dots$, сходится при $\lambda \in S_0$ к этой ветви.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к обеим частям уравнения (2.1) оператор $\Gamma_l(\lambda)$, являющийся при $\lambda \in S$ эпиморфизмом, получим уравнение

$$x - c(\lambda)\Gamma B_1 x = \Gamma_l(\lambda)(R(x, \lambda) + b(\lambda)). \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) с помощью замены

$$x = c(\lambda)^{p/(l-1)} V \quad (2.4)$$

приведем к виду

$$V - c(\lambda)\Gamma B_1 V = c(\lambda)^{-p/(l-1)} \Gamma_l(\lambda)(R(c(\lambda)^{p/(l-1)} V, \lambda) + b(\lambda)). \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) в силу условий теоремы 1 в окрестности точки $\lambda = 0$, $V = 0$ удовлетворяет всем условиям теоремы о неявном операторе [8; с. 409]. Поэтому уравнение (2.5) имеет единственное решение $V(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Последовательность

$$V_n = c(\lambda)\Gamma B_1 V_{n-1} + c(\lambda)^{-p/(l-1)} \Gamma_l(\lambda)(R(c(\lambda)^{p/(l-1)} V_{n-1}, \lambda) + b(\lambda)),$$

$V_0 = 0$, сходится к этому решению. Учитывая замену (2.4), убеждаемся, что и последовательные приближения (2.2) сходятся к искомой ветви.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Система разветвления малых решений уравнения (2.1) (см. [8; с. 429]) в условиях теоремы 1 имеет вид

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}(\lambda) \xi_k = \Gamma_i(\xi, \lambda) + b_i(\lambda), \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$a_{ik}(\lambda) = \delta_{ik} c(\lambda)^{p_k} + o(c(\lambda)^{p_k}), \quad i, k = 1, \dots, n, \\ |\Gamma_i(\xi, \lambda)| = O(|\xi|^l), \quad |b_i(\lambda)| = o(|c(\lambda)|^m), \quad m \geq \frac{\max(p_1, \dots, p_n) \cdot l}{l-1}.$$

Эта система имеет в области $|\xi| \leq rc(\lambda)^{p/(l-1)}$ единственное минимальное малое решение с оценкой $|\xi| = o(c(\lambda)^{p/(l-1)})$. Поэтому существование и единственность минимальной ветви решения уравнения (2.1) вытекают из структуры системы разветвления. Отметим, что в случае задачи о точке бифуркации, когда $b_i(\lambda) = 0$, минимальная ветвь будет тривиальным решением.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть в условиях теоремы 1 $\langle B_1 \varphi_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \dots, n$. Тогда последовательность x_n , где x_n определяется единственным образом из линейного уравнения

$$\left(B_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right) x_n = \left(I - \frac{1}{c(\lambda)} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i \right) (R(x_{n-1}, \lambda) + b(\lambda)) + c(\lambda) B_1 x_{n-1}, \quad (2.6)$$

$x_0 = 0$, $\gamma_i = B_1^* \psi_i$, $z_i = B_1 \varphi_i$, сходится к минимальной ветви решения уравнения (2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\langle B_1\varphi_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}$, левый регуляризатор в формуле (2.2) имеет вид

$$\Gamma_l(\lambda) = \Gamma - \frac{1}{c(\lambda)} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle \varphi_i.$$

Поэтому на основании теоремы 1 последовательность x_n определяется следующим образом:

$$x_n = c(\lambda)\Gamma B_1 x_{n-1} + \left(\Gamma - \frac{1}{c(\lambda)} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle \varphi_i \right) (R(x_{n-1}, \lambda) + b(\lambda)),$$

$x_0 = 0$. Умножая обе части этого выражения на обратный оператор Γ^{-1} , придем к искомому результату (2.6).

ПРИМЕР 1. Интегральное уравнение

$$u(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cos s [(1 + \lambda)u(s) - su^3(s)] ds = \lambda^3 \cos x$$

имеет ровно три малых решения

$$u^1 = -\lambda^2 \cos x + O(|\lambda|^3), \quad u^{2,3} = \pm 2\sqrt{\frac{\lambda}{3\pi}} \cos x + O(|\lambda|)$$

и удовлетворяет условиям следствия 3. При этом $n = 1$, $\varphi = \psi = \gamma = z = \cos x / \sqrt{\pi}$, $\Gamma = I$.

