Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Кайгородов, О δ -супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 2, 200–213

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8772>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:59:52

О δ -супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр

И. Б. Кайгородов

В статье дано полное описание δ -дифференцирований и δ -супердифференцирований полупростых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \neq 2$. В частности, приведены новые примеры нетривиальных $(1/2)$ -дифференцирований и нечетных $(1/2)$ -супердифференцирований, не являющихся операторами правого умножения на элемент супералгебры.

Библиография: 17 названий.

Введение

Антидифференцирования, т.е. такие линейные отображения μ алгебры A , что

$$\mu(xy) = -\mu(x)y - x\mu(y),$$

изучались в работах [1], [2]. Впоследствии в работах Филиппова было введено понятие δ -дифференцирования, т.е. такого линейного отображения ϕ алгебры A , что для фиксированного элемента δ из основного поля и произвольных элементов $x, y \in A$ верно

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)).$$

Филиппов рассматривал δ -дифференцирования первичных лиевых, альтернативных и мальцевских нелиевых алгебр [3]–[5]. В дальнейшем δ -дифференцирования йордановых алгебр и супералгебр, а также простых супералгебр Ли рассматривались Кайгородовым в работах [6]–[9]; δ -супердифференцирования супералгебр йордановой скобки рассматривались Кайгородовым и Желябиным в работе [10]; Зусманович рассматривал δ -супердифференцирования первичных супералгебр Ли в [11]. Отметим, что в [12] сделан подробный обзор, посвященный изучению δ -дифференцирований и δ -супердифференцирований.

В данной работе дается полное описание δ -дифференцирований и δ -супердифференцирований простых конечномерных неунитальных йордановых супералгебр

Работа выполнена при поддержке АВЦП Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00938-А), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-4620.2012.1), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.0346) и фонда FAPESP (грант 2011/51132-9).

над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 2$. В результате мы имеем полное описание δ -дифференцирований и δ -супердифференцирований полупростых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2. В частности, показано, что полупростые конечномерные йордановы супералгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль не имеют нетривиальных δ -дифференцирований и δ -супердифференцирований.

1. Основные факты и определения

Пусть F – поле характеристики $p \neq 2$. Алгебра A над полем F называется *йордановой*, если она удовлетворяет тождествам

$$xy = yx, \quad (x^2y)x = x^2(yx).$$

Пусть G – алгебра Грассмана над F , заданная образующими $1, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ и определяющими соотношениями $\xi_i^2 = 0, \xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i$. Элементы

$$1, \quad \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k}, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_k,$$

образуют базис алгебры G над F . Обозначим через G_0 и G_1 подпространства, порожденные соответственно произведениями четной и нечетной длины; тогда G представляется в виде прямой суммы этих подпространств: $G = G_0 \oplus G_1$, при этом справедливы соотношения $G_i G_j \subseteq G_{i+j \pmod{2}}$, $i, j = 0, 1$. Иначе говоря, G является $\mathbb{Z}_2$ -градуированной алгеброй (или супералгеброй) над F .

Пусть теперь $A = A_0 \oplus A_1$ – произвольная супералгебра над F . Рассмотрим тензорное произведение F -алгебр $G \otimes A$. Его подалгебра

$$G(A) = G_0 \otimes A_0 + G_1 \otimes A_1$$

называется *грассмановой оболочкой* супералгебры A .

Пусть Ω – некоторое многообразие алгебр над F . Супералгебра $A = A_0 \oplus A_1$ называется Ω -супералгеброй, если ее грассманова оболочка $G(A)$ является алгеброй из Ω . В частности, $A = A_0 \oplus A_1$ называется *йордановой супералгеброй*, если ее грассманова оболочка $G(A)$ является йордановой алгеброй. Далее, для однородного элемента x супералгебры $A = A_0 \oplus A_1$ будем считать $p(x) = i$, если $x \in A_i$, а для элемента $x \in A = A_0 \oplus A_1$ через x_i обозначим проекцию на A_i .

Классификация простых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль была приведена в работах Кантора и Каца [13], [14]. В последствии Расином и Зельмановым [15] были описаны простые конечномерные йордановы супералгебры с полупростой четной частью над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2. В работе Зельманова и Мартинез [16] была дана классификация простых унитарных конечномерных йордановых супералгебр с неполупростой четной частью над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 2$. Простые неунитарные конечномерных йордановы супералгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 2$ были описаны в работе Зельманова [17]. Также в этой работе была предьявлена структура полупростых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \neq 2$.

Приведем некоторые примеры йордановых супералгебр.

1.1. Супералгебра векторного типа $J(\Gamma, D)$. Пусть $\Gamma = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1$ – ассоциативная суперкоммутативная унитарная супералгебра с ненулевым четным дифференцированием D . Рассмотрим $J(\Gamma, D) = \Gamma \oplus \Gamma x$ – прямую сумму пространств, где Γx – изоморфная копия пространства Γ . Тогда операция умножения на $J(\Gamma, D)$, которую мы обозначим через $\cdot$, определяется формулами

$$\begin{aligned} a \cdot b &= ab, & a \cdot bx &= (ab)x, & ax \cdot b &= (-1)^{p(b)}(ab)x, \\ ax \cdot bx &= (-1)^{p(b)}(D(a)b - aD(b)), \end{aligned}$$

где a, b – однородные элементы из Γ и ab – произведение в Γ .

