Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Х. Хасанов, Абсолютная сходимость рядов Фурье почти-периодических функций, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 5, 745–756

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8778>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:20:04

Абсолютная сходимость рядов Фурье почти-периодических функций

Ю. Х. Хасанов

В работе даются необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических по Безиковичу функций, когда показатели Фурье имеют предельные точки на бесконечности или в нуле. В зависимости от поведения показателей Фурье в качестве структурных свойств функций используются модуль непрерывности или модуль усреднения высшего порядка. Рассмотрен случай равномерных почти-периодических функций ограниченной вариации.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm8778

1. Введение. Напомним, что пространство B_p , $1 \leq p \leq \infty$, почти-периодических по Безиковичу функций есть замыкание множества тригонометрических полиномов $t(x) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k x}$, $a_k \in \mathbb{C}$, $\lambda_k, x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, по норме

$$\|f\|_{B_p} = \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} = \{\overline{M}[|f(x)|^p]\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{B_\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \quad p = \infty.$$

Пространство B_∞ равномерных почти-периодических функций обозначают B .

Для каждой $f \in B_p$ определена функция

$$a(\lambda) = M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x)e^{-i\lambda x} dx.$$

Она может отличаться от нуля не более, чем на счетном множестве значений λ : $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$. Числа λ_n называются *показателями (спектром) Фурье*, а числа $A_n = a(\lambda_n)$ — *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$. Итак, для каждой $f \in B_p$ можно записать ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}.$$

Основные факты о функциях из пространств B_p можно найти в [1].

В качестве структурной характеристики функции $f \in B_p$, $p \geq 1$, будем использовать модуль непрерывности порядка k :

$$\omega_k(f; h)_{B_p} = \sup_{|t| \leq h} \|\Delta_t^k f(x)\|_{B_p},$$

$$\Delta_t^k f(x) = \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{k}{r} f\left(x - \frac{(2r-k)t}{2}\right), \quad h > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В работах Левитана [1], Бредихиной [2], [3], Муселиака [4], Купцова [5], Притулы [6], Джафарова и Мамедова [7] и др. получены достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических в смысле Бора и Безиковича функций.

Муселиак [4] доказал, что если спектр $\lambda_n \rightarrow \infty$ и $n^\alpha = O(\lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$, $\alpha > 0$, то для функции $f \in B_2$ условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(1-\beta/2)/\alpha-1} \omega_1^\beta\left(f; \frac{1}{n}\right)_{B_2} < \infty \quad (1.1)$$

при $0 < \beta < 2$ влечет сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^\beta$.

Купцов [5] показал, что для функции $f \in B$ условие (1.1) при $\alpha = \beta = 1$ и замене величины $\omega_1(f; 1/n)_{B_2}$ на $\omega_2(f; 1/n)_B$ обеспечивает абсолютную сходимость ряда Фурье.

В работе Притулы [6] доказывається, что если при $\lambda_n \rightarrow \infty$, $0 < \beta < q$, $2 \leq q < \infty$, $\gamma > 0$ выполняется условие

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2^\nu}}{\lambda_{2^{\nu-1}}} \right)^\beta \omega_1^\beta(f; \lambda_{2^\nu}^{-1})_{B_p} 2^{\nu(\gamma+(q-\beta)/q)} < \infty,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^\beta n^\gamma$ сходится.

В случае, когда $f \in B_p$, $1 < p \leq 2$, $\lambda_n \rightarrow 0$, Джафаров и Мамедов [7] установили условия сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^\beta \varphi(n)$ при некоторых условиях на $\varphi(n)$. Вместо модуля непрерывности они использовали характеристику

$$\Omega(f; H; \delta; \theta)_{B_p} = \delta \sup_x \left| \int_0^\infty e^{-\delta t} f(x-t) e^{i\theta t} dt \right|, \quad \delta > 0, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Работы [2] и [3] содержат достаточные признаки абсолютной сходимости лакунарных рядов Фурье при $\lambda_n \rightarrow \infty$ в терминах наилучших приближений почти-периодических функций целыми функциями конечной степени.

В настоящей заметке найдены не только новые достаточные, но и необходимые условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций из пространства B_2 , которые дополняют, а в ряде случаев усиливают результаты работ [1]–[7].

