Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Е. Безущак, М. В. Зайцев, Экспоненты тождеств групповых колец, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 5, 643–651

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8777>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 10:56:59

Экспоненты тождеств групповых колец

О. Е. Безущак, М. В. Зайцев

В работе изучаются количественные характеристики тождеств групповых алгебр конечных групп. Получен ряд соотношений, связывающих PI-экспоненты инволютивных и лиевских тождеств самой групповой алгебры и ее лиевской подалгебры кососимметрических элементов.

Библиография: 19 названий.

Введение. В работе изучаются числовые характеристики тождеств групповых колец. Пусть F – поле нулевой характеристики, G – группа и FG – групповая алгебра группы G над F . Тождества групповых алгебр исследовались в целом ряде работ. В частности, в [1] и [2] получено исчерпывающее описание групп, у которых FG является PI-алгеброй, т.е. удовлетворяет нетривиальному тождеству (см. также [3]). Например, если $\text{char } F = 0$, то FG является PI-алгеброй тогда и только тогда, когда в G есть абелева подгруппа конечного индекса. Это показывает, что наличие тождества в FG является достаточно сильным условием.

С другой стороны, алгебра FG обладает достаточно богатым набором естественных градуировок как по самой группе G , так и по любой ее факторгруппе. Наличие градуированных тождеств – гораздо более слабое условие. Например, в естественной градуировке $R = FG = \bigoplus_{g \in G} R_g$ по G любая компонента R_g одномерна и поэтому коммутативна. Другими словами, факт существования градуированных тождеств в FG не дает никакой дополнительной информации о группе G .

В общем случае G -градуированной алгебры $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$, где G – конечная группа, вопрос о связи градуированных и неградуированных тождеств изучался многими авторами. Например, в работах [4], [5] изучалась связь между типами и степенями тождеств алгебр A и A_e , где e – единица группы G . В частности, было показано, что A является PI-алгеброй тогда и только тогда, когда A_e – PI-алгебра.

Один из конструктивных подходов при изучении взаимосвязи тождеств алгебр A и A_e заключается в изучении количественных характеристик, в частности, так называемых PI-экспонент (основные определения мы напомним ниже). Так, в работе [6] показано, что для широкого класса алгебр выполнено неравенство

$$\exp(A) \leq |H|^2 \exp(A_e) \quad (1)$$

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты №№ 09-01-00303а, 09-01-90416-Укр-ф-а), грантом НШ-1983.2008.1 и фондом DFSD (грант Ф28/433-09).

и что эта оценка неулучшаема. В недавно анонсированной работе [7] неравенство (1) доказано для любой конечно порожденной PI-алгебры A . Отметим также, что взаимные соотношения между PI-экспонентами различных типов тождеств абстрактных ассоциативных алгебр рассматривались в работе [8].

Кроме градуировок групповые алгебры наделены также естественными инволюциями. Инволютивное тождество – гораздо более сильное условие, чем градуированное. Известно [9], [10], что если $(A, *)$ – алгебра с инволюцией, то любое инволютивное тождество в A влечет наличие обычного тождества.

Напомним также, что если A – алгебра с инволюцией $*$, то A распадается в прямую сумму подпространств

$$A = A^{(+)} \oplus A^{(-)}, \quad (2)$$

где $A^{(+)}$ – множество симметрических, а $A^{(-)}$ – кососимметрических элементов. Если рассмотреть A как алгебру Ли относительно обычной коммутаторной скобки $[a, b] = ab - ba$, то $A^{(-)}$ становится лиевской подалгеброй A , разложение (2) фактически является $\mathbf{Z}_2$ -градуировкой A , а любое тождество подалгебры $A^{(-)}$ может быть записано как инволютивное тождество алгебры A .