В дальнейшем нас будет интересовать случай $\Gamma = B(m)$, где

$$B(m) = F[a_1, \dots, a_m \mid a_i^p = 0]$$

– алгебра усеченных многочленов от m четных переменных над полем характеристики $p > 2$.

1.2. Супералгебра Каца. Простая девятимерная супералгебра Каца K_9 над полем характеристики 3 определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} K_9 &= A \oplus M, & (K_9)_0 &= A, & (K_9)_1 &= M, \\ A &= Fe + Fuz + Fuw + Fvz + Fvw, & M &= Fz + Fw + Fu + Fv. \end{aligned}$$

Умножение задано условиями

$$\begin{aligned} e^2 &= e, & e &\text{ – единица алгебры } A, & em &= \frac{1}{2}m \text{ для любого } m \in M, \\ [u, z] &= uz, & [u, w] &= uw, & [v, z] &= vz, & [v, w] &= vw, \\ [z, w] &= e, & [u, z]w &= -u, & [v, z]w &= -v, & [u, z][v, w] &= 2e, \end{aligned}$$

а все остальные ненулевые произведения получаются из приведенных либо применением одной из кососимметрий $z \leftrightarrow w, u \leftrightarrow v$, либо применением одновременной подстановки $z \leftrightarrow u, w \leftrightarrow v$. Отметим, что супералгебра K_9 не является унитарной.

1.3. Супералгебра $V_{1/2}(Z, D)$. Пусть Z – ассоциативно-коммутативная F – алгебра с единицей e и дифференцированием $D: Z \rightarrow Z$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

- i) Z не имеет собственных D -инвариантных идеалов;
- ii) D обнуляет только элементы вида Fe .

Рассмотрим Zx как изоморфную копию алгебры Z . Определим на векторном пространстве $V(Z, D) = Z + Zx$ структуру супералгебры. Положим $A = Z$ и $M = Zx$ – соответственно четная и нечетная части. Умножение $\cdot$ зададим следующим образом:

$$a \cdot b = ab, \quad a \cdot bx = \frac{1}{2}(ab)x, \quad ax \cdot bx = D(a)b - aD(b)$$

для произвольных элементов $a, b \in Z$. Полученную супералгебру будем обозначать как $V_{1/2}(Z, D)$.

Как было отмечено выше, для фиксированного элемента δ из основного поля под δ -дифференцированием супералгебры A мы понимаем линейное отображение $\phi: A \rightarrow A$, которое при произвольных $x, y \in A$ удовлетворяет условию

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)).$$

Под *центроидом* $\Gamma(A)$ супералгебры A мы будем понимать множество всех линейных отображений $\chi: A \rightarrow A$, при произвольных $a, b \in A$ удовлетворяющих условию

$$\chi(ab) = \chi(a)b = a\chi(b).$$

Определение 1-дифференцирования совпадает с обычным определением дифференцирования; 0-дифференцированием является произвольный эндоморфизм ϕ алгебры A такой, что $\phi(A^2) = 0$. Ясно, что любой элемент центроида супералгебры является $(1/2)$ -дифференцированием.

Ненулевое δ -дифференцирование ϕ будем считать *нетривиальным* δ -дифференцированием, если $\delta \neq 0, 1$ и $\phi \notin \Gamma(A)$.

Под *суперпространством* мы понимаем $\mathbb{Z}_2$ -градуированное пространство. Рассматривая пространство эндоморфизмов $\text{End}(A)$ супералгебры A , мы можем задать $\mathbb{Z}_2$ -градуировку, положив четными отображения ϕ такие, что $\phi(A_i) \subseteq A_i$, а под нечетными подразумевать отображения ϕ такие, что $\phi(A_i) \subseteq A_{i+1}$. Однородный элемент ψ суперпространства $\text{End}(A)$ называется *супердифференцированием*, если для однородных $x, y \in A_0 \cup A_1$ выполнено

$$\psi(xy) = \psi(x)y + (-1)^{p(x)p(\psi)}x\psi(y).$$

Для фиксированного элемента $\delta \in F$ определим понятие δ -супердифференцирования супералгебры $A = A_0 \oplus A_1$. Однородное линейное отображение $\phi: A \rightarrow A$ будем называть δ -супердифференцированием, если для однородных $x, y \in A_0 \cup A_1$ выполнено

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + (-1)^{p(x)p(\phi)}x\phi(y)).$$

Рассмотрим супералгебру Ли $A = A_0 \oplus A_1$ с умножением $[\cdot, \cdot]$ и зафиксируем элемент $x \in A_i$. Тогда $R_x: y \rightarrow [x, y]$ является супердифференцированием супералгебры A и его четность $p(R_x) = i$.

Под *суперцентроидом* $\Gamma_s(A)$ супералгебры A мы будем понимать множество всех однородных линейных отображений $\chi: A \rightarrow A$, для произвольных однородных элементов a, b удовлетворяющих условию

$$\chi(ab) = \chi(a)b = (-1)^{p(a)p(\chi)}a\chi(b).$$

Определение 1-супердифференцирования совпадает с определением обычного супердифференцирования; 0-супердифференцированием является произвольный эндоморфизм ϕ супералгебры A такой, что $\phi(A^2) = 0$. Ненулевое δ -супердифференцирование будем считать *нетривиальным*, если $\delta \neq 0, 1$ и $\phi \notin \Gamma_s(A)$.