В п. 2 в терминах модулей непрерывности приводятся необходимые и достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций, когда спектр $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ имеет единственную предельную точку в бесконечности, т.е.

$$\lambda_n < \lambda_{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty. \quad (1.2)$$

Также исследованы признаки абсолютной сходимости рядов Фурье равномерных почти-периодических функций, имеющих ограниченную вариацию.

В п. 3 аналогичные результаты получены для рядов Фурье, когда спектр Λ имеет предельную точку в нуле:

$$\lambda_n < \lambda_{n-1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0. \quad (1.3)$$

В качестве структурной характеристики впервые применяется модуль усреднения порядка k функции $f \in B_p$, $p \geq 1$:

$$W_k(f; H)_{B_p} = \sup_{T \geq H} \|f_{T^k}(x)\|_{B_p}, \quad (1.4)$$

где $H > 0$, $k \in \mathbb{N}$,

$$f_{T^k}(x) = (2T)^{-k} \int_{x-T}^{x+T} dt_1 \int_{t_1-T}^{t_1+T} dt_2 \cdots \int_{t_{k-2}-T}^{t_{k-2}+T} dt_{k-1} \int_{t_{k-1}-T}^{t_{k-1}+T} f(t_k) dt_k.$$

2. Случай, когда спектр $\lambda_n \rightarrow \infty$. Для $0 < \beta < 2$ и $0 \leq \gamma < 1$ рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\beta} n^{\gamma}, \quad (2.1)$$

в котором $\{A_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $f \in B_2$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть спектр $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ функции $f \in B_2$ удовлетворяет условиям (1.2) и

$$n^{\alpha} = O(\lambda_n), \quad \alpha > 0. \quad (2.2)$$

Если при $0 < \beta < 2$, $0 \leq \gamma < 1$, $k > (\gamma + 1 - \beta/2)/(\alpha\beta)$ выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(\gamma+1-\beta/2)/\alpha-1} \omega_k^{\beta} \left(f; \frac{1}{n} \right)_{B_2} < \infty, \quad (2.3)$$

то ряд (2.1) сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\lambda_n \geq \pi$. Пусть

$$N_{\nu} = \{n : 2^{\nu-1}\pi \leq \lambda_n < 2^{\nu}\pi\}, \quad \nu \geq 1,$$

$m(N_{\nu})$ – количество элементов в N_{ν} . Коэффициентами Фурье функции $\Delta_h^k f(x)$ будут числа $A_n 2^k \sin^{2k}(h/2)\lambda_n$. Тогда в силу равенства Парсеваля [1]

$$2^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 \sin^{2k} \frac{h}{2} \lambda_n = \|\Delta_h^k f(x)\|_{B_2}^2. \quad (2.4)$$

Тем более

$$\sum_{n \in N_{\nu}} |A_n|^2 \sin^{2k} \frac{h}{2} \lambda_n \leq \omega_k^2(f; h)_{B_2}. \quad (2.5)$$

При $h = 2^{-\nu}$ для чисел $\lambda_n \in N_{\nu}$ будет $\sin(\lambda_n h/2) \geq 1/\sqrt{2}$, и из оценки (2.5) выводим, что

$$\sum_{n \in N_{\nu}} |A_n|^2 \ll \omega_k^2(f; 2^{-\nu})_{B_2}. \quad (2.6)$$

По условиям теоремы $\lambda_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, и выполняется (2.2). Выберем возрастающую функцию $\lambda(x)$ такую, что $\lambda(n) = \lambda_n$ и $x^\alpha = O(\lambda(x))$. Обозначив через $y = \mu(x)$ обратную функцию к $\lambda(x)$, имеем

$$y^\alpha = x \cdot \frac{y^\alpha}{\lambda(y)} = O(x),$$

где $x = \lambda(y)$. Следовательно, $y = O(x^{1/\alpha})$. Отсюда

$$m(N_\nu) \leq \mu(2^\nu \pi) - \mu(2^{\nu-1} \pi) + 1 = O(2^{\nu/\alpha}).$$

Если $\gamma \geq 0$, то применяя неравенство Гёльдера, из (2.6) получим

$$\begin{aligned} \sum_{n \in N_\nu} n^\gamma |A_n|^\beta &\leq \left\{ \sum_{n \in N_\nu} n^{\gamma(1-\beta/2)^{-1}} \right\}^{1-\beta/2} \cdot \left\{ \sum_{n \in N_\nu} |A_n|^2 \right\}^{\beta/2} \\ &\ll 2^{(\nu\gamma)/\alpha} \cdot 2^{(\nu(1-\beta/2))/\alpha} \omega_k^\beta(f; 2^{-\nu})_{B_2} = 2^{(\nu(\gamma+1-\beta/2))/\alpha} \omega_k^\beta(f; 2^{-\nu})_{B_2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