Основными результатами статьи являются оценки, подобные (1), на экспоненты лиевских и инволютивных тождеств групповой алгебры $R = FG$, полученные в теоремах 1 и 2:

$$\exp^L(R) \leq 2 \frac{k+1}{k} \exp^L(R^{(-)}) \quad \text{при } k \neq 4, \quad (3)$$

$$\exp^L(R) \leq 4 \frac{k+1}{k} \exp^L(R^{(-)}) \quad \text{при } k = 4, \quad (4)$$

$$\exp^*(R) \leq 4 \frac{k}{k-1} \exp^L(R^{(-)}) \quad \text{при } k \neq 4, \quad (5)$$

$$\exp^*(R) \leq 8 \frac{k}{k-1} \exp^L(R^{(-)}) \quad \text{при } k = 4. \quad (6)$$

В соотношениях (3)–(6) k является максимальной размерностью неприводимых представлений группы G над алгебраическим замыканием основного поля, и предполагается, что $k \geq 3$. Эти соотношения выполняются для любой инволюции на групповой алгебре. Хотя для конкретных типов инволюций и классов групп оценки могут быть улучшены.

В завершающей части работы для группы подстановок $G = S_n$, $n \geq 4$, $n \neq 6$, и инволюций на $R = FG$, индуцированных групповыми инволюциями на G , показано, что

$$\exp^L(R) = 2 \frac{k+1}{k} \exp^L(R^{(-)}), \quad \exp^*(R) = 2 \frac{k}{k-1} \exp^L(R^{(-)}),$$

где k – максимальная размерность неприводимых представлений S_n .

1. Основные понятия и определения. Пусть A – ассоциативная алгебра над полем F нулевой характеристики, а $L(X)$ – свободная алгебра Ли над F со счетным множеством порождающих X . Обозначим через V_n подпространство полилинейных лиевских полиномов в $L(X)$ от $x_1, \dots, x_n$, а через I – идеал лиевских тождеств A в $L(X)$. Тогда величина

$$c_n^L(A) = \dim \frac{V_n}{V_n \cap I}$$

называется n -й *коразмерностью* (лиевских) тождеств алгебры A . Ознакомиться с основами теории тождеств в алгебрах Ли можно в монографии [11]. Если A – PI-алгебра, то последовательность $c_n^L(A)$ экспоненциально ограничена (как следует из [12]). Из теоремы Адо–Ивасава легко получить аналогичное ограничение на рост коразмерностей $c_n^L(A)$ для любой конечномерной алгебры Ли A . В работе [13] показано, что в этом случае предел

$$\exp^L(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n^L(A)}$$

существует и является целым числом. Это число называется (лиевской) *экспонентой тождеств алгебры A* .

Пусть теперь A – ассоциативная алгебра с инволюцией $*$ и $\dim A < \infty$. Обозначим

$$A^{(+)} = \{a \in A \mid a^* = a\}, \quad A^{(-)} = \{a \in A \mid a^* = -a\}.$$

Тогда $A^{(-)}$ – подалгебра Ли в A и $\exp^L(A^{(-)})$ – тоже неотрицательное целое число. С другой стороны, разложение

$$A = A^{(-)} \oplus A^{(+)}$$

можно рассматривать как $\mathbf{Z}_2$ -градуировку A . Но соотношение (1) не выполняется даже для конечномерных алгебр Ли. Более естественной выглядит гипотеза, что $\exp^L(A) \leq |G|^2(\exp^L(A_e) + 1) - 1$. Для групповой алгебры $R = FG$ конечной группы G мы получим более точные оценки.

Наряду с лиевскими тождествами рассматриваются также тождества с инволюцией. Если $F\langle X \cup X^* \rangle = F\langle x_1, x_1^*, x_2, x_2^*, \dots \rangle$ – свободная ассоциативная алгебра с порождающими $x_1, x_1^*, x_2, x_2^*, \dots$, то полином $f(x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*)$ называется *инволютивным тождеством* алгебры $(A, *)$, если $f(a_1, a_1^*, \dots, a_n, a_n^*) = 0$ в A для любых $a_1, \dots, a_n \in A$. *Полилинейными* полиномами степени n от $x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*$ принято называть многочлены, все одночлены которых имеют суммарную степень 1 по x_i и x_i^* для всех $1 \leq i \leq n$. Пространство полилинейных полиномов с инволюцией обозначают как P_n^* , и тогда инволютивная коразмерность $(A, *)$ определяется как

$$c_n^*(A) = \dim \frac{P_n^*}{P_n^* \cap I^*},$$

где I^* – идеал всех тождеств с инволюцией алгебры A .