Легко видеть, что четное δ -супердифференцирование будет δ -дифференцированием. Далее мы будем этим пользоваться, дополнительно не отмечая.

2. δ -Дифференцирования и δ -супердифференцирования простых конечномерных йордановых супералгебр

В данном разделе мы рассмотрим δ -дифференцирования и δ -супердифференцирования неунитальных простых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 2$, т.е. супералгебр K_9 над полем характеристики 3 и супералгебры $V_{1/2}(Z, D)$ над полем характеристики $p > 2$. В итоге, учитывая результаты работ [6], [8], мы будем иметь полное описание δ -дифференцирований и δ -супердифференцирований простых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2.

Далее, через $\langle x, y \rangle$ обозначим векторное пространство, порожденное векторами x, y .

ЛЕММА 1. *Супералгебра K_9 не имеет нетривиальных δ -дифференцирований и δ -супердифференцирований.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ϕ – нетривиальное δ -дифференцирование супералгебры K_9 . Легко видеть, что при $m \in (K_9)_1$ выполнено

$$0 = \phi(me - em) = 2\delta m\phi(e)_1.$$

Следовательно, учитывая, что $\phi(e)_1 u = 0$ и $\phi(e)_1 v = 0$, имеем $\phi(e)_1 = 0$.

Рассмотрим ограничение ϕ на $(K_9)_0$. Заметим, что $(K_9)_0$ – йорданова алгебра билинейной формы; по доказанному в [6] при $\delta = 1/2$ получаем

$$\phi(x)_0 = \alpha x, \quad x \in (K_9)_0, \quad \alpha \in F;$$

в частности, видим, что $\phi(e)_0 = \alpha e$, а при $\delta \neq 1/2$ имеем $\phi((K_9)_0)_0 = 0$.

Если $\delta \neq 1/2$ и $m \in (K_9)_1$, то

$$\phi(m) = 2\phi(em) = 2\delta e\phi(m) = 2\delta\phi(m)_0 + \delta\phi(m)_1.$$

Откуда получаем $\phi(m) = 0$ и $\phi(m_1 m_2) = \delta\phi(m_1)m_2 + \delta m_1\phi(m_2) = 0$ для произвольных $m_1, m_2 \in (K_9)_1$, что влечет тривиальность ϕ .

Если $\delta = 1/2$ и $m \in (K_9)_1$, то $2\phi(m) = 4\phi(em) = 2e\phi(m) + \alpha m$, что дает $\phi(m) = \phi(m)_0 + \alpha m$. Далее, можем считать, что $\alpha = 0$ и $\phi(m) = \phi(m)_0$. Заметим, что $0 = \phi(m^2) = \phi(m)m$, откуда

$$\begin{aligned} \phi(w) &= \alpha_w u w + \beta_w v w, & \phi(z) &= \alpha_z u z + \beta_z v z, \\ \phi(u) &= \alpha_u u z + \beta_u u w, & \phi(v) &= \alpha_v v w + \beta_v v z. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\phi(uz) = -(\phi(u)z + u\phi(z)) = \beta_z z - \beta_u u,$$

откуда

$$\begin{aligned} \alpha_u u z + \beta_u u w &= \phi(u) = -\phi((uz)w) \\ &= (\beta_z z - \beta_u u)w + uz(\alpha_w u w + \beta_w v w) = \beta_z e - \beta_u u w + 2\beta_w e. \end{aligned}$$

т.е. $\alpha_u = \beta_u = 0$. Аналогично получаем $\alpha_\gamma = \beta_\gamma = 0$ при $\gamma \in \{z, w, u, v\}$. Таким образом, ϕ тривиально.

Если ϕ – нечетное δ -супердифференцирование, то легко получить, что

$$\phi(e) = \delta\phi(e)e + \delta e\phi(e) = \delta\phi(e) \quad \text{и} \quad \phi(e) = 0.$$

Также видим, что при $\delta \neq 1/2$ верно

$$\phi(a) = \phi(ea) = \frac{\delta}{2}\phi(a) \quad \text{и} \quad \phi(m) = 2\phi(em) = 2\delta\phi(m),$$

что нам дает тривиальность ϕ .

Пусть $\delta = 1/2$ и для $q \in \{u, z, v, w\}$ верно

$$\phi(q) = \chi_q e + \alpha_q uz + \beta_q uw + \gamma_q vz + \mu_q vw.$$

Теперь легко получить

$$\begin{aligned} \phi(u) &= -\phi([u, z]w) = \phi(uz)w + (uz)\phi(w) = -(\phi(u)z - u\phi(z))w + (uz)\phi(w), \\ \phi(u) &= \phi([u, w]z) = -(\phi(uw)z + (uw)\phi(z)) = (\phi(u)w - u\phi(w))z - (uw)\phi(z). \end{aligned}$$

Ясно, что

$$(\phi(u)w - u\phi(w))z - (uw)\phi(z) \in \zeta\mu_u vw + \langle e, uw, uz, vw \rangle, \quad \zeta = \pm 1,$$

и

$$-(\phi(u)z - u\phi(z))w + (uz)\phi(w) \in \langle e, uw, uz, vw \rangle,$$

т.е. $\mu_u = 0$. Аналогично получаем, что $\gamma_u = 0$. Проводя аналогичные рассуждения для v, z, w , мы получим, что $\phi(q) = \chi_q e + y_q q$, $y_q \in (K_9)_1$.