Последовательные приближения, сходящиеся к минимальной ветви $u^1(x, \lambda)$, можно строить согласно следствию 1 по формуле

$$u_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cos s \left(\lambda u_{m-1}(s) - su_{m-1}^3(s) + \frac{s}{\lambda} u_{m-1}^3(s) \right) ds - \lambda^2 \cos x + \lambda^3 \cos x,$$

$$u_0(x) = 0.$$

3. Достаточные условия существования минимальной ветви решения уравнения (1.1) и метод последовательных приближений в общем случае: оператор $B(0)$ может не являться нормально разрешимым. Приведем достаточные условия существования малого решения уравнения (1.1) в некоторой области $\Omega_0 \subseteq \Omega$ с указанием способа построения решения и его асимптотики в общем случае, когда область значений оператора $B(0)$ может быть не замкнута.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в области Ω выполнено условие (1.2) и при этом

1) справедливо неравенство

$$\|R(x_1, \lambda) - R(x_2, \lambda)\| \leq L(\lambda)r\|x_1 - x_2\|, \quad (3.1)$$

где $L(\lambda) = O(a(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$;

2) имеет место оценка $\|R(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Тогда найдется область

$$\Omega_0 = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r_0, \lambda \in S_0 \subseteq S, 0 < r_0 \leq r\},$$

в которой существует единственное решение уравнения (1.1) $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Последовательность $\{x_n\}$, $x_0 = 0$, где x_n строится методом последовательных приближений (см. формулу (3.3) в доказательстве), сходится к этому решению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью замены $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$ уравнение (1.1) приведем к эквивалентной форме

$$V = -\frac{1}{a(\lambda)}B^{-1}(\lambda)R(a(\lambda)V, \lambda) \equiv \Phi(V, \lambda). \quad (3.2)$$

При этом в силу оценки (3.1)

$$\|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| \leq \|B^{-1}(\lambda)\|L(\lambda)r\|V_1 - V_2\|$$

при $\lambda \in S$, $\|V_i\| \leq r$.

В силу оценки (1.2) имеем $\|B^{-1}(\lambda)\|L(\lambda) \leq C$ при $\lambda \in S$, где $C > 0$ – фиксированная постоянная. Но тогда

$$\|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| \leq Cr\|V_1 - V_2\|.$$

Пусть $0 < q < 1$. Выберем $r_0 \leq \min\{q/C, r\}$. Тогда оператор $\Phi(V, \lambda)$ будет сжимающим в шаре $\|V\| \leq r_0$ при всех $\lambda \in S$.

Далее,

$$\|\Phi(V, \lambda)\| \leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda)\| + \|\Phi(0, \lambda)\| \leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)\|\|R(0, \lambda)\|.$$

В силу оценки (1.2) и условия 2) теоремы 2 существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при всех $\lambda \in S$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{a(\lambda)}\|B^{-1}(\lambda)\|\|R(0, \lambda)\| \leq (1 - q)r_0$$

и, следовательно,

$$\|\Phi(V, \lambda)\| \leq r_0 \quad \text{при} \quad \lambda \in S_0, \quad \|V\| \leq r_0.$$

Таким образом, на основании принципа сжимающих отображений уравнение (3.2) имеет единственное решение, последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = -B^{-1}(\lambda)R(x_{n-1}, \lambda), \quad (3.3)$$

$x_0 = 0$, сходится при всех $\lambda \in S_0$. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В условиях теоремы 2 в шаре $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$ при $\lambda \in S_0$ существует единственное малое решение. Заметим, что порядок этого решения, как бесконечно малой в нуле, может оказаться выше порядка бесконечно малой величины $a(\lambda)$. В области $\|x\| \geq a(\lambda)r_0$ уравнение (1.1) может иметь и другие малые непрерывные решения, очевидно с более низким порядком малости, чем порядок решения $x(\lambda)$, единственного в шаре $S(0, a(\lambda)r_0)$, к которому сходится последовательность (3.3). Для отыскания решений более низких порядков малости надо строить более тонкие приближенные методы, см. [1]–[3], [5]–[7].