Известно, что если $\dim A < \infty$, то инволютивная экспонента

$$\exp^*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n^*(A)}$$

существует и тоже является целым числом [14]. В следующем разделе мы получим для групповых алгебр верхние оценки, зависящие от экспонент алгебры кососимметрических элементов и от свойств самой группы.

2. Оценки инволютивных и лиевских экспонент. Заметим сначала, что обычные, инволютивные и лиевские коразмерности F -алгебры A совпадают с $\bar{F}$ -коразмерностями $\bar{F}$ -алгебры $A \otimes_F \bar{F}$ для любого расширения $F \subset \bar{F}$. Поэтому всюду в дальнейшем мы будем считать поле F алгебраически замкнутым.

Пусть G – конечная группа, а $R = FG$ – ее групповая алгебра. В силу полупростоты R она будет и инволютивно полупростой для любой инволюции $*$: $R \rightarrow R$. Кроме того,

$$R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_m,$$

где $R_1, \dots, R_m$ – инволютивно простые подалгебры. Так как поле F алгебраически замкнуто, то инволютивно простая алгебра – это либо матричная алгебра с транспонированием, либо матричная алгебра с симплектической инволюцией, либо алгебра вида $B \oplus B^{\text{op}}$, где $B = M_k(F)$ и $(a, b)^* = (b, a)$ [15].

Для вычисления экспонент групповых алгебр нам потребуется несколько технических замечаний.

ЛЕММА 1. Пусть $A = M_k(F)$ – матричная алгебра с инволюцией транспонирования и $k \geq 3$. Тогда

$$\exp^*(A) = k^2, \quad \exp^L(A) = k^2 - 1.$$

При этом

$$\exp^L(A^{(-)}) = 3,$$

если $k = 4$, и

$$\exp^L(A^{(-)}) = \frac{k(k-1)}{2}$$

для всех остальных k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Экспоненты полупростых алгебр Ли над замкнутым полем были вычислены в [16]. Для полупростой алгебры Ли $H = H_1 \oplus \cdots \oplus H_m$ с простыми слагаемыми $H_1, \dots, H_m$

$$\exp^L(H) = \max\{\dim H_i \mid i = 1, \dots, m\}.$$

Алгебра Ли $A^{(-)}$ в нашем случае состоит из кососимметрических матриц порядка k , является простой при $k \geq 3$, $k \neq 4$, и $A^{(-)} \simeq sl_2 \oplus sl_2$ при $k = 4$ [17]. Отсюда следует утверждение леммы для $A^{(-)}$. Так как алгебра Ли A изоморфна $sl_k \oplus F$, то согласно [13]

$$\exp^L(A) = \dim sl_k = k^2 - 1.$$

Инволютивная экспонента любой инволютивно простой алгебры равна ее размерности [14], поэтому $\exp^*(A) = k^2$, и лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $A = M_k(F)$ – матричная алгебра с симплектической инволюцией и $k = 2q \geq 2$. Тогда

$$\exp^*(A) = k^2, \quad \exp^L(A) = k^2 - 1, \quad \exp^L(A^{(-)}) = \frac{k(k+1)}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Экспоненты $\exp^*(A)$ и $\exp^L(A)$ вычислены в предыдущей лемме. Поскольку $A^{(-)} \simeq sp_k$ проста, то как и выше $\exp^L(A^{(-)}) = k(k+1)/2$.

ЛЕММА 3. Пусть $A = C \oplus C^{\text{op}}$ – простая инволютивная алгебра, где $C = M_k(F)$, $k \geq 2$, и $(a, b)^* = (b, a)$. Тогда

$$\exp^*(A) = 2k^2, \quad \exp^L(A) = k^2 - 1, \quad \exp^L(A^{(-)}) = k^2 - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $\exp^*(A) = 2k^2$ следует из результатов [14]. Поскольку $A \simeq gl_k \oplus gl_k$ как алгебра Ли, а $A^{(-)} \simeq gl_k$, то два оставшихся равенства следуют из [13].

