Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Ю. Котенкова, GIT-эквивалентность и диагональные действия, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 2, 269–279

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8776>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:52:49

GIT-эквивалентность и диагональные действия

П. Ю. Котенкова

В работе явно описаны классы GIT-эквивалентности линеаризованных линейных расслоений для диагональных действий линейных алгебраических групп $SL(V)$ и $SO(V)$ на проективных многообразиях $\mathbb{P}(V)^{m_1} \times \mathbb{P}(V^*)^{m_2}$ и $\mathbb{P}(V)^m$ соответственно.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Пусть G – комплексная редуктивная алгебраическая группа, X – проективное алгебраическое многообразие с заданным регулярным действием группы G и L – обильное G -линеаризованное линейное расслоение на многообразии X . Классическая конструкция Мамфорда, см. [1], связывает с этими данными открытое подмножество полустабильных точек

$$X_L^{\text{ss}} = \{x \in X \mid \exists m > 0, F \in \Gamma(X, L^{\otimes m})^G : F(x) \neq 0\},$$

для которого существует категорный фактор $X_L^{\text{ss}} \rightarrow X_L^{\text{ss}}//G$. Задача изучения зависимости этой конструкции от линеаризованного расслоения L известна как *задача о вариации фактора* в геометрической теории инвариантов. Два G -линеаризованных линейных расслоения L_1 и L_2 на G -многообразии X называются *GIT-эквивалентными*, если $X_{L_1}^{\text{ss}} = X_{L_2}^{\text{ss}}$. Исследованию GIT-эквивалентности посвящены работы [2], [3] и [4]. Там показано, что классы GIT-эквивалентности образуют веер, составленный из рациональных полиэдральных конусов и имеющий носителем конус G -линеаризованных обильных расслоений. Основным техническим средством для описания конусов этого веера служит численный критерий Мамфорда. Пример его использования можно найти в [2; пример 3.3.24], где классы GIT-эквивалентности описаны для диагонального действия группы $SL(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^m = \mathbb{P}(V) \times \cdots \times \mathbb{P}(V)$.

В случае действия алгебраического тора на аффинном многообразии элементарное описание GIT-эквивалентности в терминах так называемых орбитных конусов получено в работе [5]. С использованием обобщенной конструкции Кокса в работе [6] это описание перенесено на G -многообразия, кольцо Кокса которых конечно порождено, ср. [4; раздел 3]. Среди прочего, в [6; теорема 6.2] описаны классы GIT-эквивалентности для диагонального действия симплектической группы $\text{Sp}(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^m$.

Цель данной работы – найти классы GIT-эквивалентности для диагональных действий других классических линейных групп. В п. 2 мы приводим необходимые сведения из работ [5] и [6], в п. 3 описываем GIT-веер для диагонального действия специальной ортогональной группы $SO(V)$, а в п. 4 – для диагонального действия группы $SL(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^{m_1} \times \mathbb{P}(V^*)^{m_2}$. Полученные результаты основаны на явном описании образующих алгебры инвариантов (первая фундаментальная теорема классической теории инвариантов).

2. Орбитные конусы и GIT-веер. Пусть $G \subseteq GL(V)$ – комплексная алгебраическая группа, диагонально действующая на пространстве $\mathbb{V} = V^{m_1} \oplus (V^*)^{m_2}$, $m = m_1 + m_2$ и $X = \mathbb{P}(V)^{m_1} \times \mathbb{P}(V^*)^{m_2}$. Через $\text{Pic}_G(X)$ будем обозначать группу классов G -линеаризованных линейных расслоений на многообразии X . Известно, что для односвязной полупростой группы G любое линейное расслоение допускает ровно одну G -линеаризацию (см. [1; гл. 1, § 3, утверждение 1.4]), поэтому группу $\text{Pic}_G(X)$ можно отождествить с решеткой $\mathbb{Z}^m$. Обозначим через $P(a_1, \dots, a_m) \subset \mathbb{C}[\mathbb{V}]$, $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, подпространство многочленов, однородных степени a_i по i -й группе координат. Элементы пространства $P(a_1, \dots, a_m)$ являются сечениями расслоения L , соответствующего точке $a = (a_1, \dots, a_m)$ из группы Пикара $\text{Pic}_G(X) \cong \mathbb{Z}^m$. С каждым вектором $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ свяжем открытое подмножество

$$U(a) = \{v \in \mathbb{V} \mid \exists k \in \mathbb{N}, F \in P(ka_1, \dots, ka_m)^G : F(v) \neq 0\},$$

где $P(ka_1, \dots, ka_m)^G \subseteq P(ka_1, \dots, ka_m)$ – подпространство, состоящее из G -инвариантных функций. Множество $U(a)$ соответствует множеству полустабильных точек X_L^{ss} : элемент $(v_1, \dots, v_{m_1}, l_1, \dots, l_{m_2}) \in \mathbb{V}$ лежит в $U(a)$ тогда и только тогда, когда элемент $(\langle v_1 \rangle, \dots, \langle v_{m_1} \rangle, \langle l_1 \rangle, \dots, \langle l_{m_2} \rangle) \in X$, где $\langle v \rangle$ – порожденная вектором v прямая, лежит в X_L^{ss} .

