Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Буаррудж, А. В. Лебедев, Ф. Вагеманн, Деформации алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)$ в характеристиках 3 и 2, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 6, 808–824

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8779>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:15:17

Деформации алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)$ в характеристиках 3 и 2

С. Буаррудж, А. В. Лебедев, Ф. Вагеманн

Все конечномерные простые модулярные алгебры Ли с матрицей Картана не имеют даже инфинитезимальных деформаций, если характеристика p основного поля равна 0 или больше 3. Если $p = 3$, то ортогональная алгебра Ли $\mathfrak{o}(5)$ является одной из двух простых модулярных алгебр Ли с матрицей Картана, имеющих деформации (алгебры Брауна $\mathfrak{bt}(2; \alpha)$ входят в это семейство деформаций 10-мерных алгебр Ли и поэтому отдельно не перечислены); а 29-мерная алгебра Брауна $\mathfrak{bt}(3)$ является единственной другой простой алгеброй Ли с матрицей Картана, допускающей деформации. А. И. Кострикин и М. И. Кузнецов описали орбиты (классы изоморфизмов) под действием алгебраической группы $O(5)$ автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)$ на пространстве $H^2(\mathfrak{o}(5); \mathfrak{o}(5))$ инфинитезимальных деформаций и предъявили представителей классов изоморфизмов. Здесь мы даем явное описание глобальных деформаций алгебры $\mathfrak{o}(5)$ и описываем деформации простого аналога этой ортогональной алгебры в характеристике 2. В характеристике 3 мы нашли представителей классов изоморфизмов продеформированных алгебр, линейно зависящих от параметра.

Библиография: 23 названия.

1. Введение

В этой статье мы предполагаем, что поле $\mathbb{K}$ положительной характеристики p алгебраически замкнуто, когда это необходимо. Эта работа – продолжение и пояснение очень интересной, но слишком короткой статьи [1], а также – первый шаг в переносе результатов статьи [1] на случай $p = 2$. Мы даем обзор необходимых, но малоизвестных понятий и результатов и приводим важную для конкретных вычислений лемму Грозмана.

1.1. Предупреждение. Во-первых, между деформациями и элементами пространства $H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$ нет взаимно однозначного соответствия (вопреки заявленному в [2; предложение 1 и следствие 1]), поскольку

- 1) очевидно, коцикл может не продолжаться до глобальной деформации (даже формальной, без учета сходимости, если $p = 0$);
- 2) наоборот, у нескольких неэквивалентных деформаций может быть общая касательная, см. [3] (Д. А. Лейтес предположил, что этот феномен не встречается при $p > 0$, по крайней мере, для конечномерных алгебр Ли, так что если $H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}) = 0$, то алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действительно недеформируема).

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке университета Нанта.

Во-вторых, тот факт, что $H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}) \neq 0$, не эквивалентен деформируемости алгебры $\mathfrak{g}$. В положительной характеристике может быть меньше неизоморфных результатов деформации, чем $\dim H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$, – даже когда все инфинитезимальные деформации интегрируемы (до глобальных), – если (как отмечено в [1]) структурные константы не рациональны. Ниже мы проиллюстрируем это утверждение интригующей заметки [1] на простом примере.

1.2. Постановка задачи. Хорошо известно [4], [5], что конечномерные простые алгебры Ли над $\mathbb{C}$ жесткие, точнее (в свете вышеприведенных предупреждений), у них нет деформаций (даже инфинитезимальных). Над полями характеристики > 3 то, что $H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}) = 0$, верно не для всех¹ конечномерных простых алгебр Ли, но верно для тех $\mathfrak{g}$, у которых есть матрица Картана, см. [2]. Точное определение алгебры Ли с матрицей Картана в положительной характеристике см. в приложении, а подробности – в [7], [8], где рассмотрен также случай супералгебр Ли.

При $p = 3$ Рудаков и Кострикин [9], [2] открыли однопараметрическое семейство простых алгебр Ли, в которое входит ортогональная алгебра Ли $\mathfrak{o}(5)$; матрица Картана общего члена $L(\varepsilon)$ этого семейства имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 - \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \text{где } \varepsilon \neq 0. \quad (1)$$

При $\varepsilon = -1$ алгебра Ли $L(\varepsilon)$ изоморфна алгебре $\mathfrak{o}(5) \simeq \mathfrak{sp}(4)$, а при $\varepsilon = 1 + 1/\alpha$, где значение $\varepsilon = 1$ тоже допустимо, – алгебре Брауна $\mathfrak{br}(2; \alpha)$, см. [10], [7]. Значение $\varepsilon = 0$ исключено, поскольку алгебра Ли $L(0)$ не проста, а значит, резко отличается от остальных (простых) членов параметрического семейства.

Вскоре стало ясно, что семейство деформаций алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)$ зависит больше, чем от одного параметра.

Кострикин и Кузнецов рассмотрели в [1] некоторое 3-параметрическое семейство алгебр Ли $L(\varepsilon, \delta, \rho)$, содержащее 1-параметрическое семейство $L(\varepsilon) := L(\varepsilon, 0, 0)$. Оказалось, что кроме $L(\varepsilon)$ только алгебра Ли $L(-1, -1) := L(-1, -1, 0)$ нужна для классификации простых алгебр Ли.

Семейство $L(\varepsilon, \delta, \rho)$ явно построил в [9] Кострикин (мы воспроизведем эту конструкцию в п. 3.1), но при таком подходе механизм, производящий семейство, совершенно неясен.

Существует однако и абсолютно прозрачная конструкция. Немного раньше Кострикина, используя явное описание 3-параметрического семейства $\mathbb{T}(a, b, c)$ неприводимых 3-мерных $\mathfrak{sl}(2)$ -модулей в характеристике 3, полученное Рудаковым и Шафаревичем [11], Рудаков построил картановское продолжение²

$$L(a, b, c) := (\mathbb{T}(a, b, c), \mathfrak{gl}(2))_*,$$

являющееся $\mathbb{Z}$ -градуированным 3-параметрическим семейством деформаций алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)$ (в [9] конструкция Рудакова упомянута). Эта конструкция прозрачна,

¹Очевидный контрпример: ограничение деформации (квантования) с алгебры Пуассона $\mathfrak{po}(2n)$ на ее фактор по центру – алгебру Ли гамильтоновых векторных полей $\mathfrak{h}(2n) := \mathfrak{po}(2n)/\mathbb{Z}$, см. [6], где разобран пример при $p = 0$. Случай ограниченных алгебр Ли–Пуассона и гамильтоновых полей при $p > 2$ абсолютно аналогичен.

²Определения различных продолжений, в том числе с обрезающим параметром $\underline{N}$ при $p > 0$, см. в [12].

а явные формулы описаны в [13]: а именно,

$$L(a, b, c) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \quad \text{где } \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(2), \quad \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^*,$$

единица $z \in \mathfrak{gl}(2)$ действует на $L(a, b, c)$ как градуирующий оператор $z|_{\mathfrak{g}_i} = i \cdot \text{id}_{\mathfrak{g}_i}$, а слагаемое $\mathfrak{sl}(2)$ в $\mathfrak{gl}(2)$ действует на $\mathfrak{g}_{-1}$ как на $\mathbb{T}(a, b, c)$. Очевидно, что глубина и высота $\mathbb{Z}$ -градуировки алгебры $\mathfrak{o}(5)$ в ее реализации в виде $\mathfrak{sp}(4)$ сохраняются в каждом члене семейства $L(a, b, c)$.

Хотя никто явно не выражал параметры $(\varepsilon, \delta, \rho)$ в терминах параметров (a, b, c) или наоборот, множества продеформированных алгебр $L(\varepsilon, \delta, \rho)$ и $L(a, b, c)$ совпадают, как было отмечено еще в [9].

Отметим, что Грозман и Лейтес [13] нашли исключительные значения параметров (a, b, c) , при которых картановское продолжение

$$(\mathbb{T}(a, b, c), \mathfrak{gl}(2))_{*,N} = \bigoplus_{i=-1}^h \mathfrak{g}_i$$

является простой алгеброй Ли высоты $h > 1$, а алгебры Ли $L(a, b, c)$ (существующие при любых значениях параметров (a, b, c) , при которых $\mathbb{T}(a, b, c)$ – неприводимый $\mathfrak{gl}(2)$ -модуль) суть *частичные* продолжения высоты $h = 1$.