Основными результатами статьи, относящимися к инволюциям любого типа на групповых алгебрах являются следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть F – поле нулевой характеристики, G – конечная группа и k – максимальная размерность неприводимых представлений G над алгебраическим замыканием поля F . Пусть также $k \geq 3$, а $R = FG$ – групповая алгебра G над F с некоторой инволюцией $*$. Если $R^{(-)}$ – подалгебра Ли кососимметрических элементов в R , то

$$\begin{aligned}\exp^L(R) &\leq 2 \frac{k+1}{k} \exp^L(R^{(-)}) && \text{при } k \neq 4, \\ \exp^L(R) &\leq 4 \frac{k+1}{k} \exp^L(R^{(-)}) && \text{при } k = 4.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть F – поле нулевой характеристики, G – конечная группа и k – максимальная размерность неприводимых представлений G над алгебраическим замыканием поля F . Пусть также $k \geq 3$, а $R = FG$ – групповая алгебра G над F с некоторой инволюцией $*$. Если $R^{(-)}$ – подалгебра Ли кососимметрических элементов в R , то

$$\begin{aligned}\exp^*(R) &\leq 4 \frac{k}{k-1} \exp^L(R^{(-)}) && \text{при } k \neq 4, \\ \exp^*(R) &\leq 8 \frac{k}{k-1} \exp^L(R^{(-)}) && \text{при } k = 4.\end{aligned}$$

Доказательства обеих теорем проводятся похожими методами.

Напомним, что при расширении поля скаляров коразмерности тождеств не изменяются, и поэтому можно считать поле F алгебраически замкнутым. В этом случае любая инволюция на матричной алгебре эквивалентна либо транспонированию, либо симплектической инволюции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 и 2. Поскольку алгебра $R = FG$ полупроста, т.е. есть сумма матричных алгебр, то как алгебра Ли она редуктивна. Анализ структуры инволютивно простых алгебр показывает, что и $R^{(-)}$ является полупростой либо редуктивной алгеброй Ли. Поэтому лиевские РІ-экспоненты как у R , так и у $R^{(-)}$, совпадают с максимальной размерностью простых слагаемых [13], причем выполнено $\exp^L(R^{(-)}) > 1$, так как $k \geq 3$. Поэтому теорема 1 следует из лемм 1–3 и соотношений

$$\begin{aligned}k^2 - 1 &= 2 \frac{k+1}{k} \cdot \frac{k(k-1)}{2} && \text{при } k \neq 4, \\ k^2 - 1 &= 4 \cdot 3 \cdot \frac{k+1}{k} && \text{при } k = 4.\end{aligned}$$

Для полупростой алгебры инволютивная экспонента также равна максимальной размерности инволютивно простых слагаемых. Поэтому теорема 2 следует из

лемм 1, 2, 3 и соотношений

$$\begin{aligned} 2k^2 &= 4 \frac{k}{k-1} \cdot \frac{k(k-1)}{2} && \text{при } k \neq 4, \\ 2k^2 &= 8 \cdot 3 \cdot \frac{k}{k-1} && \text{при } k = 4. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $k = 2$, т.е. когда максимальная размерность неприводимых представлений группы G равна двум, утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, теряют силу. Например, пусть $G = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ – группа диэдра D_3 , для которой $a^3 = e$, $b^2 = e$, $abab = e$. Тогда $R = FG = F \oplus F \oplus I$, где

$$I = \{\alpha_0 e + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \beta_0 b + \beta_1 ab + \beta_2 a^2 b \mid \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 = 0\}$$

– единственный двусторонний идеал, изоморфный $M_2(F)$. Если $*$ – инволюция на R , индуцированная инволюцией $g \rightarrow g^{-1}$ на группе G , то $(I, *)$ изоморфна как алгебра с инволюцией $(M_2(F), t)$, где t – обычное транспонирование. В этом случае $R^{(-)}$ – абелева алгебра Ли, и поэтому $\exp^L(R^{(-)}) = 0$. В тоже время $\exp^L(R) = 3$, а $\exp^*(R) = 4$.