Назовем точки $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ GIT-эквивалентными, если $U(a) = U(b)$.

Пусть алгебра инвариантов $\mathbb{C}[\mathbb{V}]^G$ конечно порождена и $F_1, \dots, F_r$ – ее порождающие. Их можно считать полиоднородными многочленами полистепеней $a(1), \dots, a(r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$. Конус $\Omega \subset \mathbb{Q}^m$, порожденный векторами $a(1), \dots, a(r)$, будем называть *весовым конусом*.

ЛЕММА 1. *Множество $U(a)$ непусто тогда и только тогда, когда $a \in \Omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U(a) \neq \emptyset$. Тогда существуют такие $k \in \mathbb{N}$ и $F \in P(ka_1, \dots, ka_m)^G$, что $F \neq 0$. Многочлен F принадлежит алгебре $\mathbb{C}[F_1, \dots, F_r]$, следовательно,

$$F = \sum_{p_1, \dots, p_r} c_{p_1 \dots p_r} F_1^{p_1} \dots F_r^{p_r}.$$

При этом для любых таких $p_1, \dots, p_r$, что $c_{p_1 \dots p_r} \neq 0$, справедливо равенство $ka = p_1 a(1) + \dots + p_r a(r)$. Следовательно, $a \in \Omega$.

Обратно, пусть $a \in \Omega$. Тогда

$$a = \lambda_1 a(1) + \dots + \lambda_r a(r),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Домножив это равенство на общий знаменатель чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, получим

$$ka = c_1 a(1) + \dots + c_r a(r),$$

где $k, c_1, \dots, c_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда $F_1^{c_1} \dots F_r^{c_r} \in P(ka)^G$, $F_1^{c_1} \dots F_r^{c_r} \neq 0$. Следовательно, $U(a) \neq \emptyset$.

Пусть $v \in \mathbb{V}$. *Орбитный конус* точки v – это рациональный конус

$$\omega(v) = \text{cone}(a \mid \exists F \in P(a)^G : F(v) \neq 0).$$

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство*

$$\omega(v) = \text{cone}(a(i) \mid F_i(v) \neq 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно включение $\text{cone}(a(i) \mid F_i(v) \neq 0) \subseteq \omega(v)$. Пусть точка $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ такова, что существует многочлен

$$F = \sum_{p_1, \dots, p_r} c_{p_1 \dots p_r} F_1^{p_1} \dots F_r^{p_r} \in P(a)^G,$$

для которого $F(v) \neq 0$. Тогда найдется слагаемое $c_{p_1 \dots p_r} F_1^{p_1} \dots F_r^{p_r}$, не обращающееся в нуль на v . При этом, если $p_i \neq 0$, то $F_i(v) \neq 0$. Значит,

$$a = p_{i_1} a(i_1) + \dots + p_{i_s} a(i_s),$$

где $F_{i_l}(v) \neq 0$, $l = 1, \dots, s$. Следовательно, справедливо $\text{cone}(a(i) \mid F_i(v) \neq 0) \supseteq \omega(v)$.

СЛЕДСТВИЕ. *Набор конусов $\{\omega(v) \mid v \in \mathbb{V}\}$ конечен.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Точки a и b GIT-эквивалентны тогда и только тогда, когда для любого $v \in \mathbb{V}$ либо $a \in \omega(v)$ и $b \in \omega(v)$, либо $a \notin \omega(v)$ и $b \notin \omega(v)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U(a) = U(b)$ и $a \in \omega(v)$. Тогда по лемме 2

$$a = \lambda_{i_1} a(i_1) + \dots + \lambda_{i_s} a(i_s),$$

где $F_{i_j}(v) \neq 0$, $j = 1, \dots, s$, $\lambda_j \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Домножив равенство на общий знаменатель чисел $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_s}$, получим

$$ka = p_1 a(i_1) + \dots + p_s a(i_s),$$

где $k, p_1, \dots, p_s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда $F_{i_1}^{p_1} \dots F_{i_s}^{p_s} \in P(ka)^G$ не обращается в нуль на v , следовательно, $v \in U(a) = U(b)$. Значит, существуют такие $l \in \mathbb{N}$ и $F \in P(lb)^G$, что $F(v) \neq 0$. Следовательно, $lb \in \omega(v)$ и $b \in \omega(v)$. Аналогично, если $b \in \omega(v)$, то и $a \in \omega(v)$.