После суммирования (2.7) по ν выводим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n \in N_\nu} n^\gamma |A_n|^\beta \ll \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{(\nu(\gamma+1-\beta/2))/\alpha} \omega_k^\beta(f; 2^{-\nu})_{B_2}.$$

Отсюда в силу монотонности величины $\omega_k(f; h)_{B_2}$ получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma |A_n|^\beta \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{(\gamma+1-\beta/2)/\alpha-1} \omega_k^\beta\left(f; \frac{1}{n}\right)_{B_2}.$$

Таким образом, из условия (2.3) и последнего неравенства вытекает сходимость ряда (2.1). Теорема 1 доказана.

Заметим, что при $\gamma = 0$, $k = 1$ теорема 1 содержит результат Ю. Муселиака (см. [4]). Так как $\omega_k(f; h)_{B_2} \leq 2^k \omega_1(f; h)_{B_2}$, то при $\gamma = 0$ теорема 1 дает более сильное условие сходимости рядов вида (2.1), чем теорема Муселиака. Если, например, $\beta = 1$, $0 < \alpha \leq 1/2$, то условие (1.1) в теореме Муселиака выполнено только для констант. За счет выбора числа k в теореме 1 этот недостаток удастся ликвидировать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорят, что функция $f \in B$ имеет вариацию порядка $(m, 2)$, если

$$V_{m,2}(f) = \sup_{[a,b], T} \sum_{j=1}^N \left| f(x_j) - 2f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) + f(x_{j+1}) \right|^m < \infty,$$

где T – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ точками $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$. Такой класс функций обозначим через $BV_{m,2}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть спектр $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ функции $f \in BV_{m,2}$, $0 < m < 2$, удовлетворяет условиям (1.2) и (2.2). Если при $0 < \beta < 2$ имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1} \omega_k^{\beta(1-m/2)}\left(f; \frac{1}{n}\right)_B < \infty,$$

где $\rho = (1 - \beta/2)/\alpha - \beta/2$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^\beta$ сходится.

Это утверждение является следствием теоремы 1 при $\gamma = 0$ и следующей леммы, имеющей и самостоятельный интерес.

ЛЕММА 1. Если $f \in BV_{m,2}$, $0 < m < 2$, $0 < h \leq 1$, то справедлива оценка

$$\omega_2(f; h)_{B_2} \leq (2hV_{m,2}(f))^{1/2} \omega_2^{1-m/2}(f; h)_B. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f \in B$, то равномерно по χ существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{Nh} \int_{\chi}^{\chi+Nh} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|^2 dx,$$

не зависящий от χ (см. [1; теорема 1.3.2, с. 34]).

Введем обозначение

$$\varpi_2^2(f; h)_{B_2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{Nh} \int_{\chi}^{\chi+Nh} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|^2 dx.$$

Тогда

$$\varpi_2^2(f; h)_{B_2} = \frac{1}{Nh} \int_{kh}^{kh+Nh} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|^2 dx + \varepsilon_k(N),$$

где $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_k(N) = 0$ равномерно по k .