Оценки, указанные в теоремах 1 и 2, можно уточнить, если конкретизировать типы групп и действующих на групповых алгебрах инволюций. Наиболее естественный класс инволюций на FG составляют инволюции, индуцированные с группы G . Рассмотрим в качестве примера группу подстановок $G = S_n$ с $n \geq 4$, $n \neq 6$. Поскольку все автоморфизмы S_n в этом случае внутренние, любая инволюция $*$: $S_n \rightarrow S_n$ имеет вид $a^* = g^{-1}a^{-1}g$, где $g^2 = e$ в S_n . Индуцированную на $R = FS_n$ инволюцию для краткости будем называть *стандартной*.

Сначала уточним строение R как алгебры с инволюцией. Как и в теоремах 1 и 2, можно считать поле F алгебраически замкнутым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $(R, *)$ – групповая алгебра группы S_n со стандартной инволюцией, и

$$R = T_1 \oplus \cdots \oplus T_k \quad (7)$$

– разложение R в прямую сумму минимальных идеалов. Тогда каждый идеал T_i инвариантен при действии инволюции, и $(T_i, *)$ как алгебра с инволюцией изоморфна $(M_{d_i}(F), t)$, где t – транспонирование на матричной алгебре.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним сначала необходимые сведения о строении групповой алгебры R (см., например, [18] или [19]). Неприводимые представления S_n , т.е. минимальные левые идеалы R , задаются разбиениями $\lambda \vdash n$ числа n . Если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ – разбиение n , то через D_λ обозначается соответствующая диаграмма Юнга. Если клетки диаграммы D_λ заполнить числами $1, \dots, n$, то получим таблицу Юнга T_λ . Обозначим через $R_{T_\lambda}, C_{T_\lambda}$ подгруппы в S_n , перемещающие символы только в пределах строк и столбцов T_λ соответственно. Положим также

$$\bar{R}_{T_\lambda} = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma, \quad \bar{C}_{T_\lambda} = \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \tau.$$

Известно, что $e_{T_\lambda} = \bar{R}_{T_\lambda} \bar{C}_{T_\lambda}$ – квазиидемпотент групповой алгебры R , т.е. $e_{T_\lambda}^2 = \alpha e_{T_\lambda}$, где α – ненулевой скаляр, и что Re_{T_λ} – минимальный левый идеал алгебры R . Два таких идеала изоморфны как R -модули тогда и только тогда, когда они

соответствуют одному и тому же разбиению λ . Сумма

$$I_\lambda = \sum Re_{T_\lambda} \quad (8)$$

по всем таблицам Юнга T_λ с фиксированной диаграммой D_λ является минимальным двусторонним идеалом в R . Другими словами, мы можем считать, что каждое из слагаемых в (7) равно одному из идеалов I_λ , $\lambda \vdash n$. Сумма в правой части (8) не является прямой. Но если ограничиться только так называемыми стандартными таблицами Юнга, то (8) становится прямой суммой. В частности, число стандартных таблиц равно $d_\lambda = \dim Re_{T_\lambda} = \deg \chi_\lambda$, где χ_λ – характер неприводимого представления, соответствующего разбиению λ .

ЛЕММА 4. *Для любого разбиения $\lambda \vdash n$ идеал I_λ инвариантен относительно действия инволюции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать равенство $I_\lambda = I_\lambda^*$ достаточно показать, что $e_{T_\lambda}^* \in I_\lambda$ для любой таблицы Юнга T_λ . Пусть $a^* = g^{-1}a^{-1}g$ в S_n и $g^2 = e$. Заметим сначала, что $e_{T_\lambda}^*$ – тоже квазидемпотент, поскольку $(e_{T_\lambda}^*)^2 = (e_{T_\lambda}^2)^* = \alpha e_{T_\lambda}^*$. Но так как $e_{T_\lambda}^* = (\overline{R}_{T_\lambda} \overline{C}_{T_\lambda})^* = \overline{C}_{T_\lambda}^* \overline{R}_{T_\lambda}^* = g^{-1} \overline{C}_{T_\lambda} \overline{R}_{T_\lambda} g$, то

$$\alpha e_{T_\lambda}^* = (e_{T_\lambda}^*)^2 = g^{-1} \overline{C}_{T_\lambda} (\overline{R}_{T_\lambda} \overline{C}_{T_\lambda}) \overline{R}_{T_\lambda} g = g^{-1} \overline{C}_{T_\lambda} e_{T_\lambda} \overline{R}_{T_\lambda} g$$