Следующие теоремы 3, 4 позволяют ослабить условие 2) теоремы 2, заменив его на предположение существования непрерывной функции $b(\lambda): S \subset \Lambda \rightarrow Y$, $b(0) = 0$, такой, что

$$\|R(0, \lambda) - b(\lambda)\| = o(a^2(\lambda)) \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

В теоремах 3, 4 предполагается, что

$$B(\lambda) = B + a(\lambda)A + \omega(\lambda), \quad (3.5)$$

где B, A – замкнутые линейные операторы с плотными в банаховом пространстве X областями определения, $D(B) \subseteq D(A)$, $\omega(\lambda)$ – линейная непрерывная оператор-функция, $\|\omega(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$.

В доказательствах теорем 3, 4, как и в теореме 2, используется принцип сжимающих отображений и эквивалентное уравнение (3.2). При этом часть доказательства, констатирующая сжимаемость соответствующего оператора, будет опускаться, как подобная доказательству в теореме 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены оценки (1.2), (3.1), (3.4), причем оператор $B(\lambda)$ имеет вид (3.5). Пусть линейное уравнение $Bx = b(\lambda)$ имеет при $\lambda \in S$ решение $x^*(\lambda)$, причем $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$, $\|Ax^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$. Тогда в области Ω_0 существует единственное малое решение уравнения (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично теореме 2 уравнение (1.1) с помощью замены $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$ приводим к виду

$$V = \Phi(V, \lambda), \quad (3.6)$$

где оператор $\Phi(V, \lambda)$ определен в формуле (3.2) и на основании доказательства теоремы 2 в шаре $\|V\| \leq r_0$ при всех $\lambda \in S$ является сжимающим.

Покажем, что найдется область $S_0 \subseteq S$ такая, что при $\lambda \in S_0$ имеем $\Phi: S(0, r_0) \rightarrow S(0, r_0)$. Действительно, воспользовавшись установленной сжимаемостью оператора $\Phi(V, \lambda)$, представлением (3.5) и оценками (1.2), (3.1), (3.4) имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|\Phi(V, \lambda)\| &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)R(0, \lambda)\| \\ &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \|R(0, \lambda) - b(\lambda)\| + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)Bx^*(\lambda)\| \\ &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \|R(0, \lambda) - b(\lambda)\| \\ &\quad + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)(B(\lambda) - a(\lambda)A - \omega(\lambda))x^*(\lambda)\| \\ &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \|R(0, \lambda) - b(\lambda)\| + \frac{1}{a(\lambda)} \|x^*(\lambda)\| \\ &\quad + \|B^{-1}(\lambda)Ax^*(\lambda)\| + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\omega(\lambda)x^*(\lambda)\|. \end{aligned}$$

Здесь в силу условий теоремы 3 последние 4 слагаемых стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow 0$. Следовательно, выбором области $S_0 \subseteq S$ сумму этих четырех слагаемых можно

сделать меньше, чем $(1 - q)r_0$ при всех $\lambda \in S_0$. Поэтому существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при всех $\lambda \in S_0$ имеем $\|\Phi(V, \lambda)\| \leq r_0$ в шаре $\|V\| \leq r_0$. Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если B – фредгольмов оператор и уравнение $Bx = b(\lambda)$ разрешимо, то можно положить $x^*(\lambda) = \Gamma b(\lambda)$, где Γ – оператор Треногина (см. [1; с. 340] и раздел 2 этой работы). Если при этом $\|b(\lambda)\| = o(a(\lambda))$, то, очевидно, выполнены оценки $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ и $\|Ax^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$.

В теоремах 2, 3 методом последовательных приближений строятся малые решения максимального порядка малости. При этом порядок малости построенного решения может оказаться выше порядка бесконечно малой $a(\lambda)$, так как главный член асимптотики решения в теоремах 2, 3 не выписан.