Если натуральное число S удовлетворяет неравенствам $Sh \leq 1 < (S+1)h$, то

$$\begin{aligned} S\varpi_2^2(f; h)_{B_2} &= \frac{1}{Nh} \sum_{k=0}^{S-1} \int_{kh}^{kh+Nh} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|^2 dx + \sum_{k=0}^{S-1} \varepsilon_k(N) \\ &\leq \frac{1}{Nh} \omega_2^{2-m}(f; h)_B \int_0^{Nh} \sum_{k=0}^{S-1} |f(x+h+kh) - 2f(x+kh) + f(x-h+kh)|^m dx \\ &\quad + \sum_{k=0}^{S-1} \varepsilon_k(N) \\ &\leq V_{m,2}(f) \cdot \omega_2^{2-m}(f; h)_B + \sum_{k=0}^{S-1} \varepsilon_k(N) \\ &\leq ((S+1)h)V_{m,2}(f) \cdot \omega_2^{2-m}(f; h)_B + \sum_{k=0}^{S-1} \varepsilon_k(N). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\varpi_2^2(f; h)_{B_2} \leq \frac{(S+1)h}{S} V_{m,2}(f) \cdot \omega_2^{2-m}(f; h)_B + \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{S-1} \varepsilon_k(N).$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим (2.8). Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Из теоремы 1 при $k = 2$ и $\gamma = 0$ следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^\beta \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{(1-\beta/2)/\alpha} \omega_2^\beta \left(f; \frac{1}{n} \right)_{B_2}.$$

Далее, в силу неравенства (2.8)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^\beta \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{(1-\beta/2)/\alpha-\beta/2-1} \omega_2^{\beta(1-m/2)} \left(f; \frac{1}{n} \right)_B.$$

Теорема 2 доказана.

Следующее утверждение показывает, что условие (2.3) не только достаточно, но и необходимо для абсолютной сходимости рядов Фурье функций из B_2 с монотонными коэффициентами.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $f \in B_2$ и ее коэффициенты Фурье $\{A_n\}$ монотонно убывают. Если числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям (1.2) и $\lambda_n = n^\alpha$, $\alpha > 0$, то из сходимости ряда (2.1) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu(\gamma+1-\beta/2)} \omega_k^\beta(f; 2^{-\nu\alpha})_{B_2},$$

где $0 < \beta < 2$, $0 \leq \gamma < 1$, $k > (\gamma + 1 - \beta/2)/(\alpha\beta)$.

Для доказательства теоремы сначала приведем некоторые вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 2 (Конюшков [8]). Пусть $d_n \geq 0$, $c > 1$, $0 < \delta < 1$, и при некотором $\tau > 0$ последовательность $\{n^{-\tau} d_n\}$ почти убывает. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-c} \left\{ \sum_{m=1}^n d_m \right\}^\delta \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c} (n d_n)^\delta.$$

ЛЕММА 3 (Конюшков [8]). Пусть при некотором $\tau > 0$ последовательность $\{n^{-\tau} d_n\}$ почти убывает. Тогда при $0 < \eta < 1$, $\delta - \eta > -1$ справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta-\eta} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} d_k \right\}^\eta \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^\delta d_n^\eta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В силу (2.4)

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^k f(x)\|_{B_2}^2 &= 2^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \sin^{2k} \frac{h}{2} \lambda_n \leq 2^{2k} \sum_{n=1}^{2^\nu} A_n^2 \sin^{2k} \frac{h}{2} \lambda_n + 2^{2k} \sum_{n=2^{\nu+1}}^{\infty} A_n^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{2^\nu} A_n^2 h^{2k} \lambda_n^{2k} + 2^{2k} \sum_{n=2^{\nu+1}}^{\infty} A_n^2 = h^{2k} \sum_{n=1}^{2^\nu} A_n^2 n^{2k\alpha} + 2^{2k} \sum_{n=2^{\nu+1}}^{\infty} A_n^2. \end{aligned}$$

Отсюда для $h \leq 1/\lambda_{2^\nu} = 2^{-\nu\alpha}$ получим

$$\omega_k^\beta(f; 2^{-\nu\alpha})_{B_2} \ll \left\{ 2^{-2\nu k\alpha} \sum_{n=1}^{2^\nu} A_n^2 n^{2k\alpha} \right\}^{\beta/2} + \left\{ \sum_{n=2^{\nu+1}}^{\infty} A_n^2 \right\}^{\beta/2}.$$

Умножая обе части последнего неравенства на $2^{\nu(\gamma+1-\beta/2)}$ и суммируя по ν , находим