и $e_{T_\lambda}^* \in I_\lambda$, так как $\alpha \neq 0$, а I_λ – двусторонний идеал.

Мы доказали, что все идеалы в разложении (7) выдерживают действие инволюции $*$. Поскольку поле F алгебраически замкнуто, то любая инволюция на матричной алгебре эквивалентна либо симплектической инволюции, либо транспонированию. Заметим теперь, что если M – алгебра матриц порядка m с инволюцией $*$, то $\dim M^{(-)} = m(m-1)/2$ и $\dim M^{(+)} = m(m+1)/2$ при транспонировании, тогда как $\dim M^{(-)} = m(m+1)/2$ и $\dim M^{(+)} = m(m-1)/2$ при симплектической инволюции. Следовательно,

$$\dim M^{(+)} - \dim M^{(-)} = \pm m, \quad (9)$$

причем $\dim M^{(+)} - \dim M^{(-)} = m$ только при инволюции типа транспонирование. Поскольку I_λ – алгебра матриц порядка d_λ для любого $\lambda \vdash n$, из (9) следует, что

$$\dim R^{(+)} - \dim R^{(-)} \leq \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda, \quad (10)$$

причем равенство в (10) возможно лишь тогда, когда инволюция $*$ на I_λ – транспонирование для всех $\lambda \vdash n$. Следовательно, чтобы доказать предложение, достаточно убедиться в выполнении равенства

$$\dim R^{(+)} - \dim R^{(-)} = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda. \quad (11)$$

Заметим теперь, что базис пространства $R^{(+)}$ состоит из элементов $\sigma + \sigma^*$, а базис $R^{(-)}$ – из ненулевых элементов $\sigma - \sigma^*$. Таким образом, левая часть (11) равна числу таких $\sigma \in S_n$, что $\sigma^* = g^{-1}\sigma^{-1}g = \sigma$. Последнее равенство равносильно условию $(g\sigma)^2 = e$, поскольку $g^2 = e$. Следовательно, левая часть (11) – это число элементов порядка 1 или 2 в S_n .

Покажем, что и правая часть (11) равна количеству таких $\tau \in S_n$, что $\tau^2 = e$. В комбинаторике хорошо известно соответствие Робинсона–Шенстеда

$$\rho: \pi \rightarrow (P, Q), \quad (12)$$

сопоставляющее каждой подстановке $\pi \in S_n$ пару стандартных таблиц Юнга P, Q с одной и той же диаграммой D_λ (см. [19; гл. 3]). При этом известно [19; теорема 3.1.1], что (12) – взаимно-однозначное соответствие. Более того, согласно теореме Шуценберже [19; теорема 3.6.6], если $\rho(\pi) = (P, Q)$, то $\rho(\pi^{-1}) = (Q, P)$. Следовательно, количество элементов порядка 1 или 2 равно количеству стандартных таблиц Юнга T_λ для всех $\lambda \vdash n$ вместе взятых. Но с другой стороны, для каждого фиксированного $\lambda \vdash n$ количество стандартных таблиц T_λ равно d_λ , как отмечалось выше. Следовательно, правая часть (11) совпадает с левой, и предложение доказано.

Из предложения 1 и леммы 1 немедленно получаем оценки для PI-экспонент группы S_n .