Теорема 4 решает вопрос о главном члене асимптотики минимальной ветви. В теореме 4 приведены достаточные условия существования и единственности малого непрерывного решения в некотором шаре $\|x - a(\lambda)V_0\| \leq a(\lambda)r_0$, где V_0 – определенный ненулевой элемент из пространства X . Для краткости записи введем обозначение

$$F(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} B(\lambda)x + R(x, \lambda).$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены оценки (1.2), (3.4), и пусть оператор $B(\lambda)$ имеет вид (3.5). Пусть существует элемент $V_0 \in X$ такой, что линейное уравнение

$$B(\lambda)x = F(a(\lambda)V_0, \lambda) \quad (3.7)$$

имеет решение $x^*(\lambda)$, $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$. Пусть в шаре $\|x - a(\lambda)V_0\| \leq a(\lambda)r$ выполнено условие 1) теоремы 2. Тогда существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ и $0 < r_0 \leq r$ такие, что при всех $\lambda \in S_0$ в шаре $\|x - a(\lambda)V_0\| \leq a(\lambda)r_0$ существует единственное непрерывное решение уравнения (1.1) вида $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$, где $V(\lambda) \rightarrow V_0$ при $\lambda \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим эквивалентное уравнение (3.6) с оператором $\Phi(V, \lambda)$ при $\lambda \in S$ сжимающим на основании доказательства теоремы 2 в некотором шаре $\|V - V_0\| \leq r_0$, где $0 < r_0 \leq r$.

Покажем, что существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при всех $\lambda \in S_0$ будет выполнено $\Phi(V, \lambda): S(V_0, r_0) \rightarrow S(V_0, r_0)$.

Действительно, используя сжимаемость оператора $\Phi(V, \lambda)$ имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|\Phi(V, \lambda) - V_0\| &\leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(V_0, \lambda)\| + \|\Phi(V_0, \lambda) - V_0\| \\ &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)(R(a(\lambda)V_0, \lambda) + B(\lambda)a(\lambda)V_0)\| \leq qr_0 + \frac{\|x^*(\lambda)\|}{a(\lambda)}. \end{aligned}$$

В силу оценки $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при всех $\lambda \in S_0$ выполняется неравенство $\|x^*(\lambda)\|/a(\lambda) \leq (1 - q)r_0$ и, следовательно, $\|\Phi(V, \lambda) - V_0\| \leq r_0$. Теорема 4 доказана.

В теореме 4 остался открытым вопрос о построении элемента V_0 , входящего в правую часть линейного уравнения (3.7). Следующая лемма показывает, что этот элемент можно выбрать в подпространстве $N(B(0))$.

ЛЕММА 3. Пусть

- 1) $R(0, \lambda) = a^2(\lambda)b + o(a^2(\lambda))$,
- 2) существует элемент $\varphi \in N(B)$ такой, что линейное уравнение

$$Bx = b + A\varphi \quad (3.8)$$

имеет решение x_0 ,

- 3) $\|R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$,
- 4) для оператора $B(\lambda)$ вида (3.5) выполнена оценка (1.2).

Тогда уравнение (3.7) при $V_0 = \varphi$ имеет малое решение $x^*(\lambda)$, причем $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $V_0 = \varphi$ уравнение (3.7) примет вид

$$B(\lambda)x = a^2(\lambda)A\varphi + \omega(\lambda)a(\lambda)\varphi + R(a(\lambda)\varphi, \lambda).$$

Учитывая, что $A\varphi = Bx_0 - b$, получим следующее единственное решение уравнения (3.7):

$$x^*(\lambda) = B^{-1}(\lambda)\{a^2(\lambda)(Bx_0 - b) + \omega(\lambda)a(\lambda)\varphi + R(a(\lambda)\varphi, \lambda)\}.$$

Теперь покажем, что $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$. Для этого, воспользовавшись тождеством $B = B(\lambda) - a(\lambda)A - \omega(\lambda)$, перепишем решение в виде

$$x^*(\lambda) = B^{-1}(\lambda)\{a^2(\lambda)(-a(\lambda)A - \omega(\lambda))x_0 + R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda) + R(0, \lambda) - a^2(\lambda)b\} + a^2(\lambda)x_0.$$

Откуда очевидна оценка $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Если оператор B фредгольмов, $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_i\}$, $i = 1, \dots, n$, — базисы соответственно в $N(B)$ и $N^*(B)$, $\det\langle A\varphi_i, \psi_k \rangle_{i,k=1,\dots,n} \neq 0$, то искомого φ в условии 2) леммы 3 можно построить в виде $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$, где вектор $(c_1, \dots, c_n)$ определяется однозначно из условия разрешимости уравнения (3.8).