Легко заметить, что

$$0 = 2\phi(e) = 2\phi([z, w]) = \phi(z)w - z\phi(w) = -\chi_z w + (y_z z)w + \chi_w z - z(y_w w),$$

а также что $(y_z z)w - z(y_w w) \in \langle u, v \rangle$, т.е. $\chi_z = \chi_w = 0$. Проводя аналогичные вычисления, имеем $\chi_u = \chi_z = 0$.

Далее заметим, что

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(e) = -\phi([u, z][v, w]) = \phi(uz)vw + uz\phi(vw) \\ &= \frac{1}{2}((\phi(u)z - u\phi(z))vw + uz(\phi(v)w - v\phi(w))) = \zeta_1\beta_u w + \zeta_2\gamma_z v + \zeta_3\gamma_v z + \zeta_4\beta_w u, \end{aligned}$$

где ζ_i принимает значения $+1$ или -1 . Отсюда имеем, что $\beta_u = \beta_w = \gamma_z = \gamma_v = 0$. Осталось отметить, что

$$0 = -\phi(e) = -\phi(uv) = \phi(u)v - u\phi(v) = (\alpha_u uz)v - u(\mu_v vw),$$

что дает $\mu_v = \alpha_u = 0$. Аналогично показываем, что $\phi(z) = \phi(w) = 0$. Таким образом, имеем ϕ тривиально. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $V_{1/2}(Z, D)$ – супералгебра над полем характеристики 3, Z – ее четная часть, ψ – дифференцирование алгебры Z , связанное с D соотношением

$$\psi(a)D(b) = D(a)\psi(b) \quad \text{для любых } a, b \in Z.$$

Тогда существует $z \in Z$ такое, что $D(z)$ – обратим и $\psi = cD$ при некотором $c \in Z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко заметить, что $D(a)\psi = \psi(a)D$. Мы покажем, что для некоторого $z \in Z$ элемент $D(z)$ будет обратим, откуда получим $\psi = (D(z)^{-1}\psi(z))D$, т.е. ψ искомое.

Заметим, что $D(a^3) = 3D(a)a^2 = 0$. Отсюда, легко получить, что a^3Z является D -инвариантным идеалом в Z . Таким образом, либо $a^3Z = Z$, либо $a^3Z = 0$. Если для произвольного $a \in Z$ верно $a^3Z = Z$, то Z – поле. В противном случае найдется элемент $a \in Z$ такой, что $a^3 = 0$. Рассмотрим $R = \{a \in Z \mid a^3 = 0\} \neq \emptyset$ – идеал в Z , отличный от Z . Пусть $I \triangleleft Z$, тогда любой элемент $a \in I$ не является обратимым и, следовательно, a^3 не является обратимым, а также верно $a^3Z \triangleleft Z$. Учитывая, что a^3Z является D -инвариантным идеалом, мы получаем $a^3Z = 0$, что влечет $a^3 = 0$ и $I \subseteq R$. Поэтому R – наибольший идеал в Z . Легко понять, что $D(R) \not\subseteq R$. Иначе бы R был D -инвариантным идеалом и совпадал с Z . Таким образом, для некоторого $z \in R$ верно $D(z) \notin R$. Следовательно, $D(z)$ обратим, и это автоматически доказывает утверждение леммы.

ЛЕММА 3. Пусть ϕ – нечетное $(1/2)$ -дифференцирование или нечетное $(1/2)$ -супердифференцирование супералгебры $V_{1/2}(Z, D)$ над полем характеристики 3, заданное условиями

$$\phi(a) = \psi(a)x \quad \text{и} \quad \phi(ax) = \mu(a).$$

Тогда $\mu(a) = D(\psi(a)) + a\mu(e)$ и $\psi = cD$ при некотором $c \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для произвольных $a, b \in A$ выполняется

$$\psi(ab)x = \phi(ab) = 2(\phi(a) \cdot b + a \cdot \phi(b)) = (\psi(a)b + a\psi(b))x,$$

т.е. ψ – дифференцирование A . Также верно, что

$$\begin{aligned} 2\mu(ab) &= \phi(a \cdot bx) = 2(\phi(a) \cdot bx + a \cdot \phi(bx)) = 2(\psi(a)x \cdot bx + a\mu(b)) \\ &= 2D(\psi(a))b - 2\psi(a)D(b) + 2a\mu(b), \end{aligned}$$

т.е.

$$\mu(ab) = D(\psi(a))b - \psi(a)D(b) + a\mu(b), \quad (1)$$

что при $b = e$ влечет

$$\mu(a) = D(\psi(a)) + a\mu(e). \quad (2)$$

Таким образом, при подстановке (2) в (1) мы имеем

$$D(\psi(ab)) + ab\mu(e) = D(\psi(a))b - \psi(a)D(b) + aD(\psi(b)) + ab\mu(e),$$

что путем прямых вычислений нам дает

$$D(a)\psi(b) = \psi(a)D(b).$$

Откуда по лемме 2 мы получаем, что $\psi = cD$ для некоторого $c \in A$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть ϕ является нетривиальным δ -дифференцированием супералгебры $V_{1/2}(Z, D)$ над полем характеристики $p \neq 2$. Тогда $\delta = 1/2$ и

$$\phi(y) = (1 + p(y))z \cdot y \quad \text{для фиксированного } z \in A \setminus \{Fe\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко заметить, что $\phi(e) = 2\delta\phi(e)e = 2\delta\phi(e)_0 + \delta\phi(e)_1$, т.е. либо $\delta \neq 1/2$ и $\phi(e) = 0$, либо $\delta = 1/2$ и $\phi(e) \in A$.