Кострикин [9] доказал, что

$$L(\varepsilon) \simeq L(\varepsilon') \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \varepsilon\varepsilon' = 1 \quad (\text{при } \varepsilon \neq \varepsilon') \quad (2)$$

(естественное объяснение этого изоморфизма в терминах отражений, похожих на группу Вейля, см. в [7]), и поставил задачу определить, какие из алгебр семейства $L(a, b, c)$ изоморфны.

Кострикин и Кузнецов [1] первыми обнаружили, что³

$$\dim H^2(L(\varepsilon); L(\varepsilon)) = 5,$$

так что семейство деформаций алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)$ зависит не более, чем от 5 параметров. Смысл слов “не более” пояснен в п. 1.1.

Кострикин и Кузнецов дали описание орбит действия группы $O(5)$ автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)$ в многообразии алгебр Ли, содержащем $L(-1) \simeq \mathfrak{o}(5)$. (Описание групп автоморфизмов большинства простых конечномерных модулярных алгебр Ли см. в [14].) Это означает, что Кострикин и Кузнецов перечислили все классы изоморфизмов элементов 5-параметрического семейства деформаций алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)$. Ответ таков:

$$\begin{aligned} &\text{“При } p = 3 \text{ алгебра Ли } L(-1, -1) \text{ и алгебры Ли } L(\varepsilon), \text{ исключая } \varepsilon = 0, \text{ пред-} \\ &\text{ставляют все, с учетом изоморфизмов (2), классы изоморфизмов простых} \\ &\text{10-мерных алгебр Ли, деформирующих } \mathfrak{o}(5).” \end{aligned} \quad (3)$$

(Если бы p было равно 0, то радиус r сферы с центром в нуле в пространстве тождественного представления группы $O(5)$ в пятимерном пространстве $H^2(\mathfrak{o}(5); \mathfrak{o}(5))$ был бы естественным параметром, нумерующим орбиты, а при $p > 0$ мог бы возникнуть дополнительный случай при $r = p$. Вышеприведенный ответ (3) похож на такой подсчет.)

³Явный вид пяти независимых коциклов см. в [7], где это было переоткрыто.

В этой работе мы отвечаем на следующие естественные вопросы, возникающие при чтении процитированных выше статей:

- (а) существует ли базис в пространстве $H^2(\mathfrak{o}(5); \mathfrak{o}(5))$, состоящий из коциклов, каждый из которых определяет глобальную деформацию;
- (б) существует ли 5-параметрическое семейство десятимерных простых алгебр Ли (над полем характеристики 3), включающее семейства из вопроса (а) и отвечающее *любой* линейной комбинации 5 базисных коциклов из вопроса (а)?

Ответ на оба вопроса – да, и в разделе 3 мы построим искомое семейство с помощью теории препятствий, используя скобки Масси. В сущности, утвердительный ответ на вопрос (а) уже получен в работе [1], но приведенные там аргументы, основанные на алгебраической геометрии, неявны и неконструктивны, а мы даем непосредственное доказательство и дополнительное подтверждение. В качестве побочного результата мы обнаружили, что каждая орбита $O(5)$ -действия в пространстве $H^2(\mathfrak{o}(5); \mathfrak{o}(5))$ содержит деформацию, *линейную* по параметру.

1.3. Случай $p = 2$. Существуют ли аналоги вышеописанных результатов при $p = 2$? В 1970-х гг. Лейтес предложил разделить на 2 последнюю строку стандартной матрицы Картана алгебры Ли $\mathfrak{o}(2n + 1)$, рассматриваемую над $\mathbb{C}$, дав таким образом возможность рассмотреть $\mathfrak{o}(2n + 1)$ при $p = 2$. Однако при $p = 2$ у самой алгебры Ли $\mathfrak{o}(2n + 1)$ нет матрицы Картана, она есть у ее производной $\mathfrak{o}(2n + 1)^{(1)}$, см. [7]; и это как раз $\mathfrak{o}(2n + 1)^{(1)}$ показалась в [10] новой алгеброй. (В то время, когда писали статью [10], термин “алгебра Ли $\mathfrak{g}(A)$ с матрицей Картана A ” не был внятно определен и применялся как к алгебрам Ли вида $\mathfrak{g}(A)$, так и к их подфакторам и алгебрам дифференцирований, см. [7].) Инфинитезимальные деформации алгебр Ли $\mathfrak{o}(2n + 1)$ и $\mathfrak{o}(2n + 1)^{(1)}$ вычислены при малых значениях параметра n в [15]; а здесь мы опишем, как инфинитезимальные деформации алгебры $\mathfrak{o}(5)^{(1)}$ могут быть продолжены до многопараметрического семейства алгебр Ли.

1.4. Открытые задачи. (а) Получить аналог результатов статьи [1] при $p = 2$: описать орбиты группы

$$\mathrm{Sp}(4) \simeq O(5) = \mathrm{aut}(\mathfrak{o}(5)^{(1)})$$

в 4-мерном пространстве $H^2(\mathfrak{o}(5)^{(1)}; \mathfrak{o}(5)^{(1)})$.

(б) Явно описать неизоморфные результаты деформации как алгебры Ли, сохраняющие геометрические объекты (тензор или распределение) как при $p = 2$, так и при $p = 3$.

(в) В [15] описаны инфинитезимальные деформации алгебры Ли $\mathfrak{br}(3)$. Изучить условия их интегрируемости. Описать классы изоморфизма продеформированных алгебр Ли и их интерпретации как в (б).

2. Деформации и когомологии

Напомним некоторые сведения из [4] и [16].

2.1. Случай $p \neq 2$. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли над $\mathbb{K}$. *Многопараметрической деформацией* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ или *многопараметрическим семейством* алгебр Ли, содержащим $\mathfrak{g}$ в качестве одного из членов, является алгебра Ли $\mathfrak{g}_t$, где $t = (t_1, \dots, t_r)$, заданная структурой алгебры Ли на тензорном произведении $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[[t]]$ такая, что алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$, т.е. та, которая получается, когда мы полагаем $t = 0$, изоморфна $\mathfrak{g}$, и такая,

что $t_1, \dots, t_r$ – скаляры по отношению к продеформированной скобке. *A posteriori* мы увидим, что в случаях, рассмотренных в этой работе, мы можем ограничиться многочленами по t вместо рядов.

В продеформированной алгебре Ли скобка имеет вид

$$[x, y]_{t_1, \dots, t_r} = c^0(x, y) + t_1 c_1^1(x, y) + \dots + t_r c_r^1(x, y) + t_1^2 \alpha_{1,1}(x, y) + t_1 t_2 \alpha_{1,2}(x, y) + \dots + t_r^2 \alpha_{r,r}(x, y) + \dots$$

для любых $x, y \in \mathfrak{g}$, где $c^0(x, y) := [x, y]$ есть скобка элементов x и y в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Нам надо проверить, что продеформированная скобка удовлетворяет тождеству Якоби. Условие первого порядка по t требует, чтобы отображения $c_i^1: \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ были 2-коциклами (с коэффициентами в присоединенном модуле), т.е. при любых $i = 1, \dots, r$ выполнялось условие

$$dc_i^1(x, y, z) := c_i^1([x, y], z) + c_i^1([y, z], x) + c_i^1([z, x], y) - [x, c_i^1(y, z)] - [y, c_i^1(z, x)] - [z, c_i^1(x, y)] = 0.$$

Две (формальные) однопараметрические деформации $\mathfrak{g}_t$ и $\tilde{\mathfrak{g}}_t$, заданные наборами $c = (c^1, c^2, \dots)$ и $\tilde{c} = (\tilde{c}^1, \tilde{c}^2, \dots)$, где c^i и $\tilde{c}^i$ суть соответствующие коэффициенты при t^i , приводят к эквивалентным результатам (т.е. $\mathfrak{g}_t$ и $\tilde{\mathfrak{g}}_t$ изоморфны как алгебры Ли с помощью изоморфизма, имеющего следующий специальный вид: $\tau(x) = \text{id}_{\mathfrak{g}}(x) + \sum_{i \geq 1} \tau_i(x) t^i$ при любых $x \in \mathfrak{g}$) тогда и только тогда, когда τ связывает c и $\tilde{c}$ следующими формулами (при всех $n > 0$):

$$\sum_{i+j=n} \tau_i(\tilde{c}^j(x, y)) = \sum_{i+j+k=n} c^i(\tau_j(x), \tau_k(y)).$$

Для членов первого порядка это означает, что две 1-параметрические деформации *инфинитезимально эквивалентны* (т.е. $\tau = \text{id} + t\tau_1$ и рассуждения проводятся по модулю t^2) тогда и только тогда, когда соответствующие 2-коциклы отличаются на кограницу. Эта кограница – не что иное, как τ_1 .