Как следствие теоремы 4 и леммы 3 получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия леммы 3. Пусть в шаре

$$\|x - a(\lambda)\varphi\| \leq a(\lambda)r$$

выполнено условие 1) теоремы 2. Тогда существует секториальная окрестность $S_0 \subseteq S$ и $0 < r_0 \leq r$ такие, что при всех $\lambda \in S_0$ в шаре $\|x - a(\lambda)\varphi\| \leq a(\lambda)r_0$ существует единственное малое решение $x(\lambda)$ уравнения (1.1), причем $x(\lambda) \sim a(\lambda)\varphi$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Если область значений оператора B не замкнута, то в $N(B)$ может не быть вектора φ , при котором уравнение (3.8) разрешимо. Если, однако, в $N(B)$ найдется вектор φ , при котором $b + A\varphi \in R(B)$, то можно получить такой результат.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены условия 1), 3) леммы 3, где в условии 3) элемент $\varphi \in N(B)$ такой, что $b + A\varphi \in R(B)$. Пусть в шаре $\|x - a(\lambda)\varphi\| \leq a(\lambda)r$ выполняется условие 1) теоремы 2. Тогда сохраняется результат следствия 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью замены $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$ введем эквивалентное (1.1) уравнение (3.2). Сжимаемость соответствующего оператора $\Phi(V, \lambda)$ при всех $\lambda \in S$ в некотором шаре $\|x - a(\lambda)\varphi\| \leq a(\lambda)r_0$, где $0 < r_0 \leq r$, показывается аналогично, как в теореме 2.

Остается показать, что существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при всех $\lambda \in S_0$ и всех $V \in S(\varphi, r_0)$ $\|\Phi(V, \lambda) - \varphi\| \leq r_0$. С этой целью, используя сжатость оператора $\Phi(V, \lambda)$, получим оценку

$$\begin{aligned} \|\Phi(V, \lambda) - \varphi\| &\leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(\varphi, \lambda)\| + \|\Phi(\varphi, \lambda) - \varphi\| \\ &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)(R(a(\lambda)\varphi, \lambda) + B(\lambda)a(\lambda)\varphi)\|. \end{aligned}$$

Так как $\varphi \in N(B)$, то $B(\lambda)\varphi = a(\lambda)A\varphi + \omega(\lambda)\varphi$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)(R(a(\lambda)\varphi, \lambda) + B(\lambda)a(\lambda)\varphi)\| \\ &\leq \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)(R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - a^2(\lambda)b + \omega(\lambda)a(\lambda)\varphi)\| + a(\lambda) \|B^{-1}(\lambda)(b + A\varphi)\|. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в последнем выражении бесконечно малая величина при $\lambda \rightarrow 0$ в силу условий следствия 3. Покажем, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} a(\lambda) \|B^{-1}(\lambda)(b + A\varphi)\| = 0,$$

так как $b + A\varphi \in \overline{R(B)}$. Рассмотрим оператор $a(\lambda)B^{-1}(\lambda)$ при $\lambda \in S$. В силу оценки (1.2) на любой последовательности $\{\lambda_n\}$ в S операторы $a(\lambda_n)B^{-1}(\lambda_n)$ являются равномерно ограниченными. Пусть элемент g принадлежит области значений оператора B , т.е. $g = Bx$, где $x \in D(B)$. Тогда

$$\begin{aligned} a(\lambda)B^{-1}(\lambda)g &= a(\lambda)B^{-1}(\lambda)Bx = a(\lambda)B^{-1}(\lambda)(B(\lambda) - a(\lambda)A - \omega(\lambda))x \\ &= a(\lambda)x - a^2(\lambda)B^{-1}(\lambda)Ax - a(\lambda)B^{-1}(\lambda)\omega(\lambda)x, \end{aligned}$$