Согласно предыдущему и определению конуса $\omega(v)$ точка $a \in \omega(v)$ тогда и только тогда, когда $v \in U(a)$. Если для любого $v \in \mathbb{V}$ либо $a \in \omega(v)$ и $b \in \omega(v)$, либо $a \notin \omega(v)$ и $b \notin \omega(v)$, то для любого $v \in \mathbb{V}$ либо $v \in U(a)$ и $v \in U(b)$, либо $v \notin U(a)$ и $v \notin U(b)$. Следовательно, $U(a) = U(b)$.

GIT-конусом точки $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ называется конус $\tau(a) = \bigcap_{a \in \omega(v)} \omega(v)$.

Напомним, что конечный набор $\{\Psi_i\}$ конусов в $\mathbb{Q}^m$ называется *веером*, если каждая грань каждого конуса из $\{\Psi_i\}$ вновь попадает в $\{\Psi_i\}$, и пересечение любых двух конусов из $\{\Psi_i\}$ является гранью каждого из них.

ТЕОРЕМА 1. *Набор конусов $\Psi = \{\tau(a) : a \in \Omega\}$ является веером.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы можно найти в работе [5; теорема 2.11].

Веер Ψ называется *ГИТ-веером*. Как показывает предложение 1, классами ГИТ-эквивалентности являются относительные внутренности конусов ГИТ-веера.

Рассмотрим действие тора $T = (\mathbb{C}^\times)^m$ на пространстве $\mathbb{V}$:

$$t \circ (v_1, \dots, v_{m_1}, l_1, \dots, l_{m_2}) = (t_1 v_1, \dots, t_{m_1} v_{m_1}, s_1 l_1, \dots, s_{m_2} l_{m_2}),$$

где $t = (t_1, \dots, t_{m_1}, s_1, \dots, s_{m_2}) \in T$, $(v_1, \dots, v_{m_1}, l_1, \dots, l_{m_2}) \in \mathbb{V}$. Такое действие коммутирует с действием группы G , поэтому оно индуцирует действие T на факторе $\mathbb{V}/G := \text{Spec } \mathbb{C}[\mathbb{V}]^G$.

Рассмотрим точку $v \in \mathbb{V}$. Несложно заметить связь между размерностями орбитного конуса $\omega(v)$ и стабилизатора $T_{\pi(v)}$ в торе T , где $\pi(v)$ – образ точки v относительно морфизма факторизации $\pi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}/G$. А именно,

$$\dim \omega(v) + \dim T_{\pi(v)} = \dim T.$$

Отметим, что наше определение орбитного конуса совпадает с [5; определение 2.1] для действия T на $\mathbb{V}/G$.

3. Построение веера для действия группы $SO(V)$. Рассмотрим случай $G = SO(V)$, $\dim V \geq 3$. Обозначим через $(\cdot, \cdot)$ невырожденную симметрическую билинейную форму, сохраняемую группой $SO(V)$. Поскольку с помощью нее можно отождествить V и V^* , будем считать, что $m_2 = 0$, $m = m_1$ и $\mathbb{V} = V^m$. Построим ГИТ-веер для диагонального действия группы $SO(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^m$.

Алгебра инвариантов $\mathbb{C}[V^m]^{SO(V)}$ порождается функциями $u_{ij} = (v_i, v_j)$, где $(v_1, \dots, v_m) \in V^m$ [7; §9.3]. Значит, базисные веса (т.е. полистепени образующих алгебры инвариантов) имеют вид

$$(0, \dots, 0, \underset{i}{2}, 0, \dots, 0) \quad \text{и} \quad (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0),$$

$i, j = 1, \dots, m$. Морфизм факторизации $\pi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}/G$ отображает вектор $(v_1, \dots, v_m)$ в симметрическую матрицу $((v_i, v_j))_{i,j=1}^m$.

Обозначим координаты в пространстве $\mathbb{Q}^m$, содержащем ГИТ-веер, через $x_1, \dots, x_m$. Ясно, что весовой конус задается неравенствами

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Любой $(m-1)$ -мерный орбитный конус, не лежащий на границе весового конуса Ω , лежит в одной из гиперплоскостей*

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_j, \tag{1}$$

где $I, J \subset \{1, \dots, m\}$, $I \neq \emptyset$, $J \neq \emptyset$, $I \cap J = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть тор $T = (\mathbb{C}^\times)^m$ действует на V^m :

$$t \circ (v_1, \dots, v_m) = (t_1 v_1, \dots, t_m v_m).$$

Тогда $t \circ (v_i, v_j) = t_i t_j (v_i, v_j)$, и орбитный конус точки $\xi = (v_1, \dots, v_m)$ имеет размерность $m - 1$ в точности тогда, когда стабилизатор $T_{\pi(\xi)}$ точки $\pi(\xi)$ одномерен.

Построим граф Γ_ξ . Его вершинами будут точки $v_1, \dots, v_m$. Ребрами соединим только такие v_i и v_j , что $(v_i, v_j) \neq 0$. Если v_i и v_j соединены ребром, то для любого $t \in T$, лежащего в стабилизаторе, выполняется условие $t_i = t_j^{-1}$.