Если $mx \in M$, то

$$\phi(mx) = 2\phi(e \cdot mx) = 2\delta\phi(e) \cdot mx + 2\delta e \cdot \phi(mx) = \delta(\phi(e)m)x + 2\delta\phi(mx)_0 + \delta\phi(mx)_1,$$

откуда видим, что при $\delta \neq 1/2$ будет $\phi(M) = 0$, а при $\delta = 1/2$ получим $\phi(mx)_1 = (\phi(e)m)x$.

Для произвольного $a \in A$ верно

$$\phi(a) = \phi(e \cdot a) = \delta\phi(e) \cdot a + \delta e \cdot \phi(a) = \delta\phi(e) \cdot a + \delta\phi(a)_0 + \frac{\delta}{2}\phi(a)_1.$$

Откуда получаем, что выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\delta \neq 1/2, 2$ и $\phi = 0$;
- 2) $\delta = 2$, $p \neq 2, 3$ и $\phi(a) \in M$;
- 3) $\delta = 1/2$, $p \neq 2, 3$ и $\phi(a) = \phi(e)a$;
- 4) $\delta = 1/2$ и $p = 3$.

Покажем, что второй случай не дает нетривиальных 2-дифференцирований. Пусть ϕ – 2-дифференцирование и $\phi(a) = \phi_a x$, тогда

$$0 = \phi(a \cdot x) = 2\phi(a) \cdot x = 2\phi_a x \cdot x = 2D(\phi_a),$$

откуда, пользуясь тем, что D обнуляет только элементы вида $a\epsilon$, имеем $\phi_a = a\epsilon$.

Заметим, что

$$\phi_{a^2}x = \phi(a^2) = 4\phi(a) \cdot a = 2(\phi_a a)x,$$

т.е. $\phi_a = 0$ при $a \in A \setminus \{Fe\}$. Полученное дает тривиальность ϕ .

Рассмотрим третий случай, т.е. $\delta = 1/2$ и $p \neq 2, 3$. Ясно, что отображение ψ , заданное по правилу

$$\psi(a) = za, \quad \psi(mx) = (zm)x \quad \text{для } z, a, m \in A, \quad (3)$$

является $(1/2)$ -дифференцированием. Поэтому, отображение χ , определенное как $\chi = \phi - \psi$, также будет являться $(1/2)$ -дифференцированием. Покажем, что $\chi = 0$.

Легко видеть, что $\chi(A) = 0$ и $\chi(mx) = \phi(mx)_0$. Заметим, что

$$0 = 2\chi(x \cdot x) = 2\chi(x) \cdot x = \chi(x)x,$$

т.е. $\chi(x) = 0$. Следовательно, можем получить $\chi(ax) = \chi(a) \cdot x + a \cdot \chi(x) = 0$. Откуда χ тривиально и ϕ имеет искомый вид.

Заметим, что для ϕ , определенного по правилу (3), верно

$$\begin{aligned} \phi(ax \cdot bx) &= \phi(D(a)b - aD(b)) = z(D(a)b - aD(b)) \\ &= (ax) \cdot ((bz)x) + abD(z) = (ax) \cdot \phi(bx) + abD(z). \end{aligned}$$

Откуда видим, что ϕ будет являться нетривиальным $(1/2)$ -дифференцированием, только если $D(z) \neq 0$, т.е. если $z \in A \setminus \{Fe\}$. Ясно, что отображение, заданное полученным образом, будет также $(1/2)$ -дифференцированием и над полем характеристики $p = 3$.

Рассмотрим четвертый случай, т.е. $\delta = 1/2$ и $p = 3$. В силу того, что отображение, заданное формулами (3), является $(1/2)$ -дифференцированием данной супералгебры над полем характеристики 3, то мы можем считать $\phi(A) \subseteq M$, $\phi(M) \subseteq A$. Положим, что $\phi(a) = \psi(a)x$ и $\phi(ax) = \mu(a)$. По лемме 3 мы получаем, что $\psi = cD$ для некоторого $c \in A$.

Для того чтобы отображение ϕ , заданное по правилу

$$\phi(a) = (cD(a))x, \quad \phi(ax) = D(cD(a)) + az \quad \text{для некоторых } c, z \in A,$$

являлось $(1/2)$ -дифференцированием, нам необходимо проверить выполнение равенства

$$\phi(ax \cdot bx) = \frac{1}{2}(\phi(ax) \cdot bx + ax \cdot \phi(bx)).$$

Непосредственными вычислениями получаем

$$\begin{aligned} (cD(D(a)b - aD(b)))x &= \phi(ax \cdot bx) = \frac{1}{2}(\phi(ax) \cdot bx + ax \cdot \phi(bx)) \\ &= ((D(cD(a)) + az)b)x + (a(D(cD(b)) + bz)), \end{aligned}$$