где справа нормы всех слагаемых бесконечно малые при $\lambda \rightarrow 0$. Итак, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} a(\lambda) \times \|B^{-1}(\lambda)g\| = 0$ при всех $g \in R(B)$. Следовательно, на основании теоремы Банаха–Штейнгауза при всех $g \in \overline{R(B)}$ имеем $\lim_{\lambda \rightarrow 0} a(\lambda) \|B^{-1}(\lambda)g\| = 0$. Следствие 3 доказано.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$\int_0^1 tsx(s) ds + \lambda x(t) - \int_0^1 x^2(s) ds - t\lambda^3 = 0, \quad x(t) \in C_{[0,1]}. \quad (3.9)$$

Здесь

$$B(\lambda)x = \int_0^1 tsx(s) ds + \lambda x(t), \quad R(x, \lambda) = - \int_0^1 x^2(s) ds - t\lambda^3.$$

Обратный оператор $B^{-1}(\lambda)$ имеет вид

$$B^{-1}(\lambda)f = \frac{1}{\lambda}f(t) - \frac{3t}{(3\lambda + 1)\lambda} \int_0^1 sf(s) ds \quad (3.10)$$

и удовлетворяет оценке (1.2) при $a(\lambda) = |\lambda|$.

Далее, легко видеть, что в шаре $\|x\| \leq |\lambda|r$ выполнены условия 1) и 2) теоремы 2 с коэффициентом $L(\lambda) = 2|\lambda|$.

Таким образом, на основании теоремы 2 уравнение (3.9) имеет в шаре $\|x(t)\| \leq |\lambda|r_0 \leq |\lambda|r$ при всех λ , $0 < |\lambda| < \rho$, единственное малое решение.

Укажем регулярный способ построения искомого решения методом последовательных приближений. Используя замену $x(t) = \lambda V(t)$ и оператор (3.10), уравнение (3.9) сведем к регулярному виду:

$$V(t) = \left(1 - \frac{3t}{6\lambda + 2}\right) \int_0^1 V^2(s) ds + \frac{3\lambda^2 t}{3\lambda + 1}.$$

Единственное малое решение последнего можно построить методом последовательных приближений

$$V_{n+1}(t) = \left(1 - \frac{3t}{6\lambda + 2}\right) \int_0^1 V_n^2(s) ds + \frac{3\lambda^2 t}{3\lambda + 1},$$

выбрав в качестве начального приближения $V_0 = 0$ или методом неопределенных коэффициентов в виде ряда $V(t) = \sum_{i=2}^{\infty} V_i(t)\lambda^i$.

Построенное решение уравнения (3.9) будет иметь вид

$$x(t) = 3t\lambda^3 - 9t\lambda^4 + \frac{45t+6}{2}\lambda^5 - \frac{81t+36}{2}\lambda^6 + \dots$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin t \sin sx(s) ds + (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)x(t) - x^4(t) - f(t, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad x(t) \in C_{[0,\pi]}, \quad (3.11)$$

где вектор $\lambda \in \mathbb{R}^2$, $a_i \neq 0$. Функция $f(t, \lambda_1, \lambda_2)$ непрерывна по t и аналитична по λ_1, λ_2 . Секторная окрестность S , в которой ищется решение, определяется условием $\text{sign } \lambda_i = \text{sign } a_i$. Здесь

$$B(\lambda)x = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin t \sin sx(s) ds + (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)x(t).$$

Оператор $B^{-1}(\lambda)$ имеет вид

$$B^{-1}(\lambda)h = \frac{1}{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2} h(t) - \frac{2 \sin t}{\pi(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + 1)(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)} \int_0^\pi \sin sh(s) ds$$

и удовлетворяет оценке (1.2) при $a(\lambda) = |a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2|$.

Если $\|f(t, \lambda_1, \lambda_2)\| = o(|a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2|^2)$, то будут выполнены все условия теоремы 2.

Если $f(t, \lambda_1, \lambda_2) = \sin t \cdot \sum_{i+k=2} a_{ik} \lambda_1^i \lambda_2^k + o(|a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2|^2)$, то будут выполнены все условия теоремы 2.

В обоих случаях интегральное уравнение имеет решение $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с краевыми условиями:

$$\ddot{u} + u + R(u, x, \lambda) = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0, \quad (3.12)$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)'$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)'$, $R = (R_1, \dots, R_n)'$, $\lambda \in S \subset \mathbb{R}^m$.