Разобьем граф Γ_ξ на компоненты связности $\Gamma_\xi = \Gamma_1 \sqcup \dots \sqcup \Gamma_l$. Если в Γ_k есть петля или цикл нечетной длины, то для всех таких i , что $v_i \in \Gamma_k$, условие на стабилизатор имеет вид $t_i^2 = 1$. В противном случае все вершины, принадлежащие Γ_k , разбиваются на две группы: для одних $t_i = s_k$, для других $t_i = (s_k)^{-1}$, где $s_k \in \mathbb{C}^\times$. Стабилизатор будет одномерным только тогда, когда в графе Γ_ξ есть ровно одна компонента второго типа. Обозначим через I и J множества номеров вершин в первой и второй группах этой компоненты соответственно. Вес, отвечающий инварианту u_{ij} , может лежать в орбитном конусе точки ξ только в случаях $i \in I$, $j \in J$ или $j \in I$, $i \in J$. Таким образом, весь орбитный конус лежит в гиперплоскости (1).

Из доказательства предложения 2 следует, что любой орбитный конус, размерность которого строго меньше, чем $m - 1$, лежит в пересечении некоторых $(m - 1)$ -мерных орбитных конусов. Отсюда получаем, что две точки GIT-эквивалентны тогда и только тогда, когда они лежат в одних и тех же m -мерных и $(m - 1)$ -мерных орбитных конусах.

ТЕОРЕМА 2. *Для диагонального действия группы $SO(V)$ на многообразии $\mathbb{P}(V)^m$ GIT-веер получается разбиением конуса*

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_i \geq 0\}$$

гиперплоскостями

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_j, \quad (1)$$

где $I, J \subset \{1, \dots, m\}$, $I \neq \emptyset$, $J \neq \emptyset$, $I \cap J = \emptyset$.

(Здесь и далее для удобства читателя мы повторно выписываем уравнения гиперплоскостей, уже выписанных в занумерованных формулах выше, и при этом оставляем за ними прежний номер.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже знаем, что достаточно найти все $(m - 1)$ -мерные орбитные конусы. Также известны уравнения гиперплоскостей, в которых они могут лежать. Осталось показать, что пересечение любой гиперплоскости (1) с конусом Ω является орбитным конусом некоторой точки ξ .

Возьмем $v_k = (1, i, 0, \dots, 0)$ для $k \in I$, $v_j = (1, -i, 0, \dots, 0)$ для $j \in J$, $v_l = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$ для $l \notin I \cup J$. (Здесь $i^2 = -1$). Орбитный конус точки ξ порожден весами, отвечающими инвариантам u_{kj} , $k \in I$, $j \in J$ (размерность их линейной оболочки равна $|I| + |J| - 1$) и u_{ll} , $l \notin I \cup J$ (размерность линейной оболочки равна $m - |I| - |J|$). Таким образом, орбитный конус этой точки $(m - 1)$ -мерен и лежит в гиперплоскости (1). Осталось заметить, что веса, которыми он порожден, лежат в точности на тех же лучах, что и ребра пересечения гиперплоскости с конусом Ω .

Рис. 1

ПРИМЕР. Рассмотрим действие группы SO_3 на пространстве $\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3$ (см. рис. 1). GIT-веер лежит в 3-мерном пространстве и получается разбиением положительного октанта плоскостями

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2, & x_1 &= x_3, & x_2 &= x_3, \\ x_1 + x_2 &= x_3, & x_1 + x_3 &= x_2, & x_2 + x_3 &= x_1. \end{aligned}$$

Для наглядности изобразим сечение GIT-веера плоскостью $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Здесь имеется 33 класса GIT-эквивалентности, из них 12 трехмерны, 21 двумерен и 10 одномерны.

4. Построение веера для действия группы $SL(V)$. Рассмотрим случай $G = SL(V)$. Построим GIT-веер для диагонального действия группы G на многообразии $\mathbb{P}(V)^{m_1} \times \mathbb{P}(V^*)^{m_2}$.

Алгебра инвариантов $\mathbb{C}[\mathbb{V}]^{SL(V)}$, где $\mathbb{V} = V^{m_1} \oplus (V^*)^{m_2}$, порождается функциями $\det(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}), \det(l_{j_1}, \dots, l_{j_n}), l_j(v_i)$, где $(v_1, \dots, v_{m_1}, l_1, \dots, l_{m_2}) \in V^{m_1} \oplus (V^*)^{m_2}$ [7; § 9.3]. Значит, базисные веса имеют вид

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{m_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_2}), \quad (\underbrace{0, \dots, 0}_{m_1}, \beta_1, \dots, \beta_{m_2}), \quad (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m_1}, \delta_1, \dots, \delta_{m_2}),$$

где среди α_i и β_j по $n = \dim V$ единиц, среди ε_i и δ_j по одной единице, остальные — нули.