Аналогичное утверждение верно и для многопараметрических деформаций. Для краткости мы напомним свойства деформаций лишь в однопараметрическом случае; его обобщение на многопараметрический случай – стандартное дело. Тождество Якоби накладывает условия на все члены продеформированной скобки, и проверять эти условия следует по порядку.

Итак, поиск наиболее общей многопараметрической деформации данной алгебры Ли естественно начинается с описания пространства $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. Явный базис, заданный 2-коциклами (представляющими классы когомологий), задает инфинитезимальные деформации. Затем мы пытаемся продолжить такую инфинитезимальную деформацию на следующий порядок. Такой способ продолжать приводит нас к *скобкам Масси*, которые мы сейчас опишем, следуя [4], [16]–[18].

Пусть $\mathfrak{g}_t$ есть однопараметрическая деформация алгебры Ли $\mathfrak{g}$, заданная 2-коциклом $c = c^1$ и старшими членами $c^2, c^3, \dots$. Тождество Якоби по модулю t^{n+1} имеет вид

$$\sum_{i+j=n, i, j \geq 0} (c^i(c^j(x, y), z) + c^j(c^i(x, y), z) + \text{cyclic}(x, y, z)) = 0, \quad (4)$$

где выражение $\text{cyclic}(x, y, z)$ означает сумму по всем циклическим перестановкам аргументов выражений слева от него.

Выражение (4) можно переписать в виде

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n, i+j=n} [[c^i, c^j]](x, y, z) = 0,$$

где скобки $[[\cdot, \cdot]]$ называются *скобками Нийенхёйса* (в дифференциальной геометрии) или *скобками Масси* (в теории деформаций). Набор скобок $[[\cdot, \cdot]]$ задает на пространстве $H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ структуру супералгебры Ли (примеры см. в [19], [20]). Всю сумму можно теперь представить в виде уравнения *Маурера–Картана*:

$$\frac{1}{2} \sum_{i+j=n, i, j > 0} [[c^i, c^j]] = dc^n,$$

поскольку член $[[c^0, c^n]]$ есть как раз левая часть условия того, что c^n является 2-коциклом на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (с коэффициентами в присоединенном модуле).

Это ясно показывает, как продолжить инфинитезимальную деформацию (рассмотренную в этом абзаце для простоты лишь для однопараметрической деформации), заданную коциклом $c = c^1$: считаем *квадрат Масси* этого коцикла $[[c, c]]$. Если $[[c, c]] = 0$, то инфинитезимальная деформация удовлетворяет тождеству Якоби, а значит, является настоящей деформацией.

Если $[[c, c]] \in Z^3(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ не является кограницей, то инфинитезимальная деформация встречает препятствие и не может быть продолжена.

Если же $[[c, c]] = d\alpha$, где $\alpha \neq 0$, то $-\alpha t^2$ есть член в ряде, описывающем деформации до второго порядка включительно.

Чтобы перейти к третьему порядку, сделаем следующий шаг – вычислим скобку Масси $[[c, \alpha]]$. Снова имеется три возможности:

- 1) $[[c, \alpha]] = 0$;
- 2) $[[c, \alpha]] = d\beta$, где $\beta \neq 0$;
- 3) $[[c, \alpha]] \neq d\beta$ ни при каком β .

Если $[[c, \alpha]] = d\beta$, то β задает член деформации третьего порядка. С тем чтобы перейти к членам четвертого порядка, надо скомпенсировать выражение $[[\alpha, \alpha]] + [[c, \beta]]$ кограницей $d\gamma$ для некоторого γ и т.д.

Основная трудность в вышеописанной процедуре заключается в том, что представители классов когомологий коциклов α , β и т.д. определены неоднозначно⁴. Удачный выбор коцепей может значительно облегчить работу.

Мы вычисляли когомологии и скобки Масси, используя основанный на *Mathematica* пакет программ Грозмана *SuperLie*. Формула из следующей леммы была при этом очень полезна (естественное обобщение на произвольные модули см. в [8]). Для любой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ все коцепи с коэффициентами в присоединенном модуле можно представить в виде сумм тензорных произведений вида $a \otimes \omega$, где $a \in \mathfrak{g}$, а $\omega \in \bigwedge^\bullet(\mathfrak{g})$. Мы работаем с произвольным фиксированным базисом пространства $\mathfrak{g}$ и двойственным ему базисом пространства $\mathfrak{g}^*$.

⁴Если α – решение уравнения $d\alpha = [[c, c]]$, то $\alpha + \text{сосycle}$ тоже является решением. Выбор конкретного коцикла α влияет на вид коциклов β . Проблема заключается в том, как подобрать “хорошие” α с тем, чтобы получилось как можно меньше членов β и, что еще важнее, скобки Масси в порядках выше, чем порядок члена β , были бы равны 0. Если этого не удастся достичь, будем к этому стремиться в следующем порядке и т.д.

2.2. Лемма Грозмана.

ЛЕММА (Грозман). Для любого $c = a \otimes \omega$, где $a \in \mathfrak{g}$, а $\omega \in \wedge^r(\mathfrak{g})$, пусть dc – кограница коцепи c в комплексе с коэффициентами в присоединенном модуле, причем $d\omega$ означает кограницу в комплексе с тривиальными коэффициентами, а da есть кограница элемента $a \in \mathfrak{g}$, рассматриваемого как 0-коцепь в комплексе с коэффициентами в присоединенном модуле. Если $c = a \otimes \omega$, то

$$dc = a \otimes d\omega + da \wedge \omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $x_1, \dots, x_{r+1} \in \mathfrak{g}$ имеем

$$\begin{aligned} dc(x_1, \dots, x_{r+1}) &= \sum_{1 \leq i < j \leq r+1} (-1)^{i+j-1} a \otimes \omega([x_i, x_j], x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_{r+1}) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq r+1} (-1)^i [x_i, a] \otimes \omega(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{r+1}) \\ &= (a \otimes d\omega)(x_1, \dots, x_{r+1}) + (da \wedge \omega)(x_1, \dots, x_{r+1}). \end{aligned}$$

2.3. Случай $p = 2$. По определению векторное пространство $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли, если задано билинейное отображение $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, удовлетворяющее тождеству Якоби, и антисимметричное, что при $p = 2$ выглядит так: $[x, x] = 0$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Внешнее произведение элементов векторного пространства определяется без нормализующего множителя:

$$a \wedge b = a \otimes b + b \otimes a.$$

Грозман сообщил нам следующее определение когомологии алгебр Ли в характеристике 2, реализованное в его пакете **SuperLie**.

Для 1-коцепей с тривиальными коэффициентами кодифференциал определен как операция, двойственная к скобке Ли:

$$d: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*.$$

Для r -коцепей с тривиальными коэффициентами дифференциал d определен по правилу Лейбница. Для коцепей с коэффициентами в нетривиальном модуле M мы полагаем

$$d(m) := \sum_{1 \leq i \leq \dim(\mathfrak{g})} [g_i, m] \otimes g_i^*, \quad d(m \otimes \omega) := d(m) \wedge \omega + m \otimes d(\omega)$$

для любых $m \in M$, любых r -коцепей ω , где $r > 0$, и любого базиса, состоящего их элементов g_i алгебры Ли $\mathfrak{g}$, см. лемму Грозмана.