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(\gamma+1-\beta/2)} \omega_k^{\beta}(f; 2^{-\nu\alpha})_{B_2} \\ & \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(\gamma+1-\beta/2-k\alpha\beta)} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{2^{\nu}} A_n^2 n^{2k\alpha} \right\}^{\beta/2} + \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(\gamma+1-\beta/2)} \cdot \left\{ \sum_{n=2^{\nu}+1}^{\infty} A_n^2 \right\}^{\beta/2} \\ & = S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части последнего неравенства. Согласно лемме Муселиака (см. [4; лемма 2]) сходимость ряда S_1 эквивалентна сходимости ряда

$$S_1^* = \sum_{n=0}^{\infty} n^{\gamma-\beta/2-k\alpha\beta} \cdot \left\{ \sum_{m=1}^n A_m^2 m^{2k\alpha} \right\}^{\beta/2}.$$

Покажем, что ряд S_1^* сходится. Для этого применим лемму 2 при $\delta = \beta/2$, $d_n = A_n^2 n^{2k\alpha}$, $c = \alpha\beta k + \beta/2 - \gamma$:

$$S_1^* \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\beta/2-k\alpha\beta} \cdot \{n A_n^2 n^{2k\alpha}\}^{\beta/2} = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\beta} n^{\gamma}. \quad (2.9)$$

Аналогично, при $\alpha = \beta/2$, $\delta = \gamma$ имеем

$$S_2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\beta/2} \cdot \left\{ \sum_{m=n+1}^{\infty} A_m^2 \right\}^{\beta/2} \ll \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\beta} n^{\gamma}.$$

Из этого неравенства и оценки (2.9) получаем утверждение теоремы 3.

Рассмотрим ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) |A_n|^{\beta}, \quad 0 < \beta < 2, \quad (2.10)$$

где $\varphi(n)$ – четная, положительная функция, определенная на множестве целых чисел, $\{A_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $f \in B_2$.

В дальнейшем нам понадобится величина

$$\psi_{\beta}(2^{\nu}) = \left\{ \sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} [\varphi(n)]^{2/(2-\beta)} \right\}^{1-\beta/2}. \quad (2.11)$$

Следующее утверждение является обобщением теоремы 1.

ТЕОРЕМА 4. Пусть спектр $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ функции $f \in B_2$ удовлетворяет условиям (1.2). Если при $0 < \beta < 2$ выполнено условие

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2^{\nu}}}{\lambda_{2^{\nu-1}}} \right)^{k\beta} \psi_{\beta}(2^{\nu}) \omega_k^{\beta}(f; \lambda_{2^{\nu}}^{-1})_{B_2} < \infty, \quad (2.12)$$

то ряд (2.10) сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (2.4) следует, что при любом $\nu = 1, 2, \dots$ справедливо

$$\sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} |A_n|^2 \sin^{2k} \frac{h}{2} a \lambda_n \leq \omega_k^2(f; h)_{B_2}. \quad (2.13)$$

Для $h = 1/\lambda_{2^{\nu}}$ и $n = 2^{\nu-1}, \dots, 2^{\nu} - 1$ будет $h\lambda_n/2 \leq 1/2$, поэтому

$$\sin \frac{h\lambda_n}{2} = \sin \frac{\lambda_n}{2\lambda_{2^{\nu}}} \geq \left(\sin \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda_n}{\lambda_{2^{\nu}}}.$$

Отсюда и из (2.13)

$$\omega_k^2\left(f, \frac{1}{\lambda_{2^{\nu}}}\right)_{B_2} \gg \frac{1}{\lambda_{2^{\nu}}^{2k}} \sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} |A_n|^2 \lambda_n^{2k} \gg \left(\frac{\lambda_{2^{\nu-1}}}{\lambda_{2^{\nu}}} \right)^{2k} \sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} |A_n|^2.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} |A_n|^2 \ll \left(\frac{\lambda_{2^{\nu}}}{\lambda_{2^{\nu-1}}} \right)^{2k} \omega_k^2\left(f, \frac{1}{\lambda_{2^{\nu}}}\right)_{B_2}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, при $0 < \beta < 2$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} \varphi(n) |A_n|^{\beta} &\leq \left\{ \sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} [\varphi(n)]^{2/(2-\beta)} \right\}^{1-\beta/2} \cdot \left\{ \sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} |A_n|^2 \right\}^{\beta/2} \\ &\ll \psi_{\beta}(2^{\nu}) \left(\frac{\lambda_{2^{\nu}}}{\lambda_{2^{\nu-1}}} \right)^{k\beta} \omega_k^{\beta}(f; \lambda_{2^{\nu}}^{-1})_{B_2}. \end{aligned}$$

Суммируя по ν , находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) |A_n|^{\beta} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_{\beta}(2^{\nu}) \left(\frac{\lambda_{2^{\nu}}}{\lambda_{2^{\nu-1}}} \right)^{k\beta} \omega_k^{\beta}(f; \lambda_{2^{\nu}}^{-1})_{B_2}.$$

Отсюда и из (2.12) следует сходимость ряда (2.10). Теорема 4 доказана.