Пусть

$$R_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}(\lambda)u_k + f_i(u, x, \lambda) + b_i(x, \lambda),$$

$a_{ik}(\lambda) - a(\lambda)b_{ik} = o(a(\lambda))$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$, $\det[b_{ik}] \neq 0$. Здесь $a(\lambda): S \subset \Lambda \rightarrow (0, +\infty)$ – положительная непрерывная функция, $a(0) = 0$.

Функции f_i непрерывны и дифференцируемы по u при $\|u\| < r$, $x \in [0, \pi]$, $\lambda \in S$, $|f_i| = O(\|u\|^3)$, $|b_i| = O(a^2(\lambda))$. Введем банахово пространство $X = \dot{C}_{[0, \pi]}^{(2)}$ дважды дифференцируемых вектор-функций u , удовлетворяющих граничным условиям в (3.12) и пространство $Y = C_{[0, \pi]}$ непрерывных вектор-функций. Тогда краевая задача (3.12) будет удовлетворять условиям теоремы 2 и иметь единственное минимальное решение $u \rightarrow 0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$. Последовательность $\{u_n\}$, где u_n – решение линейной краевой задачи

$$\begin{aligned} \ddot{u}_n + u_n + a(\lambda)Bu_n + R(u_{n-1}, x, \lambda) - a(\lambda)Bu_{n-1} &= 0, \\ u_n(0) = u_n(\pi) &= 0, \quad u_0 = 0, \quad B = [b_{ik}]_{i,k=1}^n, \end{aligned}$$

сходится при $\lambda \in S_0 \subset S$ к минимальной ветви решения задачи (3.12).

ПРИМЕР 5. Теорема 2 может быть использована при решении дифференциальных уравнений на полуоси. Действительно, рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(u, \lambda), \quad (3.13)$$

где λ – малый положительный параметр, $0 < x < \infty$. Пусть $f(u, \lambda)$ – непрерывная функция в области $\Omega = \{|u| < r, 0 < \lambda < \rho\}$, удовлетворяющая оценкам

- a) $\sup_{0 < \lambda < \rho} |f'_u(u, \lambda) - \alpha^2| = O(|u|)$;
- b) $|f(0, \lambda)| = O(\lambda^4)$;
- c) $|f(u, \lambda) - \alpha^2 u - f(0, \lambda)| = O(|u|^2)$, $\alpha = \text{const}$.

Требуется построить малое решение $u \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow +0$ на сколь угодно большом интервале $[0, 1/\lambda]$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1/\lambda} = 0. \quad (3.14)$$

Подобные краевые задачи возникают в некоторых моделях теории моделирования полимеров [13]. Так как уравнение (3.13) при $\lambda = 0$ имеет тривиальное решение $u = 0$, нетрудно доказать разрешимость задачи (3.13), (3.14). Действительно, с помощью замены $x = t/\varepsilon$ краевую задачу (3.13), (3.14) приводим к виду

$$\begin{aligned} \lambda^2 \frac{d^2 u}{dt^2} &= f(u, \lambda), \quad 0 < t < 1, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u|_{t=1} = 0 \end{aligned}$$

и рассмотрим ее как нелинейное операторное уравнение

$$F(u, \lambda) = 0. \quad (3.15)$$

Здесь оператор

$$F(u, \lambda) = \left\{ \lambda^2 \frac{d^2 u}{dt^2} - f(u, \lambda), u(0), u(1) \right\}$$

действует из банахова пространства $X = C_{[0,1]}^{(2)}$ в банахово пространство

$$Y = C_{[0,1]} \dot{+} \mathbb{R}^2.$$

Оператор F непрерывен по u , λ и имеет производную Фреше по u , которой отвечает линейная краевая задача

$$\begin{aligned} \lambda^2 \frac{d^2 u}{dt^2} - \alpha^2 u &= h(t), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Так как соответствующая функция Грина имеет вид

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} k(t-1) \operatorname{sh} ks}{k}, & s \leq t, \\ \frac{\operatorname{sh} kt \operatorname{sh} k(s-1)}{k}, & s \geq t, \end{cases}$$