Скобка Масси определена следующими формулами:

$$[a, b](x, y, z) := a(b(x, y), z) + b(a(x, y), z) + \text{cyclic}(x, y, z),$$

если a и b непропорциональны, а

$$[a, a](x, y, z) := a(a(x, y), z) + \text{cyclic}(x, y, z).$$

3. Основные результаты: $p = 3$

3.1. Деформации алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)$: известные результаты. Матрица Картана алгебры Ли $L(\varepsilon)$ задает *однопараметрическое* семейство деформаций алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)$. Ниже мы явно опишем продеформированную скобку в терминах операций, введенных в разделе 2. (В теореме 3 мы покажем, что имеются и другие интересные *однопараметрические* семейства, ранее ускользнувшие от внимания исследователей.)

Обозначим через x_i (соответственно y_i) корневые базисные элементы (базис Шевалле) алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)$, соответствующие положительным (соответственно отрицательным) корням, и пусть h_j – элементы максимальной диагонализующей подалгебры. Обозначим через X_i, Y_i и H_j базис Шевалле алгебры Ли $L(\varepsilon)$. В разделе 3 индекс каждого коцикла s равен степени коцикла s индуцированной $\mathbb{Z}$ -градуировкой алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)$, при которой $\deg x_1 = \deg x_2 = 1$ (здесь $x_3 = [x_1, x_2]$, $x_4 = [x_2, x_3]$ и аналогично для y).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Алгебра Ли $L(\varepsilon)$ получается из $\mathfrak{o}(5)$ деформацией, порожденной нижеуказанным 2-коциклом c_0 , а скобка выглядит так:*

$$[\cdot, \cdot]_{-(1+\varepsilon)} = [\cdot, \cdot] - (1 + \varepsilon)c_0 + (1 + \varepsilon)^2\alpha_{0,0},$$

где

$$\begin{aligned} c_0 = & h_1 \otimes (x_2^* \wedge y_2^*) + 2h_1 \otimes (x_3^* \wedge y_3^*) + 2h_1 \otimes (x_4^* \wedge y_4^*) + h_2 \otimes (x_4^* \wedge y_4^*) \\ & + x_1 \otimes (h_2^* \wedge x_1^*) + 2x_2 \otimes (h_2^* \wedge x_2^*) + x_2 \otimes (x_4^* \wedge y_3^*) + x_3 \otimes (x_4^* \wedge y_2^*) \\ & + 2x_4 \otimes (h_2^* \wedge x_4^*) + 2y_1 \otimes (h_2^* \wedge y_1^*) + y_2 \otimes (h_2^* \wedge y_2^*) + 2y_2 \otimes (x_3^* \wedge y_4^*) \\ & + 2y_3 \otimes (x_2^* \wedge y_4^*) + y_4 \otimes (h_2^* \wedge y_4^*); \\ \alpha_{0,0} = & h_1 \otimes (x_4^* \wedge y_4^*). \end{aligned} \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изоморфизм между этими алгебрами Ли задан формулами (здесь $i = 1, 2$)

$$X_i \longleftrightarrow x_i, \quad Y_i \longleftrightarrow y_i, \quad H_1 \longleftrightarrow h_1, \quad H_2 \longleftrightarrow h_2 - (1 + \varepsilon)h_1.$$

Трех-параметрическое семейство $L(\varepsilon, \delta, \rho)$ деформаций алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)$ описано Кострикиным [9] следующим образом. Рассмотрим контактную алгебру Ли $\mathfrak{k}(3; \underline{N})$, где $\underline{N} = (N_1, N_2, N_3) \in (\mathbb{Z}_+)^3$, производящие функции элементов которой образуют алгебру разделенных степеней, порожденную переменными x, y и t . Как векторное пространство, $\mathfrak{k}(3; \underline{N})$ есть подпространство в $\mathbb{K}[x, y, t]$, натянутое на мономы $x^i y^j t^k$, где $0 \leq i < p^{N_1}$, $0 \leq j < p^{N_2}$ и $0 \leq k < p^{N_3}$, причем

$$w^i \cdot w^j = \binom{i+j}{i} w^{i+j}, \quad \partial_w w^i = w^{i-1}, \quad \text{где } w = x, y, t.$$

Контактная скобка многочленов f и g определена формулой

$$[f, g] = \Delta f \cdot \partial_t g - \Delta g \cdot \partial_t f + \partial_x f \cdot \partial_y g - \partial_x g \cdot \partial_y f,$$

где $\Delta f = 2f - x\partial_x f - y\partial_y f$.

Стандартная $\mathbb{Z}$ -градуировка $\deg_{\text{Lie}}$ алгебры Ли $\mathfrak{k}(3; \underline{N})$ задана градуировкой

$$\deg(x) = \deg(y) = 1 \quad \text{и} \quad \deg(t) = 2$$

в алгебре разделенных степеней, и мы полагаем

$$\deg_{\text{Lie}}(f) = \deg f - 2.$$

Пусть α и β – простые корни в алгебре Ли $\mathfrak{o}(5)$, а E_z – корневой вектор, отвечающий корню z . Теперь базис в $L(\varepsilon, \delta, \rho)$ можно выбрать в терминах производящих функций алгебры Ли $\mathfrak{k}(3; (1, 1, 1))$, как показано в таблице (произведения в таблице отвечают частному случаю $L(\varepsilon)$):

Таблица

deg	Образующая и ее вес (в индексе) = производящая функция
-2	$E_{-2\alpha-\beta} = 1$
-1	$E_{-\alpha} = x, \quad E_{-\alpha-\beta} = y$
0	$H_\alpha = 2\varepsilon t + xy, \quad H_\beta = -xy, \quad E_\beta = x^2, \quad E_{-\beta} = -y^2$
1	$E_\alpha = -(1 + \varepsilon)xy^2 + \varepsilon yt, \quad E_{\alpha+\beta} = (1 + \varepsilon)x^2y + \varepsilon xt$
2	$E_{2\alpha+\beta} = \varepsilon(1 + \varepsilon)x^2y^2 + \varepsilon^2 t^2$

Ненулевые значения скобки, включающие параметры δ и ρ , следующие⁵:

$$\begin{aligned} [E_{-2\alpha-\beta}, E_\beta] &= \delta E_\alpha, & [E_{-2\alpha-\beta}, E_{-\alpha}] &= \delta E_{-\beta}, & [E_{-\alpha}, E_\beta] &= -\frac{\delta}{\varepsilon} E_{2\alpha+\beta}, \\ [E_{-2\alpha-\beta}, E_{-\alpha-\beta}] &= \rho E_\beta, & [E_{-\alpha-\beta}, E_{-\beta}] &= -\frac{\rho}{\varepsilon} E_{2\alpha+\beta}, & [E_{-2\alpha-\beta}, E_{-\beta}] &= -\rho E_{\alpha+\beta}. \end{aligned} \quad (6)$$

3.2. Представление алгебры Ли $L(\varepsilon, \delta, \rho)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Алгебра Ли $L(\varepsilon, \delta, \rho)$ может быть получена как результат деформации алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)$ со скобкой (параметры t_1, t_3, t_4 соответствуют общей 5-параметрическому случаю, рассмотренному ниже)

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]_t &= [\cdot, \cdot] + t_1 c_0 + t_3 c_3 + t_4 c_6 + t_1^2 \alpha_{0,0} + t_1 t_3 \alpha_{0,3} + t_1 t_4 \alpha_{0,6} + t_1^2 t_3 \beta_{0,3} \\ &\quad + t_1^2 t_4 \beta_{0,6} + t_1^3 t_4 \gamma_{0,6} + t_1^4 t_4 \theta_{0,6}, \end{aligned}$$

где c_0 и $\alpha_{0,0}$ заданы формулами (5) и где

$$\begin{aligned} c_3 &= x_2 \otimes (x_1^* \wedge y_4^*) + x_4 \otimes (x_1^* \wedge y_2^*) + y_1 \otimes (y_2^* \wedge y_4^*), \\ c_6 &= x_1 \otimes (y_3^* \wedge y_4^*) + 2x_3 \otimes (y_1^* \wedge y_4^*) + x_4 \otimes (y_1^* \wedge y_3^*), \\ \alpha_{0,6} &= -x_4 \otimes (y_1^* \wedge y_3^*), & \alpha_{0,3} &= -x_4 \otimes (x_1^* \wedge y_2^*), \\ \beta_{0,3} &= -x_2 \otimes (x_1^* \wedge y_4^*) - y_1 \otimes (y_2^* \wedge y_4^*), & \beta_{0,6} &= x_4 \otimes (y_1^* \wedge y_3^*), \\ \gamma_{0,6} &= -x_4 \otimes (y_1^* \wedge y_3^*), & \theta_{0,6} &= x_3 \otimes (y_1^* \wedge y_4^*) - x_1 \otimes (y_3^* \wedge y_4^*) \end{aligned}$$