3. Случай, когда спектр $\lambda_n \rightarrow 0$. Рассмотрим ряд (2.1).

ТЕОРЕМА 5. Пусть для спектра $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ функции $f \in B_2$ выполняются условия (1.3) и $\lambda_n = O(n^{-\alpha})$, $\alpha > 0$. Если при

$$0 < \beta < 2, \quad \rho = \frac{\gamma + 1 - \beta/2}{\alpha}, \quad 0 \leq \gamma < 1, \quad k > \frac{\gamma + 1 - \beta/2}{\alpha\beta},$$

выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1} W_k^{\beta}(f; n)_{B_2} < \infty, \quad (3.1)$$

то ряд (2.1) сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$ является рядом Фурье функции $f \in B_2$. Тогда рядом Фурье функции $f_{T^k}(x)$ будет ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x} \left\{ \frac{\sin \lambda_n T}{i\lambda_n T} \right\}^k.$$

Это вытекает из следующего тождества:

$$\frac{1}{(2T)^k} \int_{x-T}^{x+T} dt_1 \int_{t_1-T}^{t_1+T} dt_2 \cdots \int_{t_{k-2}-T}^{t_{k-2}+T} dt_{k-1} \int_{t_{k-1}-T}^{t_{k-1}+T} e^{i\lambda_n t_k} dt_k = e^{i\lambda_n x} \left\{ \frac{\sin \lambda_n T}{i\lambda_n T} \right\}^k.$$

В силу равенства Парсеваля

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left| A_n \left\{ \frac{\sin \lambda_n T}{i\lambda_n T} \right\}^k \right|^2 \right\}^{1/2} = \|f_{T^k}(x)\|_{B_2} \leq W_k(f; T)_{B_2}. \quad (3.2)$$

Можно считать, что $\lambda_n \leq \pi/4$. Пусть $T = 2^\nu$,

$$N_\nu = \{n : 2^{-(\nu+2)}\pi < \lambda_n \leq 2^{-(\nu+1)}\pi\}, \quad \nu \geq 1,$$

$m(N_\nu)$ – количество элементов в N_ν . Выберем убывающую функцию $\lambda(x)$ такую, что $\lambda(n) = \lambda_n$ и $\lambda(x)x^\alpha = O(1)$. Обозначив через $y = \mu(x)$ – обратную функцию к $\lambda(x)$, имеем $x \cdot y^\alpha = \lambda(y)y^\alpha = O(1)$, где $x = \lambda(y)$. Следовательно, $y = O(x^{-1/\alpha})$. Отсюда

$$m(N_\nu) \leq \mu(2^{-(\nu+2)}\pi) - \mu(2^{-(\nu+1)}\pi) + 1 = O(2^{\nu/\alpha}).$$

Так как при $n \in N_\nu$ будет $\pi/4 \leq \lambda_n T \leq \pi/2$, $\sin \lambda_n T \geq 1/\sqrt{2}$, из (3.2)

$$\left\{ \sum_{n \in N_\nu} |A_n|^2 \right\}^{1/2} \ll W_k(f; 2^\nu)_{B_2}. \quad (3.3)$$

Если $\gamma \geq 0$, то применяя неравенство Гёльдера, (3.3), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{n \in N_\nu} |A_n|^\beta n^\gamma &\leq \left\{ \sum_{n \in N_\nu} n^{2 \cdot (\gamma/(2-\beta))} \right\}^{1-\beta/2} \cdot \left\{ \sum_{n \in N_\nu} |A_n|^2 \right\}^{\beta/2} \\ &\ll 2^{(\nu\gamma)/\alpha} \cdot 2^{\nu \cdot ((1-\beta/2)/\alpha)} \cdot W_k^\beta(f; 2^\nu)_{B_2} = 2^{\nu/\alpha(\gamma+1-\beta/2)} \cdot W_k^\beta(f; 2^\nu)_{B_2}. \end{aligned}$$