откуда

$$acD^2(b) = D(c)D(a)b + aD(c)D(b) + 2azb,$$

что при $b = a = e$ дает $z = 0$, а при $b = e$ дает $D(c)D(a) = 0$. Учитывая, что по лемме 2 существует такое $w \in A$, что $D(w)$ является обратимым, то $D(c) = 0$ и $c = \alpha e$, $\alpha \in F$. Соответственно, получаем равенство $\alpha aD^2(b) = 0$. Допустим, что $\alpha \neq 0$, тогда $D^2(b) = 0$. Отсюда получаем, что $D(b) = \beta_b e$, $\beta_b \in F$. Заметим, что $\beta_{b^2}e = D(b^2) = 2D(b)b = 2\beta_b b$, т.е. $\beta_b = 0$, что дает $D = 0$ и противоречие с тем, что D – ненулевое отображение. Таким образом, мы имеем $\alpha = 0$ и $\psi = \mu = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть ϕ – нетривиальное нечетное δ -супердифференцирование супералгебры $V_{1/2}(Z, D)$ над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \neq 2$. Тогда $\delta = 1/2$ и

- 1) если $p \neq 3$, то $\phi(A) = 0$, $\phi(ax) = az$ для некоторого $z \in A \setminus \{0\}$;
- 2) если $p = 3$, то $\phi(a) = (\alpha D(a))x$, $\phi(ax) = D(\alpha D(a)) + az$ для некоторых $z \in A$, $\alpha \in F$ таких, что элементы z и α одновременно не обращаются в нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\phi(A) \subseteq M$ и $\phi(M) \subseteq A$. Легко заметить, что

$$\phi(e) = 2\delta\phi(e) \cdot e = \delta\phi(e),$$

т.е. $\phi(e) = 0$. Пусть $a \in A$, тогда

$$\phi(a) = \phi(e \cdot a) = \delta e\phi(a) = \frac{\delta}{2}\phi(a), \quad \phi(ax) = 2\phi(e \cdot ax) = 2\delta e \cdot \phi(ax) = 2\delta\phi(ax).$$

Откуда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\delta = 1/2$, $p = 3$;

- 2) $\delta = 1/2, p \neq 3$;
- 3) $\delta = 2, p \neq 3$;
- 4) $\phi = 0$.

Третий случай дает $\phi(M) = 0$ и $0 = \phi(a \cdot x) = 2\phi(a) \cdot x$, т.е. $\phi(A) = 0$.

Второй случай дает $\phi(A) = 0$ и $\phi(ax) = \phi_a$. Тогда

$$0 = 2\phi(ax \cdot bx) = \phi_a \cdot bx - ax \cdot \phi_b,$$

что влечет $\phi_a b = a\phi_b$, т.е. $\phi_a = a\phi_e$. Для того чтобы отображение ϕ , определенное как $\phi(A) = 0$, $\phi(ax) = za$, являлось $(1/2)$ -супердифференцированием, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\phi(a \cdot bx) = \frac{1}{2}\phi((ab)x) = \frac{1}{2}abz = \frac{1}{2}(0 \cdot bx + a \cdot (bz)) = \frac{1}{2}(\phi(a) \cdot bx + a \cdot \phi(bx)).$$

Откуда видим, что ϕ является $(1/2)$ -супердифференцированием. Заметим, что

$$\phi(x \cdot x) = 0 \neq -\frac{1}{2}zx = -x \cdot \phi(x),$$

т.е. ϕ является нетривиальным $(1/2)$ -супердифференцированием.

Первый случай, т.е. $p = 3$ и $\delta = 1/2$, рассмотрим более детально. Положим, что $\phi(a) = \psi(a)x$ и $\phi(ax) = \mu(a)$. По лемме 3 мы получаем, что $\psi = cD$ для некоторого $c \in A$.

Для того чтобы отображение ϕ , заданное по правилу

$$\phi(a) = (cD(a))x, \quad \phi(ax) = D(cD(a)) + az$$

для некоторых $c, z \in A$, являлось $(1/2)$ -супердифференцированием, нам необходимо проверить выполнение равенства

$$\phi(ax \cdot bx) = \frac{1}{2}(\phi(ax) \cdot bx - ax \cdot \phi(bx)).$$

Непосредственными вычислениями имеем

$$\begin{aligned} (cD(D(a)b - aD(b))x) &= \phi(ax \cdot bx) = \frac{1}{2}(\phi(ax) \cdot bx - ax \cdot \phi(bx)) \\ &= ((D(cD(a)) + az)b)x - (a(D(cD(b)) + bz))x, \end{aligned}$$

что влечет $D(c)(D(a)b - aD(b)) = 0$, т.е. при $b = e$ легко получаем $D(c)D(a) = 0$. Согласно лемме 2 существует такой элемент $w \in A$, что $D(w)$ обратим, что влечет $D(c) = 0$, и по условиям определения дифференцирования D для алгебры A заключаем, что $c = \alpha e$. Легко проверить, что отображение ϕ , заданное по правилам

$$\phi(a) = (\alpha D(a))x, \quad \phi(ax) = D(\alpha D(a)) + az$$

для $z \in A$, $\alpha \in F$, является нечетным $(1/2)$ -супердифференцированием. Ясно, что если $\alpha \neq 0$ и $a \neq \beta e$, $\beta \in F$, то

$$\phi(a \cdot e) - a \cdot \phi(e) = \phi(a) \neq 0,$$

т.е. ϕ – нетривиальное $(1/2)$ -супердифференцирование. Лемма доказана.

Отметим, что леммы 4 и 5 дают примеры новых нетривиальных $(1/2)$ -дифференцирований и $(1/2)$ -супердифференцирований, не являющихся операторами правого умножения.