где $k = \alpha/\lambda$, непосредственными вычислениями проверяется оценка

$$\|F_u^{-1}(0, \lambda)\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)} = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Из условия b) следует оценка $\|F(0, \lambda)\| = O(\lambda^4)$. Если уравнение (3.15) переписать в виде (1.1), где теперь

$$B(\lambda)u = \lambda^2 \frac{d^2 u}{dt^2} - \alpha^2 u, \quad R(u, \lambda) = -f(u, \lambda) + \alpha^2 u,$$

то выполнение всех условий теоремы 2 в силу оценок а), b), c) становится очевидным. Поэтому последовательность $\{u_n\}$, где u_n – решение линейной краевой задачи

$$\lambda^2 \ddot{u}_n - \alpha^2 u_n = f(u_{n-1}, \lambda) - \alpha^2 u_{n-1}, \quad (3.16)$$

$$u_n(0) = u_n(1) = 0, \quad (3.17)$$

$u_0 = 0$, сходится к решению краевой задачи (3.13), (3.14).

При численном решении сингулярных краевых задач (3.16), (3.17) процесс может быть регуляризирован с помощью адаптивных сеток Г. И. Шишкина [14].

В заключение отметим, что в задаче о точке бифуркации [2; с. 5–50] минимальной ветвью является тривиальное решение. Для построения нетривиальных ветвей в этой задаче можно использовать итерационные методы работ [5]–[7].

А. И. Дрегла благодарит проф. Daphne Gilbert за внимание и поддержку, оказанную во время работы в Дублинском технологическом институте.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1969.
- [2] *Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения*, ред. В. А. Треногин, А. Ф. Филиппов, Физматлит, М., 2003.

- [3] N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev, *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*, Math. Appl., **550**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [4] Н. А. Сидоров, А. В. Синицин, “Исследование точек бифуркации и нетривиальных ветвей решений стационарной системы Власова–Максвелла”, *Матем. заметки*, **62**:2 (1997), 268–292.
- [5] Н. А. Сидоров, “Явная и неявная параметризация при построении разветвляющихся решений итерационными методами”, *Матем. сб.*, **186**:2 (1995), 129–141.
- [6] Б. В. Логинов, Н. А. Сидоров, “Групповая симметрия уравнения разветвления Ляпунова–Шмидта и итерационные методы в задаче о точке бифуркации”, *Матем. сб.*, **182**:5 (1991), 681–691.
- [7] Н. А. Сидоров, В. Р. Абдуллин, “Сплетаемые уравнения разветвления в теории нелинейных уравнений”, *Матем. сб.*, **192**:7 (2001), 107–124.
- [8] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Физматлит, М., 2002.
- [9] Н. А. Сидоров, “Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы”, *Нелинейные граничные задачи*, **14**, Институт прикладной математики и механики, Донецк, 2004, 161–164.
- [10] А. Н. Тихонов, В. К. Иванов, М. М. Лаврентьев, “Некорректно поставленные задачи”, *Дифференциальные уравнения с частными производными*, Труды симпозиума, посвященного 60-летию академика С. Л. Соболева, Наука, М., 1970, 224–238.
- [11] В. А. Треногин, Н. А. Сидоров, “Регуляризация простых решений нелинейных уравнений в окрестности точек ветвления”, *Сиб. матем. журн.*, **19**:1 (1978), 180–185.
- [12] В. Ф. Чистяков, *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром*, Наука, Новосибирск, 1996.
- [13] А. И. Дрегла, “Некоторые аналитические и точные решения систем уравнений в теории моделирования полимеров”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **11**:3 (2008), 61–70.
- [14] A. I. Dreglea, G. I. Shishkin, “Robust numerical method for a singularly perturbed equation with unboundedly growing convective term at infinity”, *Proceedings of the International Conference on Computational Mathematics, ICCM-2004*, Novosibirsk, 2004, 835–838.

Н. А. Сидоров

Иркутский государственный университет
E-mail: sidorovisu@gmail.com

Поступило

05.03.2010

Р. Ю. Леонтьев

Иркутский государственный университет

А. И. Дрегла

Иркутский государственный университет
E-mail: adreglea@gmail.com