Суммируя по ν последнее неравенство, получим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n \in N_\nu} |A_n|^\beta n^\gamma \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu/\alpha(\gamma+1-\beta/2)} \cdot W_k^\beta(f; 2^\nu)_{B_2}.$$

В силу монотонности величины $W_k(f; H)_{B_2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^\beta n^\gamma \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{(\gamma+1-\beta/2)/\alpha-1} \cdot W_k^\beta(f; n)_{B_2}.$$

Отсюда и из условия (3.1) вытекает сходимость ряда (2.1). Теорема 5 доказана.

Естественно возникает вопрос, в какой мере условие (3.1) в теореме 5 является необходимым для сходимости ряда (2.1).

ТЕОРЕМА 6. Пусть последовательность коэффициентов Фурье функции $f \in B_2$ монотонно убывает, $\lambda_n = n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Тогда из сходимости ряда (2.1) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(\gamma+1-\beta/2)} W_k^{\beta}(f; 2^{\nu\alpha})_{B_2}, \quad (3.4)$$

где $0 < \beta < 2$, $0 \leq \gamma < 1$, $k > (\gamma + 1 - \beta/2)/(\alpha\beta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенства Парсеваля

$$\begin{aligned} \|f_{T^k}(x)\|_{B_2}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \left\{ \frac{\sin \lambda_n T}{\lambda_n T} \right\}^{2k} \leq \sum_{n=1}^{2^{\nu}} A_n^2 \left\{ \frac{\lambda_n}{\lambda_{2^{\nu}}} \right\}^{2k} + \sum_{n=2^{\nu}+1}^{\infty} A_n^2 \\ &= \lambda_{2^{\nu}}^{-2k} \sum_{n=1}^{2^{\nu}} A_n^2 \lambda_n^{2k} + \sum_{n=2^{\nu}+1}^{\infty} A_n^2. \end{aligned}$$

Так как $\lambda_n = n^{-\alpha}$, то

$$\|f_{T^k}(x)\|_{B_2}^2 \leq 2^{2\nu k \alpha} \sum_{n=1}^{2^{\nu}} A_n^2 n^{-2k\alpha} + \sum_{n=2^{\nu}+1}^{\infty} A_n^2.$$

Последнее неравенство верно при любом T , поэтому

$$W_k^2(f; 2^{\nu\alpha})_{B_2} \leq 2^{2\nu k \alpha} \sum_{n=1}^{2^{\nu}} A_n^2 n^{-2k\alpha} + \sum_{n=2^{\nu}+1}^{\infty} A_n^2$$

или при $0 < \beta < 2$

$$W_k^{\beta}(f; 2^{\nu\alpha})_{B_2} \ll \left\{ 2^{2\nu k \alpha} \sum_{n=1}^{2^{\nu}} A_n^2 n^{-2k\alpha} \right\}^{\beta/2} + \left\{ \sum_{n=2^{\nu}+1}^{\infty} A_n^2 \right\}^{\beta/2}.$$

Умножая обе части последнего неравенства на $2^{\nu(\gamma+1-\beta/2)}$ и суммируя по ν , находим

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(\gamma+1-\beta/2)} W_k^{\beta}(f; 2^{\nu\alpha})_{B_2} \\ &\ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(\gamma+1-\beta/2+k\alpha\beta)} \left\{ \sum_{n=1}^{2^{\nu}} A_n^2 n^{-2k\alpha} \right\}^{\beta/2} + \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(\gamma+1-\beta/2)} \left\{ \sum_{n=2^{\nu}+1}^{\infty} A_n^2 \right\}^{\beta/2} \\ &= S_1 + S_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства (3.5). Как и при доказательстве теоремы 3

$$\begin{aligned} S_1 &\ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\beta/2+k\alpha\beta} \left\{ \sum_{m=1}^n A_m^2 m^{-2k\alpha} \right\}^{\beta/2} = S_1^*, \\ S_2 &\ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\beta/2} \left\{ \sum_{m=n+1}^{\infty} A_m^2 \right\}^{\beta/2} = S_2^*. \end{aligned}$$