Сначала будем предполагать, что выполнено хотя бы одно из неравенств $m_1 \geq n$ или $m_2 \geq n$.

Обозначим координаты в пространстве $\mathbb{Q}^m$, содержащем GIT-веер, через $x_1, \dots, x_{m_1}, y_1, \dots, y_{m_2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Любой $(m - 1)$ -мерный орбитный конус лежит в одной из гиперплоскостей*

$$x_i = 0, \quad i = 1, \dots, m_1, \tag{2}$$

$$y_j = 0, \quad j = 1, \dots, m_2, \tag{3}$$

$$x_1 + \dots + x_{m_1} = y_1 + \dots + y_{m_2}, \tag{4}$$

$$(n - k) \sum_{i \in I} x_i - k \sum_{i \notin I} x_i = (n - k) \sum_{j \in J} y_j - k \sum_{j \notin J} y_j, \tag{5}$$

где $1 \leq k \leq n-1$, $I \subset \{1, \dots, m_1\}$, $J \subset \{1, \dots, m_2\}$, причем должно быть выполнено хотя бы одно из условий: $k \leq |I| \leq m_1 - n + k$ или $k \leq |J| \leq m_2 - n + k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в наборе $\xi = (v_1, \dots, v_{m_1}, l_1, \dots, l_{m_2})$ есть нулевой вектор или нулевая функция, то орбитный конус лежит в гиперплоскости, заданной уравнением (2) или (3). Далее будем считать, что у вектора ξ нет нулевых компонент.

Пусть тор $T = (\mathbb{C}^\times)^m$, как и раньше, действует на $V^{m_1} \oplus (V^*)^{m_2}$. Тогда

$$\begin{aligned} t \circ l_j(v_i) &= t_i s_j l_j(v_i), \\ t \circ \det(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) &= t_{i_1} \cdots t_{i_n} \det(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}), \\ t \circ \det(l_{j_1}, \dots, l_{j_n}) &= s_{j_1} \cdots s_{j_n} \det(l_{j_1}, \dots, l_{j_n}). \end{aligned}$$

Орбитный конус точки $\xi = (v_1, \dots, v_{m_1}, l_1, \dots, l_{m_2})$ $(m-1)$ -мерен в точности тогда, когда стабилизатор $T_{\pi(\xi)}$ точки $\pi(\xi)$ одномерен.

Построим граф Γ_ξ . Его вершинами будут точки $v_1, \dots, v_{m_1}, l_1, \dots, l_{m_2}$. Ребрами соединим только такие v_i и l_j , что $l_j(v_i) \neq 0$. Если вершины $v_{i_1}, v_{i_2}, l_{j_1}, l_{j_2}$ попали в одну компоненту связности графа Γ_ξ , то для принадлежности стабилизатору элемент тора t должен удовлетворять условиям $t_{i_1} = t_{i_2}$, $s_{j_1} = s_{j_2}$, $t_{i_1} = s_{j_1}^{-1}$.

Случай 1: $\dim\langle v_1, \dots, v_{m_1} \rangle < n$, $\dim\langle l_1, \dots, l_{m_2} \rangle < n$. Здесь все определители равны нулю. Для одномерности стабилизатора необходимо, чтобы граф Γ_ξ был связан. В этом случае орбитный конус порожден векторами $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m_1}, \delta_1, \dots, \delta_{m_2})$, где среди ε_i и δ_j по одной единице, остальные – нули. Их линейная оболочка имеет размерность $m-1$ и все они лежат в гиперплоскости $x_1 + \dots + x_{m_1} = y_1 + \dots + y_{m_2}$, а значит, и весь конус лежит в ней.

Случай 2: $\dim\langle v_1, \dots, v_{m_1} \rangle = n$, $\dim\langle l_1, \dots, l_{m_2} \rangle = n$. Пусть $\det(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) \neq 0$. Тогда $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ – базис V и условием на стабилизатор будет равенство $t_{i_1} \cdots t_{i_n} = 1$. Разложим все вектора v_i по этому базису. Если в разложении v_i присутствует v_{i_1} , то $t_i = t_{i_1}$, так как в этом случае $\det(v_i, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}) \neq 0$ и $t_i t_{i_2} \cdots t_{i_n} = t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_n} = 1$. Аналогично для остальных v_{i_j} , где $j = 2, \dots, n$. Таким образом V распадается в прямую сумму подпространств $V = V_{k_1} \oplus \dots \oplus V_{k_r}$ размерностей $k_1, \dots, k_r$, на каждом из которых тор действует умножением на $\bar{t}_k$ ($\bar{t}_k = t_{i_j}$ для некоторого j). Аналогично V^* разбивается в прямую сумму подпространств $V^* = W_{\tilde{k}_1} \oplus \dots \oplus W_{\tilde{k}_q}$ размерностей $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_q$, на каждое из которых стабилизатор действует умножением на $\bar{s}_{\tilde{k}}$. Таким образом, для элемента t , лежащего в стабилизаторе, выполняются равенства $\bar{t}_1^{k_1} \cdots \bar{t}_r^{k_r} = 1$, $\bar{s}_1^{\tilde{k}_1} \cdots \bar{s}_q^{\tilde{k}_q} = 1$.