Напомним, что в работе [10] были построены новые примеры нетривиальных $(1/2)$ -дифференцирований для простых унитарных супералгебр векторного типа $J(\Gamma, D)$, построенных на супералгебрах с тривиальной нечетной частью. Оказалось, что каждый оператор правого умножения R_z , где $D(z) \neq 0$, $z \in \Gamma$, является нетривиальным $(1/2)$ -дифференцированием, и, в свою очередь, все нетривиальные δ -дифференцирования данных супералгебр исчерпываются операторами правого умножения данного вида.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть J – простая конечномерная йорданова супералгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \neq 2$, обладающая нетривиальным δ -дифференцированием или δ -супердифференцированием. Тогда $p > 2$, $\delta = 1/2$ и*

$$\text{либо } J = V_{1/2}(Z, D), \quad \text{либо } J = J(B(m), D).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что δ -дифференцирования и δ -супердифференцирования простых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль полностью описаны в работах Кайгородова [6], [8]. Там было показано отсутствие нетривиальных δ -дифференцирований и δ -супердифференцирований для данных супералгебр. Согласно работе Кайгородова и Желябина [10] нетривиальные δ -(супер)дифференцирования на простых унитарных конечномерных йордановых супералгебрах над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 2$ возможны только в случае $\delta = 1/2$ и супералгебры векторного типа $J(B(m), D)$. Согласно работе Зельманова [17] простые неунитарные конечномерные йордановы супералгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 2$ исчерпываются супералгебрами вида K_3 , $V_{1/2}(Z, D)$, супералгеброй K_9 в характеристике 3. Для супералгебры Капланского K_3 результаты об отсутствии нетривиальных δ -дифференцирований и δ -супердифференцирований справедливы из работ Кайгородова [6], [8] вне зависимости от характеристики поля. Лемма 1 показывает, что супералгебра K_9 не обладает нетривиальными δ -дифференцированиями и δ -супердифференцированиями. Леммы 4, 5 дают примеры нетривиальных δ -дифференцирований и δ -супердифференцирований супералгебры $V_{1/2}(Z, D)$, которые возможны только в случае $\delta = 1/2$. Учитывая приведенные пояснения, теорема доказана.

3. δ -дифференцирования и δ -супердифференцирования полупростых конечномерных йордановых супералгебр

В данном разделе мы получим полное описание δ -дифференцирований и δ -супердифференцирований полупростых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2. В частности, мы покажем отсутствие нетривиальных δ -дифференцирований и δ -супердифференцирований на полупростых конечномерных йордановых супералгебрах над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

Под супералгеброй с делителем нуля мы будем подразумевать супералгебру A , для которой существует элемент a такой, что из равенства $ax = 0$ для некоторого элемента $x \in A$ следует $x = 0$. Примером таких супералгебр могут являться унитарные супералгебры, супералгебры K_9 , $V_{1/2}(Z, D)$ и др.

ЛЕММА 7. Пусть ϕ – δ -дифференцирование или δ -супердифференцирование супералгебры A , причем $A = A_1 \oplus A_2$, где A_i – супералгебры с однородным делителем нуля. Тогда $\phi(A_i) \subseteq A_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть e_i – однородный делитель нуля супералгебры A_i , а x_i – произвольный элемент A_i . Тогда

$$0 = \phi(e_i x_j) = \delta(\phi(e_i) x_j + (-1)^{p(e_i)p(\phi)} e_i \phi(x_j)) = \delta \phi(e_i) x_j + (-1)^{p(e_i)p(\phi)} \delta e_i \phi(x_j)_i.$$

Откуда получаем $e_i \phi(x_j)_i = 0$ и $\phi(x_j)_i = 0$, что влечет $\phi(A_j) \subseteq A_j$. Лемма доказана.

Пусть J_i – неунитарная супералгебра, удовлетворяющая условиям:

- i) алгебра $(J_i)_0$ имеет единицу e_i ;
- ii) для любого элемента $z \in (J_i)_1$ верно $2e_i \cdot z = z$.

Примерами таких супералгебр являются супералгебры K_9 , K_3 и $V_{1/2}(Z, D)$.

Тогда справедлива

ЛЕММА 8. Супералгебра

$$J = J_1 \oplus \cdots \oplus J_n + F \cdot 1$$

не имеет нетривиальных δ -дифференцирований и δ -супердифференцирований.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ϕ – нетривиальное δ -дифференцирование или δ -супердифференцирование. Согласно [6] унитарные супералгебры могут иметь нетривиальные δ -дифференцирования и δ -супердифференцирования только при $\delta = 1/2$. Рассмотрим случай $n = 1$, т.е. $J = J_1 + F \cdot 1$ и e – единица алгебры $(J_1)_0$, тогда $\phi(1) = \alpha \cdot 1 + j_0 + j_1$, где $j_i \in (J_1)_i$. Отметим, что

$$2\alpha e + 2j_0 + \frac{1}{2}j_1 = 2(\phi(1) \cdot e) \cdot e = \phi(e) \cdot e + e \cdot \phi(e) = 2\phi(e) = 2\phi(1) \cdot e = 2\alpha e + 2j_0 + j_1,$$

следовательно, $\phi(1) = \alpha \cdot 1 + j_0$. Заметим, что для $x \in (J_1)_1$ верно

$$\alpha x + j_0 \cdot x = \phi(x) = 2\phi(e \cdot x) = \phi(e) \cdot x + e \cdot \phi(x) = \frac{1}{2}\alpha x + j_0 \cdot x + \frac{1}{2}\alpha x + \frac{1}{2}j_0 \cdot x,$$

откуда $j_0 = 0$, что влечет тривиальность ϕ в случае $n = 1$. В общем случае, рассматривая подсупералгебры $I_i = J_i + F \cdot 1$, получим тривиальность ограничения ϕ на этих подсупералгебрах, что влечет тривиальность ϕ на всей супералгебре J . Лемма доказана.