при

$$\varepsilon = 2 - t_1, \quad \delta = \varepsilon(\varepsilon + 2)t_3, \quad \rho = \varepsilon(\varepsilon + 2)(2 + 2\varepsilon + \varepsilon^2)t_4.$$

⁵В [1] написано $H_\alpha := t + xy$, что не совпадает с $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы выпишем только те структурные константы, которые нужны для доказательства:

$$\begin{aligned} [x_1, x_3] &= t_5 y_4, & [y_4, y_3] &= \varepsilon t_4 x_1, & [x_1, y_2] &= t_3 x_4, & [x_2, y_1] &= t_2 y_4, \\ [x_3, y_3] &= (1 - t_1 + 2\varepsilon t_1 t_4 t_5 + \varepsilon t_1 t_2 t_3) h_1 + (2 + 2\varepsilon t_2 t_3 + \varepsilon t_4 t_5) h_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку $L(\varepsilon, \rho, \eta)$ была построена в терминах $\mathfrak{o}(5)$, то, деформируя скобку, естественно определить изоморфизм между $L(\varepsilon, \rho, \eta)$ и $L(\varepsilon, t)$ при некоторых значениях параметров $t_1, \dots, t_5$ следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &\longleftrightarrow E_\beta, & y_1 &\longleftrightarrow E_{-\beta}, & h_1 &\longleftrightarrow H_\beta, & x_2 &\longleftrightarrow E_\alpha, & y_2 &\longleftrightarrow E_{-\alpha}, \\ h_2 &\longleftrightarrow H_\alpha, & x_3 &\longleftrightarrow E_{\alpha+\beta}, & y_3 &\longleftrightarrow E_{-\alpha-\beta}, & x_4 &\longleftrightarrow E_{2\alpha+\beta}, & y_4 &\longleftrightarrow E_{-2\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Алгебра Ли $\mathfrak{o}(5)$ допускает 5-параметрическое семейство деформированных алгебр, которые мы обозначим $\mathfrak{o}(5, t)$, где $t = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$. Продеформированная скобка имеет вид

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]_{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5} &= [\cdot, \cdot] + t_1 \tilde{c}_0 + t_2 c_{-3} + t_3 c_3 + t_4 c_6 + t_5 c_{-6} + t_1 t_4 \alpha_{0,6} + t_1 t_2 \alpha_{0,-3} \\ &\quad + t_1 t_5 \alpha_{0,-6} + t_1 t_3 \alpha_{0,3} + t_4 t_5 \alpha_{6,-6} + t_2 t_3 \alpha_{-3,3} \\ &\quad + t_1 t_4 t_5 \beta_{-6,0,6} + t_1 t_2 t_3 \beta_{3,0,-3}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} c_6 &= x_1 \otimes (y_3^* \wedge y_4^*) + 2x_3 \otimes (y_1^* \wedge y_4^*) + x_4 \otimes (y_1^* \wedge y_3^*), \\ c_3 &= x_2 \otimes (x_1^* \wedge y_4^*) + x_4 \otimes (x_1^* \wedge y_2^*) + y_1 \otimes (y_2^* \wedge y_4^*), \\ \tilde{c}_0 &= 2h_1 \otimes (x_2^* \wedge y_2^*) + 2h_1 \otimes (x_3^* \wedge y_3^*) + 2x_1 \otimes (x_3^* \wedge y_2^*) + y_1 \otimes (x_2^* \wedge y_3^*), \\ c_{-3} &= 2x_1 \otimes (x_2^* \wedge x_4^*) + y_2 \otimes (x_4^* \wedge y_1^*) + y_4 \otimes (x_2^* \wedge y_1^*), \\ c_{-6} &= y_1 \otimes (x_3^* \wedge x_4^*) + 2y_3 \otimes (x_1^* \wedge x_4^*) + y_4 \otimes (x_1^* \wedge x_3^*) \end{aligned} \quad (9)$$

и

$$\begin{aligned} \alpha_{0,-6} &= y_1 \otimes (x_3^* \wedge x_4^*), & \alpha_{0,6} &= x_1 \otimes (y_3^* \wedge y_4^*), \\ \alpha_{0,3} &= y_1 \otimes (y_2^* \wedge y_4^*), & \alpha_{0,-3} &= 2x_1 \otimes (x_2^* \wedge x_4^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{-3,3} &= 2h_2 \otimes (x_2^* \wedge y_2^*) + h_2 \otimes (x_3^* \wedge y_3^*) - h_2 \otimes (x_4^* \wedge y_4^*) + 2x_1 \otimes (x_3^* \wedge y_2^*) \\ &\quad + x_2 \otimes (h_1^* \wedge x_2^*) + 2x_2 \otimes (x_3^* \wedge y_1^*) + x_3 \otimes (h_1^* \wedge x_3^*) + 2x_4 \otimes (h_1^* \wedge x_4^*) \\ &\quad + x_4 \otimes (x_2^* \wedge x_3^*) + 2y_2 \otimes (h_1^* \wedge y_2^*) + 2y_2 \otimes (x_3^* \wedge y_4^*) + 2y_3 \otimes (h_1^* \wedge y_3^*) \\ &\quad + 2y_3 \otimes (x_2^* \wedge y_4^*) - 2y_3 \otimes (y_1^* \wedge y_2^*) - 2y_4 \otimes (h_1^* \wedge y_4^*), \\ \alpha_{-6,6} &= h_2 \otimes (x_2^* \wedge y_2^*) + 2h_2 \otimes (x_3^* \wedge y_3^*) + h_2 \otimes (x_4^* \wedge y_4^*) + 2x_1 \otimes (x_3^* \wedge y_2^*) \\ &\quad + 2x_2 \otimes (h_1^* \wedge x_2^*) + 2x_2 \otimes (x_3^* \wedge y_1^*) + 2x_3 \otimes (h_1^* \wedge x_3^*) + x_4 \otimes (h_1^* \wedge x_4^*) \\ &\quad + x_4 \otimes (x_2^* \wedge x_3^*) + y_2 \otimes (h_1^* \wedge y_2^*) + 2y_2 \otimes (x_3^* \wedge y_4^*) + y_3 \otimes (h_1^* \wedge y_3^*) \\ &\quad + 2y_3 \otimes (x_2^* \wedge y_4^*) + y_3 \otimes (y_1^* \wedge y_2^*) + 2y_4 \otimes (h_1^* \wedge y_4^*), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \beta_{-6,0,6} &= 2h_1 \otimes (x_2^* \wedge y_2^*) + h_1 \otimes (x_3^* \wedge y_3^*) + 2h_1 \otimes (x_4^* \wedge y_4^*) + 2x_1 \otimes (x_3^* \wedge y_2^*) \\ &\quad + 2x_2 \otimes (h_2^* \wedge x_2^*) + 2x_3 \otimes (h_2^* \wedge x_3^*) + x_4 \otimes (h_2^* \wedge x_4^*) + y_2 \otimes (h_2^* \wedge y_2^*) \\ &\quad + y_3 \otimes (h_2^* \wedge y_3^*) + 2y_4 \otimes (h_2^* \wedge y_4^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{-3,0,3} = & h_1 \otimes (x_2^* \wedge y_2^*) + 2h_1 \otimes (x_3^* \wedge y_3^*) + h_1 \otimes (x_4^* \wedge y_4^*) + 2x_1 \otimes (x_3^* \wedge y_2^*) \\
& + x_2 \otimes (h_2^* \wedge x_2^*) + x_3 \otimes (h_2^* \wedge x_3^*) + 2x_4 \otimes (h_2^* \wedge x_4^*) + 2x_4 \otimes (x_2^* \wedge x_3^*) \\
& + 2y_2 \otimes (h_2^* \wedge y_2^*) + y_2 \otimes (x_3^* \wedge y_4^*) + 2y_3 \otimes (h_2^* \wedge y_3^*) \\
& + y_3 \otimes (x_2^* \wedge y_4^*) + y_4 \otimes (h_2^* \wedge y_4^*).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в непосредственной проверке с помощью основанного на Mathematica грозмановского пакета программ SuperLie [21] Мы вычисляем скобки Масси в каждой степени и проверяем, не является ли эта скобка кограницей. Например, мы легко видим, что

$$\begin{aligned}
[[c_{-3}, c_{-6}]] &= 0, \quad [[c_3, c_3]] = 0, \\
[[\tilde{c}_0, c_6]] &= 2h_1 \otimes (y_1^* \wedge y_3^* \wedge y_4^*) + 2x_1 \otimes (y_1^* \wedge y_2^* \wedge y_4^*) + 2x_3 \otimes (x_2^* \wedge y_3^* \wedge y_4^*).
\end{aligned}$$