Построим новый граф Γ'_ξ , вершинами которого будут подпространства $V_{k_1}, \dots, V_{k_r}, W_{\tilde{k}_1}, \dots, W_{\tilde{k}_q}$. Ребрами соединим только такие V_k и $W_{\tilde{k}}$, что существуют $v_i \in V_k$ и $l_j \in W_{\tilde{k}}$, для которых $l_j(v_i) \neq 0$.

Обозначим через $H_1, \dots, H_p$ компоненты связности графа Γ'_ξ . Пусть

$$V'_i = \bigoplus_{V_k \in H_i} V_k, \quad W'_i = \bigoplus_{W_{\tilde{k}} \in H_i} W_{\tilde{k}}.$$

Тогда стабилизатор действует на V'_i умножением на t'_i , на W'_i – умножением на $(t'_i)^{-1}$. Уравнения, задающие стабилизатор, имеют вид

$$(t'_1)^{\dim V'_1} \cdots (t'_p)^{\dim V'_p} = 1, \quad (t'_1)^{\dim W'_1} \cdots (t'_p)^{\dim W'_p} = 1.$$

По построению H_i все линейные функции из W'_i обращаются в нуль на всех векторах из V'_j при $i \neq j$, следовательно, $\dim W'_i \leq \dim V'_i$. Но $\sum_{i=1}^p \dim W'_i = \sum_{i=1}^p \dim V'_i$, значит, $\dim W'_i = \dim V'_i$.

Таким образом, стабилизатор задается уравнением

$$(t'_1)^{\dim V'_1} \dots (t'_p)^{\dim V'_p} = 1$$

и имеет размерность один тогда и только тогда, когда $p = 2$.

Итак, пусть орбитный конус точки $\xi = (v_1, \dots, v_{m_1}, l_1, \dots, l_{m_2})$ имеет размерность $m - 1$. Тогда

$$V = V_1 \oplus V_2, \quad V^* = W_1 \oplus W_2, \quad \dim V_1 = \dim W_1 = k, \quad 1 \leq k \leq n - 1;$$

любой вектор v_i лежит либо в V_1 , либо в V_2 ; любая линейная функция l_j лежит либо в W_1 , либо в W_2 ; любая линейная функция из W_j обращается в нуль на любом векторе из V_i при $i \neq j$.

Пусть I – множество номеров векторов v_i , лежащих в V_1 , J – множество номеров линейных функций l_j , лежащих в W_1 . Тогда орбитный конус точки ξ лежит в гиперплоскости, задаваемой уравнением

$$(n - k) \sum_{i \in I} x_i - k \sum_{i \notin I} x_i = (n - k) \sum_{j \in J} y_j - k \sum_{j \notin J} y_j,$$

и выполняются неравенства $k \leq |I| \leq m_1 - n + k$, $k \leq |J| \leq m_2 - n + k$.

Случай 3: $\dim \langle v_1, \dots, v_{m_1} \rangle = n$, $\dim \langle l_1, \dots, l_{m_2} \rangle < n$ или $\dim \langle v_1, \dots, v_{m_1} \rangle < n$, $\dim \langle l_1, \dots, l_{m_2} \rangle = n$.

В этом случае сразу получается одно уравнение на стабилизатор, и в графе Γ_ξ должно быть две компоненты связности. Получаем гиперплоскости, задаваемые уравнениями вида (5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Весовой конус Ω задается неравенствами*

$$\begin{aligned} x_l \geq 0, \quad l = 1, \dots, m_1, \quad y_p \geq 0, \quad p = 1, \dots, m_2, \\ (n - k) \left(\sum_{j=1}^{m_2} y_j - \sum_{i \in I} x_i \right) + k \sum_{i \notin I} x_i \geq 0, \\ (n - k) \left(\sum_{i=1}^{m_1} x_i - \sum_{j \in J} y_j \right) + k \sum_{j \notin J} y_j \geq 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $1 \leq k \leq n - 1$, $I \subset \{1, \dots, m_1\}$, $J \subset \{1, \dots, m_2\}$, $|I| = |J| = k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно выбрать из гиперплоскостей (2)–(5) те, в которых лежат гиперграни конуса Ω . Ясно, что гиперплоскости (2) и (3) подходят. Гиперплоскость (4) пересекает внутренность конуса Ω : веса

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{m_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_1}, \beta_1, \dots, \beta_{m_2})$$

лежат по разные стороны от нее.