Согласно работе Земальнова [17], если J полупростая конечномерная йорданова супералгебра над полем F характеристики $p \neq 2$, то

$$J = \bigoplus_{i=1}^s (J_{i1} \oplus \cdots \oplus J_{ir_i} + K_i \cdot 1) \oplus J_1 \oplus \cdots \oplus J_t,$$

где $J_1, \dots, J_t$ – простые йордановы супералгебры, $K_1, \dots, K_s$ – расширения поля F и $J_{i1}, \dots, J_{ir_i}$ – простые неунитальные йордановы супералгебры над полем K_i . Воспользовавшись этим результатом, леммами 7, 8 и работами [6], [8], где было показано отсутствие нетривиальных δ -дифференцирований и δ -супердифференцирований у простых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, мы можем получить следующую теорему.

ТЕОРЕМА 9. *Полупростая конечномерная йорданова супералгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль не имеет нетривиальных δ -дифференцирований и δ -супердифференцирований.*

Пользуясь результатами работы Зельманова [17], леммами 7, 8 и теоремой 6 мы можем получить следующую теорему.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть полупростая конечномерная йорданова супералгебра J над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 2$ имеет нетривиальное δ -дифференцирование или δ -супердифференцирование. Тогда $\delta = 1/2$ и $J = J^* \oplus J_*$, где*

$$\text{либо } J_* = J(B(m), D), \quad \text{либо } J_* = V_{1/2}(Z, D).$$

В заключение автор выражает благодарность В. Н. Желябину за внимание к работе и предложенное доказательство леммы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. C. Hopkins, “Generalized derivations of nonassociative algebras”, *Nova J. Math. Game Theory Algebra*, **5**:3 (1996), 215–224.
- [2] В. Т. Филиппов, “Об алгебрах Ли, удовлетворяющих тождеству 5-й степени”, *Алгебра и логика*, **34**:6 (1995), 681–705.
- [3] В. Т. Филиппов, “О δ -дифференцированиях алгебр Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **39**:6 (1998), 1409–1422.
- [4] В. Т. Филиппов, “ δ -Дифференцирования первичных алгебр Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **40**:1 (1999), 201–213.
- [5] В. Т. Филиппов, “О δ -дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр”, *Алгебра и логика*, **39**:5 (2000), 618–625.
- [6] И. Б. Кайгородов, “О δ -дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр”, *Алгебра и логика*, **46**:5 (2007), 585–605.
- [7] И. Б. Кайгородов, “О δ -дифференцированиях классических супералгебр Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:3 (2009), 547–565.
- [8] И. Б. Кайгородов, “О δ -супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и левых супералгебр”, *Алгебра и логика*, **49**:2 (2010), 195–215.
- [9] И. Б. Кайгородов, “Об обобщенном дубле Кантора”, *Вестник Самарск. гос. ун-та*, **78**:4 (2010), 42–50.
- [10] В. Н. Желябин, И. Б. Кайгородов, “О δ -супердифференцированиях простых супералгебр йордановых скобок”, *Алгебра и анализ*, **23**:4 (2011), 40–58.
- [11] P. Zusmanovich, “On δ -derivations of Lie algebras and superalgebras”, *J. Algebra*, **324**:12 (2010), 3470–3486.
- [12] И. Б. Кайгородов, “О δ -дифференцированиях алгебр и супералгебр”, *Проблемы теоретической и прикладной математики*, Труды 41-ой Всероссийской молодежной школы-конференции, Изд-во Уч.-метод. центр УПИ, Екатеринбург, 2010, 27–33, http://home.imm.uran.ru/digas/School-2010_A5.pdf.

- [13] И. Л. Кантор, “Йордановы и лиевы супералгебры, определяемые алгеброй Пуассона”, *Алгебра и анализ*, Изд-во ТГУ, Томск, 1989, 55–80.
- [14] V. G. Kac, “Classification of simple $\mathbb{Z}$ -graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras”, *Comm. Algebra*, **5**:13 (1977), 1375–1400.
- [15] M. L. Racine, E. I. Zel’manov, “Simple Jordan superalgebras with semisimple even part”, *J. Algebra*, **270**:2 (2003), 374–444.
- [16] C. Martinez, E. Zelmanov, “Simple finite-dimensional Jordan superalgebras of prime characteristic”, *J. Algebra*, **236**:2 (2001), 575–629.
- [17] E. Zelmanov, “Semisimple finite dimensional Jordan superalgebras”, *Lie Algebras, Rings and Related Topics* (Taiwan, January 11–17, 1997), Springer, Hong Kong, 2000, 227–243.

И. Б. Кайгородов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
Новосибирский государственный университет
Universidade de São Paulo, Brazil
E-mail: kib@math.nsc.ru

Поступило

07.01.2010

Исправленный вариант

20.12.2010