Кроме того, можно показать, что $[[\tilde{c}_0, c_6]] = -d\alpha_{0,6}$. Именно здесь мы используем формулу из леммы Грозмана, чтобы вычислить $d\alpha_{0,6}$. Получаем

$$\begin{aligned}
d\alpha_{0,6} &= d(2\varepsilon x_1 \otimes y_3^* \wedge y_4^*) = 2\varepsilon dx_1 \otimes y_3^* \wedge y_4^* + 2\varepsilon x_1 \otimes dy_3^* \wedge y_4^* + \varepsilon x_1 \otimes y_3^* \wedge dy_4^* \\
&= 2\varepsilon x_3 \otimes x_2^* \wedge y_3^* \wedge y_4^* + 2\varepsilon h_1 \otimes y_1^* \wedge y_3^* \wedge y_4^* + 2\varepsilon x_1 \otimes h_1^* \wedge y_3^* \wedge y_4^* \\
&\quad + \varepsilon x_1 \otimes h_2^* \wedge y_3^* \wedge y_4^* + 2\varepsilon x_1 \otimes y_1^* \wedge y_2^* \wedge y_4^* + \varepsilon(1 + \varepsilon)x_1 \otimes y_3^* \wedge h_2^* \wedge y_4^* \\
&\quad + 2\varepsilon x_1 \otimes y_3^* \wedge h_1^* \wedge y_4^* + \varepsilon^2 x_1 \otimes y_3^* \wedge y_4^* \wedge h_2^* \\
&= 2\varepsilon x_3 \otimes x_2^* \wedge y_3^* \wedge y_4^* + 2\varepsilon h_1 \otimes y_1^* \wedge y_3^* \wedge y_4^* + 2\varepsilon x_1 \otimes y_1^* \wedge y_2^* \wedge y_4^*.
\end{aligned}$$

В этих вычислениях мы использовали явный вид цепи dx_1 (кограницы 0-цепи с коэффициентами в присоединенном модуле), который мы извлекли из таблицы умножения:

$$dx_1 = x_3 \otimes x_2^* + h_1 \otimes y_1^* + y_2 \otimes y_3^* + x_1 \otimes h_1^* + 2x_1 \otimes h_2^*,$$

и явный вид цепей dy_3^* и dy_4^* (кограниц 1-коцепей с коэффициентами в основном поле):

$$\begin{aligned}
dy_3^* &= y_1^* \wedge y_2^* + (2 + 2\varepsilon)y_3^* \wedge h_2^* + 2\varepsilon y_4^* \wedge x_2^* + y_3^* \wedge h_1^*, \\
dy_4^* &= \varepsilon y_4^* \wedge h_2^* + 2y_3^* \wedge y_2^*.
\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В теореме 3 выражение для коцикла степени 0 подправлено на кограницу по сравнению с коциклом c_0 , который задает $L(\varepsilon)$, см. (5):

$$\tilde{c}_0 + c_0 = d(2h_2 \otimes h_2^* - x_2 \otimes x_2^* - x_3 \otimes x_3^* + x_4 \otimes x_4^*).$$

Мы хотели бы, чтобы глобальная деформация зависела от возможно меньшей степени параметров. Когда мы рассмотрели коцикл c_0 как в предложении 2, вычисления поправок к общей 5-параметрической линейной комбинации коциклов стали тяжелыми, и даже компьютер не смог увидеть, когда вычисления закончатся.

Мы выбрали коциклы в теореме так, чтобы их квадраты Масси были равны 0. Как пояснено выше, такие коциклы α можно выбрать не единственным образом. Мы надеялись, что сможем их выбрать так, чтобы все коциклы β (отвечающие скобкам Масси степени 3) обратились в 0. К сожалению, это невозможно. Тем не менее, можно выбрать коциклы α так, что занулятся большое число коциклов β . Когда

этот выбор сделан, можно заняться коциклами β . Довольно длинные вычисления с оставшимися свободными параметрами в степени 4 показывают, что коцепи α и β можно выбрать так, что все их скобки Масси в степени 4 равны 0. Их-то мы и выбрали.

В качестве побочного продукта мы получили выражения (9) – коциклов, каждый из которых задает глобальную деформацию, линейную по параметру – новый результат, представляющий независимый интерес. Алгебра Ли, отвечающая параметру $t = (\varepsilon, 0, 0, 0, 0)$, со скобкой, заданной формулой (8), имеет ту же подалгебру Картана и корневое разложение, что и $\mathfrak{o}(5)$, и обладает, как нетрудно сосчитать, матрицей Картана, эквивалентной матрице

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 + \varepsilon & 2 + \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (10)$$

4. Основные результаты: $p = 2$

4.1. Деформации алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)^{(1)}$. Если $p = 2$, то алгебра Ли $\mathfrak{o}(5)$ не проста и ее размерность равна 15. Простой и имеющей матрицу Картана и размерность 10 является алгебра Ли $\mathfrak{o}(5)^{(1)}$ – производная алгебры Ли $\mathfrak{o}(5)$. Она реализована в терминах матрицы Картана и образующих следующим образом, см. [7]:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, x_3 = [x_1, x_2], \quad x_4 = [x_1, x_3],$$

аналогично для y . Из [15] мы знаем, что $H^2(\mathfrak{o}(5)^{(1)}, \mathfrak{o}(5)^{(1)})$ натянута на следующие 4 коцикла:

$$\begin{aligned} c_4 &= h_1 \otimes (y_2^* \wedge y_4^*) + x_1 \otimes (y_2^* \wedge y_3^*) + x_2 \otimes (h_2^* \wedge y_4^*) \\ &\quad + x_3 \otimes (h_2^* \wedge y_3^*) + x_4 \otimes (h_2^* \wedge y_2^*) + y_1 \otimes (y_3^* \wedge y_4^*), \\ c_{-2} &= h_1 \otimes (x_4^* \wedge y_2^*) + x_2 \otimes (h_1^* \wedge x_4^*) + x_2 \otimes (h_2^* \wedge x_4^*) \\ &\quad + x_3 \otimes (x_1^* \wedge x_4^*) + y_1 \otimes (h_1^* \wedge x_1^*) + y_1 \otimes (h_2^* \wedge x_1^*) \\ &\quad + y_1 \otimes (x_3^* \wedge y_2^*) + y_4 \otimes (h_1^* \wedge y_2^*) + y_4 \otimes (h_2^* \wedge y_2^*) + y_4 \otimes (x_1^* \wedge y_3^*), \\ c_2 &= h_1 \otimes (x_2^* \wedge y_4^*) + x_1 \otimes (h_1^* \wedge y_1^*) + x_1 \otimes (h_2^* \wedge y_1^*) \\ &\quad + x_1 \otimes (x_3^* \wedge y_4^*) + x_3 \otimes (x_2^* \wedge y_1^*) + x_4 \otimes (h_1^* \wedge x_2^*) \\ &\quad + x_4 \otimes (h_2^* \wedge x_2^*) + y_2 \otimes (h_1^* \wedge y_4^*) + y_2 \otimes (h_2^* \wedge y_4^*) + y_2 \otimes (y_1^* \wedge y_3^*) \end{aligned}$$

и 2-коцикл c_{-4} , который получается из c_4 заменой x на y , а y на x . Эти коциклы c_i выбраны так, что $[[c_i, c_i]] = 0$ (что, к счастью, возможно) и чтобы их запись была как можно короче (из эстетических соображений).