Рассмотрим уравнение (5). Пусть сначала $0 < |I| < m_1$, $0 < |J| < m_2$. Возьмем $i_1 \in I$, $i_2 \notin I$, $j_1 \in J$, $j_2 \notin J$. Веса, отвечающие инвариантам $l_{j_2}(v_{i_1})$ и $l_{j_1}(v_{i_2})$, лежат по разные стороны от гиперплоскости.

Теперь возьмем $|J| = m_2$. Если $|I| > k$, то найдутся номера $i_1, \dots, i_{k+1} \in I$, $i_{k+2}, \dots, i_n \notin I$. Веса, отвечающие инвариантам $\det(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$ и $l_1(v_{i_n})$, лежат по разные стороны от гиперплоскости. При $|I| = k$ получаем неравенства (6).

Случаи $|I| = 0, m_1$ и $|J| = 0$ разбираются аналогично.

Из доказательства предложения 4 следует, что гиперплоскости (4) и (5) пересекают внутренность весового конуса, а также, что любой орбитный конус, размерность которого меньше $m - 1$, лежит в пересечении некоторых $(m - 1)$ -мерных орбитных конусов. Отсюда получаем, что две точки GIT-эквивалентны тогда и только тогда, когда они лежат в одних и тех же m -мерных и $(m - 1)$ -мерных орбитных конусах.

ТЕОРЕМА 3. *Для диагонального действия группы $SL(V)$ на многообразии*

$$\mathbb{P}(V)^{m_1} \times \mathbb{P}(V^*)^{m_2}, \quad m_1 \text{ или } m_2 \geq n = \dim V,$$

GIT-веер получается разбиением конуса Ω , задаваемого неравенствами (6), гиперплоскостями

$$x_1 + \dots + x_{m_1} = y_1 + \dots + y_{m_2}, \quad (4)$$

$$(n - k) \sum_{i \in I} x_i - k \sum_{i \notin I} x_i = (n - k) \sum_{j \in J} y_j - k \sum_{j \notin J} y_j, \quad (5)$$

где $1 \leq k \leq n - 1$, $I \subset \{1, \dots, m_1\}$, $J \subset \{1, \dots, m_2\}$, причем должно быть выполнено хотя бы одно из условий

$$k \leq |I| \leq m_1 - n + k \quad \text{или} \quad k \leq |J| \leq m_2 - n + k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже знаем уравнения гиперплоскостей, в которых могут лежать $(m - 1)$ -мерные орбитные конусы. Осталось показать, что пересечение Π любой гиперплоскости (4) и (5) с конусом Ω является орбитным конусом некоторой точки ξ .

Для случая гиперплоскости (4) можно взять орбитный конус точки $\xi = (e_1, \dots, e_1, e^1, \dots, e^1)$. Он лежит в гиперплоскости и имеет размерность $m - 1$. Заметим, что неравенства

$$(n - k) \left(\sum_{j=1}^{m_2} y_j - \sum_{i \in I} x_i \right) + k \sum_{i \notin I} x_i \geq 0,$$

$$(n - k) \left(\sum_{i=1}^{m_1} x_i - \sum_{j \in J} y_j \right) + k \sum_{j \notin J} y_j \geq 0,$$

для точек гиперплоскости (4) превращаются в неравенства

$$\sum_{i \notin I} x_i \geq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j \notin J} y_j \geq 0.$$

Следовательно, конус Π на самом деле является пересечением гиперплоскости (4) с положительным ортантом. Осталось заметить, что веса, которыми порожден орбитный конус $\omega(\xi)$, лежат в точности на тех же лучах, что и ребра конуса Π .

Разберем случай гиперплоскости (5). Обозначим ее Γ . Без ограничения общности можно считать, что уравнение (5) имеет вид

$$(n-k) \sum_{i=1}^{|I|} x_i - k \sum_{i=|I|+1}^{m_1} x_i = (n-k) \sum_{j=1}^{|J|} y_j - k \sum_{j=|J|+1}^{m_2} y_j,$$

где $k \leq |I| \leq m_1 - n + k$.

Орбитный конус $\omega(\xi)$ точки

$$\xi = (e_1, \dots, e_k, \underbrace{e_k, \dots, e_k}_{|I|-k}, e_{k+1}, \dots, e_n, \underbrace{e_n, \dots, e_n}_{m_1+k-|I|-n}, \\ \underbrace{e^1 + \dots + e^k, \dots, e^1 + \dots + e^k}_{|J|}, \underbrace{e^{k+1} + \dots + e^n, \dots, e^{k+1} + \dots + e^n}_{m_2-|J|})$$

имеет размерность $m-1$ и лежит в гиперплоскости Γ . Ясно, что он лежит в Π . Надо проверить обратное включение.