ТЕОРЕМА 3. Пусть F – поле нулевой характеристики и $R = FS_n$, где $n \geq 4$, $n \neq 6$. Если $*$: $R \rightarrow R$ – инволюция, индуцированная с группы S_n , а $R^{(-)}$ – лиевская подалгебра кососимметрических элементов в R , то

$$\exp^L(R) = 2 \frac{k+1}{k} \exp^L(R^{(-)}), \quad \exp^*(R) = 2 \frac{k}{k-1} \exp^L(R^{(-)}),$$

где k – максимальная размерность неприводимых представлений S_n .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $n = 6$ группа S_6 обладает одним внешним автоморфизмом 2-го порядка. Максимальная размерность неприводимых представлений равна 16, причем такое представление единственно с точностью до изоморфизма. Следовательно, простой идеал I алгебры $R = FS_6$ максимальной размерности выдерживает все инволюции R . Поэтому для $R = FS_6$ выполнены неравенства

$$\exp^L(R) \leq 2 \frac{k+1}{k} \exp^L(R^{(-)}), \quad \exp^*(R) \leq 2 \frac{k}{k-1} \exp^L(R^{(-)}),$$

где $k = 16$, причем неравенства становятся равенствами, если инволюция индуцирована внутренним автоморфизмом группы S_6 .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. M. Isaacs, D. S. Passman, “Groups with representations of bounded degree”, *Canad. J. Math.*, **16** (1964), 299–309.
- [2] D. S. Passman, “Group rings satisfying a polynomial identity”, *J. Algebra*, **20**:1 (1972), 103–117.
- [3] D. S. Passman, *The Algebraic Structure of Group Rings*, Pure Appl. Math., John Wiley & Sons, New York, 1977.
- [4] J. Bergen, M. Cohen, “Action of commutative Hopf algebra”, *Bull. London Math. Soc.*, **18**:2 (1986), 159–164.
- [5] Yu. A. Bahturin, A. Giambruno, D. M. Riley, “Group-graded algebras with polynomial identity”, *Israel J. Math.*, **104**:1 (1998), 145–155.
- [6] Yu. A. Bahturin, M. V. Zaicev, “Identities of graded algebras and codimension growth”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356**:10 (2004), 3939–3950.

- [7] E. Aljadeff, *On the Codimension Growth of G -graded Algebras*, arXiv: [math.RA/0908.2385](#).
- [8] A. Giambruno, M. Zaicev, “Lie, Jordan and proper codimensions of associative algebras”, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **57**:2 (2008), 161–171.
- [9] S. A. Amitsur, “Rings with involution”, *Israel J. Math.*, **6**:2 (1968), 99–106.
- [10] S. A. Amitsur, “Identities in rings with involutions”, *Israel J. Math.*, **7**:1 (1969), 63–68.
- [11] Ю. А. Бахтурин, *Тождества в алгебрах Ли*, Наука, М., 1985.
- [12] A. Regev, “Existence of identities in $A \otimes B$ ”, *Israel J. Math.*, **11**:2 (1972), 131–152.
- [13] М. В. Зайцев, “Целочисленность экспонент роста тождеств конечномерных алгебр Ли”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:3 (2002), 23–48.
- [14] A. Giambruno, M. Zaicev, “Involution codimensions of finite dimensional algebras and exponential growth”, *J. Algebra*, **222**:2 (1999), 471–484.
- [15] L. Rowen, *Ring Theory*, v. 1, Pure Appl. Math., **127**, Academic Press, Boston, MA, 1988.
- [16] A. Giambruno, A. Regev, M. V. Zaicev, “Simple and semisimple Lie algebras and codimension growth”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:4 (2000), 1935–1946.
- [17] М. Гого, Ф. Гроссханс, *Полупростые алгебры Ли*, Мир, М., 1981.
- [18] Г. Джеймс, *Теория представлений симметрических групп*, Математика. Новое в зарубежной науке, **32**, Наука, М., 1982.
- [19] B. Sagan, *The Symmetric Group. Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, Grad. Texts in Math., **203**, Springer–Verlag, New York, 2001.

О. Е. Безущак

Киевский национальный университет им. Т. Г. Шевченко

E-mail: bezusch@univ.kiev.ua

Поступило

20.10.2010

М. В. Зайцев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: zaicevmv@mail.ru