4.2. Деформации алгебры Ли.

ТЕОРЕМА 4. Алгебра Ли $\mathfrak{o}(5)^{(1)}$ допускает 4-параметрическое семейство деформаций, обозначенное ниже $\mathfrak{o}(5; t)^{(1)}$, где $t = (t_1, t_2, t_3, t_4)$. Продеформированная скобка имеет вид

$$[\cdot, \cdot]_{t_1, t_2, t_3, t_4} = [\cdot, \cdot] + t_1 c_{-4} + t_2 c_4 + t_3 c_{-2} + t_4 c_2 + t_1 t_3 \alpha_{-4, -2} + t_1 t_4 \alpha_{-4, 2} + t_2 t_3 \alpha_{4, -2}$$

$$+ t_2 t_4 \alpha_{4,2} + t_3 t_4 \alpha_{-2,2} + t_2 t_3 t_4 \beta_{4,-2,2} + t_3^2 t_4 \beta_{-2,-2,2} + t_3 t_4^2 \beta_{2,-2,2} \\ + t_3^2 t_4^2 \alpha_{-2,2} + t_3^3 t_4^2 \beta_{-2,-2,2} + t_3^2 t_4^3 \beta_{2,-2,2} + t_3^3 t_4^3 \varrho,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{-4,-2} &= y_4 \otimes (h_2^* \wedge x_4^*), & \alpha_{-4,2} &= y_2 \otimes (h_2^* \wedge x_2^*), \\ \alpha_{4,-2} &= x_2 \otimes (h_2^* \wedge y_2^*) + y_1 \otimes (y_2^* \wedge y_3^*), & \alpha_{4,2} &= x_1 \otimes (y_3^* \wedge y_4^*) + x_4 \otimes (h_2^* \wedge y_4^*), \\ \alpha_{-2,2} &= h_1 \otimes (x_2^* \wedge y_2^*) + h_1 \otimes (x_4 \wedge y_4^*) + x_1 \otimes (x_3^* \wedge y_2^*) + y_1 \otimes (x_3^* \wedge y_4^*), \\ \beta_{2,-2,2} &= h_1 \otimes (x_2^* \wedge y_4^*) + x_1 \otimes (x_3^* \wedge y_4^*), \\ \beta_{-2,-2,2} &= h_1 \otimes (x_4^* \wedge y_2^*) + y_1 \otimes (x_3^* \wedge y_2^*), & \beta_{4,-2,2} &= x_3 \otimes (h_2^* \wedge y_3^*), \\ \varrho &= x_1 \otimes (x_4^* \wedge y_3^*) + x_2 \otimes (h_2^* \wedge x_2^*) + x_3 \otimes (h_2^* \wedge x_3^*) + x_4 \otimes (h_2^* \wedge x_4^*) + y_1 \otimes (x_2^* \wedge y_3^*) \\ &\quad + y_2 \otimes (h_2^* \wedge y_2^*) + y_3 \otimes (h_2^* \wedge y_3^*) + y_4 \otimes (h_2^* \wedge y_4^*). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы следуем доказательству теоремы 3 с соответствующими изменениями.

5. Замечания

5.1. Об алгебре Ли N из [1]. Кострикин и Кузнецов ошиблись, и все упоминания алгебры Ли N в [1] следует проигнорировать.

5.2. Пример: неравенство $H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}) \neq 0$ не эквивалентно деформируемости алгебры Ли $\mathfrak{g}$. При $p > 0$ неизоморфных результатов деформации может быть меньше, чем $\dim H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$, даже если все коциклы интегрируемы. Эта возможность отмечена в [1], где элементы алгебраической геометрии применены к алгебраическому многообразию параметров. Мы проиллюстрируем это утверждение слишком короткой заметки [1] на простом примере.

Пусть $p > 0$ и из любого элемента поля $\mathbb{K}$ можно извлечь корень степени p (например, любое конечное поле). Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ с базисом $(e_0, \dots, e_{p-1}, f)$ и следующими коммутационными соотношениями (индекс $i+1$ надо понимать по модулю p):

$$[e_i, e_j] = 0, \quad [f, e_i] = e_{i+1} \quad \text{при любых } i, j = 0, \dots, p-1.$$

Рассмотрим следующую деформацию алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с параметром a :

$$\begin{aligned} [e_i, e_j]_a &= 0 & \text{при любых } i, j = 0, \dots, p-1; \\ [f, e_i]_a &= e_{i+1} & \text{при любых } i = 0, \dots, p-2; \\ [f, e_{p-1}]_a &= (1+a)e_0. \end{aligned} \tag{11}$$

ЛЕММА 5. Деформация (11) исходной скобки тривиальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейные операторы A_a , действующие на базисе пространства $\mathfrak{g}$ следующим образом:

$$A_a f = \sqrt[p]{1+a} f, \quad A_a e_i = (\sqrt[p]{1+a})^i e_i \quad \text{при любых } i = 0, \dots, p-1. \tag{12}$$

Тогда

$$[A_a x, A_a y] = A_a [x, y]_a \quad \text{при любых } x, y \in \mathfrak{g}.$$

2-коцикл, отвечающий инфинитезимальной версии деформации (11), пропорционален такому:

$$z = e_0 \otimes \psi \wedge \phi_{p-1},$$

где $(\phi_0, \dots, \phi_{p-1}, \psi)$ – базис пространства $\mathfrak{g}^*$, двойственный базису $(e_0, \dots, e_{p-1}, f)$.

ЛЕММА 6. *Элемент z представляет нетривиальный класс из $H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. У алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -градуировка такая, что

$$\deg f = 1, \quad \deg e_i = i \quad \text{при} \quad i = 0, \dots, p-1. \quad (13)$$

Степень коцепи z в градуировке пространства $C^*(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$, индуцированной градуировкой (13), равна 0. Подпространство в $C^1(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$ элементов степени 0 натянуто на элементы

$$e_i \otimes \phi_i \quad \text{при} \quad i = 0, \dots, p-1, \quad e_1 \otimes \psi, \quad f \otimes \phi_1, \quad f \otimes \psi.$$

Поэтому $B^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})_0$ – линейная оболочка элементов (здесь $i \pm 1$ или $j \pm 1$ в индексе надо понимать по модулю p)

$$\begin{aligned} d(e_i \otimes \phi_i) &= e_{i+1} \otimes \phi^i \wedge \psi - e_i \otimes \phi_{i-1} \otimes \psi \quad \text{при} \quad i = 0, \dots, p-1, \\ d(f \otimes \phi_1) &= \sum_{i \neq 1} e_{i+1} \otimes \phi_i \wedge \phi_1 - f \otimes \phi_0 \wedge \psi, \\ d(f \otimes \psi) &= \sum_{i=0}^{p-1} e_{i+1} \otimes \phi_i \wedge \psi, \quad d(e_1 \otimes \psi) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим линейное отображение $L: C^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{K}$, определенное на базисных 2-коцепях (здесь $i, j, k = 0, \dots, p-1$) следующим образом:

$$\begin{aligned} L(e_i \otimes \phi_j \wedge \phi_k) &= 0, & L(e_i \otimes \phi_j \wedge \psi) &= \delta_{i,j+1}, \\ L(f \otimes \phi_i \wedge \phi_j) &= 0, & L(f \otimes \phi_i \wedge \psi) &= 0. \end{aligned}$$

Значение оператора L на всех элементах (14) равно 0, а $L(z) = -1$. Поэтому z не может быть линейной комбинацией элементов (14).

Если деформация (11) тривиальна, то отчего бы не получить z в виде дифференциала 1-коцепи C такой, что $C(x) = \partial A_a x / \partial a$ (что бы такая производная ни значила при $p > 0$) при любом $x \in \mathfrak{g}$? А оттого, что при $p > 0$ функция $\sqrt[p]{1+a}$ не дифференцируемая (что бы ни значило здесь слово “дифференцируемая”).

Ситуация, таким образом, противоположна той, что описана в [3].