Пусть

$$A = (x_1, \dots, x_{m_1}, y_1, \dots, y_{m_2}) \in \Pi.$$

Обозначим вес, отвечающий инварианту $l_j(v_i)$, через ε_{ij} , а вес, отвечающий инварианту $\det(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$ — через $\lambda_{i_1 \dots i_n}$. Тогда

$$A = \left(x_1 - \sum_{j=2}^{|J|} y_j - \alpha \right) \varepsilon_{11} + \sum_{i=2}^k (x_i - \alpha) \varepsilon_{i1} + \sum_{i=k+1}^{|I|} x_i \varepsilon_{i1} \\ + \left(x_{|I|+1} - \sum_{j=|J|+2}^{m_2} y_j - \alpha \right) \varepsilon_{|I|+1|J|+1} + \sum_{i=|I|+2}^{|I|+n-k} (x_i - \alpha) \varepsilon_{i|J|+1} \\ + \sum_{i=|I|+n-k+1}^{m_1} x_i \varepsilon_{i|J|+1} + \sum_{j=2}^{|J|} y_j \varepsilon_{1j} \\ + \sum_{j=|J|+2}^{m_2} y_j \varepsilon_{|I|+1j} + \alpha \lambda_{1 \dots k|I|+1 \dots |I|+n-k}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{|I|} x_i - \sum_{j=1}^{|J|} y_j \right).$$

Положительность коэффициентов в этом разложении гарантируется неравенствами (6). Тем самым, $A \in \omega(\xi)$ и Π лежит в $\omega(\xi)$. Значит, Π совпадает с $\omega(\xi)$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда $m_1 < n$ и $m_2 < n$. В отличие от предыдущих случаев здесь весовой конус имеет размерность $m-1$.

ТЕОРЕМА 4. Для диагонального действия группы $SL(V)$ на многообразии

$$\mathbb{P}(V)^{m_1} \times \mathbb{P}(V^*)^{m_2}, \quad m_1, m_2 < n = \dim V,$$

GIT-веер получается разбиением конуса

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_{m_1}, y_1, \dots, y_{m_2}) \mid x_1 + \dots + x_{m_1} = y_1 + \dots + y_{m_2}, x_i, y_j \geq 0\}$$

гиперплоскостями

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} y_j, \quad (7)$$

где $I \subset \{1, \dots, m_1\}$, $J \subset \{1, \dots, m_2\}$, $I \neq \emptyset$, $\{1, \dots, m_1\}$, $J \neq \emptyset$, $\{1, \dots, m_2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данном случае весовой конус порождается весами, отвечающими инвариантам $l_j(v_i)$. Ясно, что он лежит в конусе Ω из условия теоремы. С другой стороны, ребра конуса Ω – это в точности порождающие весового конуса.

Чтобы найти $(m-2)$ -мерные орбитные конусы, как и раньше построим граф Γ_ξ для каждого вектора ξ . Теперь нам надо, чтобы стабилизатор $T_{\pi(\xi)}$ имел размерность два. Это выполняется, когда граф Γ_ξ имеет две компоненты связности. Орбитный конус $\omega(\xi)$ в этом случае лежит в пересечении весового конуса Ω и гиперплоскости (7), где I и J – множества номеров тех v_i и l_j , которые попали в какую-то из компонент связности графа Γ_ξ .

Осталось доказать, что пересечение конуса Ω с гиперплоскостью (7) является орбитным конусом некоторого вектора ξ . Для этого достаточно рассмотреть вектор $(v_1, \dots, v_{m_1}, l_1, \dots, l_{m_2})$, где $v_i = e_1$, $l_j = e^1$, если $i \in I$, $j \in J$, и $v_i = e_2$, $l_j = e^2$, если $i \notin I$, $j \notin J$. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю И. В. Аржанцеву за постановку задачи и постоянную поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. V. Arzhantsev, J. Hausen, “Geometric invariant theory via Cox rings”, *J. Pure Appl. Algebra*, **213**:1 (2009), 154–172.
- [2] F. Berchtold, J. Hausen, “GIT-equivalence beyond the ample cone”, *Michigan Math. J.*, **54**:3 (2006), 483–516.
- [3] I. V. Dolgachev, Y. Hu, “Variation of geometric invariant theory quotients”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **87**:1 (1998), 5–51; N. Ressayre, “Appendix: An example of a thick wall”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **87**:1 (1998), 53–56.
- [4] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (2), **34**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [5] N. Ressayre, “The GIT-equivalence for G -line bundles”, *Geom. Dedicata*, **81**:1-3 (2000), 295–324.
- [6] M. Thaddeus, “Geometric invariant theory and flips”, *J. Amer. Math. Soc.*, **9**:3 (1996), 691–723.
- [7] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, “Теория инвариантов”, *Алгебраическая геометрия – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления*, **55**, ВИНТИ, М., 1989, 137–309.

П. Ю. Котенкова

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: kotpy@mail.ru

Поступило

17.02.2010

Исправленный вариант

18.10.2010