Покажем, что ряд S_1^* сходится. Для этого применим лемму 2 при

$$\delta = \frac{\beta}{2}, \quad d_n = A_n^2 n^{-2k\alpha}, \quad c = \frac{\beta}{2} - \gamma - k\alpha\beta.$$

Имеем

$$S_1^* \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\beta/2+k\alpha\beta} \{n A_n^2 n^{-2k\alpha}\}^{\beta/2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} |A_n|^{\beta}. \quad (3.6)$$

Аналогично, применяя лемму 3 при $\alpha = \beta/2$, $\delta = \gamma$, $d_n = A_n^2$, в силу монотонного убывания коэффициентов Фурье $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ получим

$$S_2^* \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} |A_n|^{\beta}. \quad (3.7)$$

Таким образом, из неравенств (3.6) и (3.7) с учетом неравенства (3.5) вытекает сходимость ряда (3.4). Теорема 6 доказана.

Следующее утверждение является обобщением теоремы 5 на случай рядов вида (2.10).

ТЕОРЕМА 7. Пусть спектр функции $f \in B_2$ удовлетворяет условиям (1.3), $\psi_{\beta}(2^{\nu})$ определено в (2.11). Если при $0 < \beta < 2$ выполнено условие

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_{\beta}(2^{\nu}) W_k^{\beta}(f; \lambda_{2^{\nu-1}}^{-1})_{B_2} < \infty, \quad (3.8)$$

то ряд (2.10) сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (3.2) вытекает, что при любом $\nu = 1, 2, \dots$

$$\sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} |A_n|^2 \left\{ \frac{\sin \lambda_n T}{\lambda_n T} \right\}^{2k} \leq W_k^2(f; T)_{B_2}. \quad (3.9)$$

Для $T = \lambda_{2^{\nu-1}}^{-1}$ и $n = 2^{\nu-1}, \dots, 2^{\nu} - 1$ будет $\lambda_n T \leq 1$, поэтому $\sin \lambda_n T \geq (\sin 1) \lambda_n T$. Отсюда и из (3.9) вытекает оценка

$$\sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} |A_n|^2 \ll W_k^2(f; \lambda_{2^{\nu-1}}^{-1})_{B_2}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, при $0 < \beta < 2$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} \varphi(n) |A_n|^{\beta} &\ll \left\{ \sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} \varphi^{2/(2-\beta)}(n) \right\}^{1-\beta/2} \left\{ \sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} |A_n|^2 \right\}^{\beta/2} \\ &\leq \psi_{\beta}(2^{\nu}) W_k^{\beta}(f; \lambda_{2^{\nu-1}}^{-1})_{B_2}. \end{aligned}$$

Суммируя по ν , придем к оценке

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) |A_n|^{\beta} \ll \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_{\beta}(2^{\nu}) W_k^{\beta}(f; \lambda_{2^{\nu-1}}^{-1})_{B_2}.$$

Сходимость ряда (2.10) следует из условия (3.8). Теорема 7 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, ГИТТЛ, М., 1953.
- [2] Е. А. Бредихина, “Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций”, *Докл. АН СССР*, **111**:6 (1956), 1163–1166.
- [3] Е. А. Бредихина, “Некоторые оценки отклонений частных сумм рядов Фурье от почти-периодических функций”, *Матем. сб.*, **50**:3 (1960), 369–382.
- [4] J. Musielak, “O bezwzględnej zbieżności szeregow Fouriera pewnych funcji prawie okresowich”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III*, **5** (1957), 9–17.
- [5] Н. П. Купцов, “Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций”, *Матем. сб.*, **40**:2 (1956), 157–178.
- [6] Я. Г. Притула, “Про абсолютну збіжність рядів Фурье майже періодичних функцій”, *Вісн. Львів. ун-ту*, **137**:5 (1971), 72–80.
- [7] А. С. Джафаров, Г. А. Мамедов, “Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций Безиковича”, *Изв. АН Азербайджан. ССР. Сер. Физ.-техн., матем. наук*, 1983, № 5, 8–13.
- [8] А. А. Конюшков, “Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье”, *Матем. сб.*, **44**:1 (1958), 53–84.

Ю. Х. Хасанов

Российско-Таджикский славянский университет,
г. Душанбе
E-mail: yukhas60@mail.ru

Поступило

17.03.2010

Исправленный вариант

05.12.2012