6. Приложение: Что такое $\mathfrak{g}(A)$

Пусть $A = (A_{ij})$ есть $(n \times n)$ -матрица с элементами из $\mathbb{K}$ и $\text{rk } A = n - l$. Дополним A до $((n+l) \times n)$ -матрицы

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

ранга n . (Таким образом, B есть матрица размера $l \times n$.)

Пусть элементы

$$e_i^\pm, h_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{и} \quad d_k, \quad k = 1, \dots, l,$$

порождают алгебру Ли, обозначаемую $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$, свободную, за исключением соотношений

$$\begin{aligned} [e_i^+, e_j^-] &= \delta_{ij} h_i, & [h_i, e_j^\pm] &= \pm A_{ij} e_j^\pm, & [d_k, e_j^\pm] &= \pm B_{kj} e_j^\pm, \\ [h_i, h_j] &= [h_i, d_k] = [d_k, d_m] = 0 & \text{при любых } i, j, k, m. \end{aligned} \quad (15)$$

Положив

$$\begin{aligned} \deg e_i^\pm &= (0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0), \\ \deg h_i &= \deg d_k = (0, \dots, 0) \quad \text{при любых } i, k, \end{aligned} \quad (16)$$

мы наделяем алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ $\mathbb{Z}^n$ -градуировкой.

Пусть $\mathfrak{h}$ – линейная оболочка элементов h_i и d_k . Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}(A)^\pm$ – подалгебры Ли в $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$, порожденные элементами $e_1^\pm, \dots, e_n^\pm$. Тогда

$$\tilde{\mathfrak{g}}(A) = \tilde{\mathfrak{g}}(A)^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}(A)^+,$$

где $\mathfrak{h}$ – это однородная компонента степени $(0, \dots, 0)$.

Подалгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}(A)^\pm$ однородны в этой $\mathbb{Z}^n$ -градуировке, и существует

$$\text{максимальный однородный идеал } \mathfrak{r} \text{ такой, что } \mathfrak{r} \cap \mathfrak{h} = 0. \quad (17)$$

Идеал $\mathfrak{r}$ есть сумма однородных идеалов, однородные компоненты степени $(0, \dots, 0)$ которых тривиальны.

Если $\text{rk } A = n - l$, то существует матрица $T = (T_{ij})$ размера $l \times n$ и ранга l такая, что

$$TA = 0. \quad (18)$$

Положим

$$c_i = \sum_{j=1}^n T_{ij} h_j, \quad \text{где } i = 1, \dots, l. \quad (19)$$

Из свойств матрицы T мы выводим теперь, что

- а) элементы c_i линейно независимы; пространство, натянутое на них, обозначим $\mathfrak{c}$;
- б) элементы c_i центральны, поскольку

$$[c_i, e_j^\pm] = \pm \left(\sum_{k=1}^n T_{ik} A_{kj} \right) e_j^\pm = \pm (TA)_{ij} e_j^\pm \stackrel{(18)}{=} 0. \quad (20)$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}(A) := \tilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r}$ называется *алгеброй Ли с матрицей Картана A* . Заметим, что это определение эквивалентно данному в [22] определению *контрагреддиентной* алгебры Ли, хотя записано слегка иначе. Условие (17), будучи модифицировано в

$$\text{максимальный однородный идеал } \mathfrak{s} \text{ такой, что } \mathfrak{s} \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{c}, \quad (21)$$

приводит к тому, что в [22] названо *фактором контрагреддиентной алгебры Ли по центру*, см. [23].

Допуская вольность речи, мы обозначаем теми же символами $e_i^\pm$, h_i , d_k и с их образы в $\mathfrak{g}(A)$ и $\tilde{\mathfrak{g}}(A)^{(1)}$.

Очевидно, что алгебра Ли $\mathfrak{g}(A)$ наследует $\mathbb{Z}^n$ -градуировку алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$. Ненулевые элементы $\alpha \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ такие, что однородные компоненты $\mathfrak{g}(A)_\alpha$ отличны от 0, называются *корнями*.

Дополнительные к (15) соотношения, превращающие $\tilde{\mathfrak{g}}(A)^\pm$ в $\mathfrak{g}(A)^\pm$, имеют вид $R_i = 0$, чьи левые части неявно описываются как

$$\text{те } R_i, \text{ что порождают максимальный идеал } \mathfrak{t}. \quad (22)$$

Явное описание этих дополнительных соотношений и другие подробности см. в [8].

Авторы благодарны Д. А. Лейтесу за постановку задачи, П. Я. Грозману за его замечательный пакет **SuperLie** и им обоим за помощь. Авторы также благодарны М. И. Кузнецову за дружеское обсуждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Кострикин, М. И. Кузнецов, “Деформации классических алгебр Ли в характеристике три”, *Докл. РАН*, **343:3** (1995), 299–301.
- [2] А. Н. Рудаков, “Деформации простых алгебр Ли”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35:5** (1971), 1113–1119.
- [3] A. Fialowski, D. Fuchs, “Singular deformations of Lie algebras. Example: deformations of the Lie algebr L_1 ”, *Topics in Singularity Theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **180**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 77–92; arXiv:math.QA/9706027.
- [4] Д. Б. Фукс, *Когомологи бесконечномерных алгебр Ли*, Наука, М., 1984.
- [5] Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс, “Когомологии групп и алгебр Ли”, *Группы Ли и алгебры Ли – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **21**, ВИНТИ, М., 1988, 121–209.
- [6] Д. А. Лейтес, И. М. Щепочкина, “Как квантовать антискобку?”, *ТМФ*, **126:3** (2001), 339–369; arXiv:math-ph/0510048.
- [7] S. Bouarroudj, P. Grozman, D. Leites, “Classification of Finite Dimensional Modular Lie Superalgebras with Indecomposable Cartan Matrix”, *SIGMA*, **5** (2009), 060, 63 pp.; arXiv:math.RT/0710.5149.
- [8] S. Bouarroudj, P. Grozman, A. Lebedev, D. Leites, “Divided power (co)homology. Presentations of simple finite dimensional modular Lie superalgebras with Cartan matrix”, *Homology, Homotopy Appl.*, **12:1** (2010), 237–278; arXiv:math.RT/0911.0243.
- [9] А. И. Кострикин, “Параметрическое семейство простых алгебр Ли”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34:4** (1970), 744–756.
- [10] Б. Ю. Вейсфейлер, В. Г. Кац, “Экспоненциалы в алгебрах Ли характеристики p ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35:4** (1971), 762–788.
- [11] А. Н. Рудаков, И. Р. Шафаревич, “Неприводимые представления простой трехмерной алгебры Ли над полем конечной характеристики”, *Матем. заметки*, **2:5** (1967), 439–454.
- [12] И. М. Щепочкина, “Как реализовать алгебру Ли векторными полями”, *ТМФ*, **147:3** (2006), 450–469; arXiv:math.RT/0509472.
- [13] P. Grozman, D. Leites, “Structures of $G(2)$ type and nonintegrable distributions in characteristic p ”, *Lett. Math. Phys.*, **74:3** (2005), 229–262; arXiv:math.RT/0509400.
- [14] D. E. Frohardt, R. L. Griess jr., “Automorphisms of modular Lie algebras”, *Nova J. Algebra Geom.*, **1:4** (1992), 339–345.
- [15] S. Bouarroudj, P. Grozman, D. Leites, *Infinitesimal Deformations of Symmetric Simple Modular Lie Algebras and Lie Superalgebras*, arXiv:math.RT/0807.3054.

- [16] D. Fuchs, L. Lang, *Massey Products and Deformations*, arXiv:math.QA/9602024.
- [17] A. Fialowski, “An example of formal deformations of Lie algebras”, *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications* (Il Ciocco, 1986), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **247**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988, 375–401.
- [18] D. V. Millionshchikov, “Massey products in graded Lie algebra cohomology”, Proceedings of the Conference “Contemporary Geometry and Related Topics” (Belgrad, 2005), 2007.
- [19] A. Lebedev, D. Leites, I. Shereshevskii, “Lie superalgebra structures in $C^\bullet(\mathfrak{n}; \mathfrak{n})$ and $H^\bullet(\mathfrak{n}; \mathfrak{n})$ ”, *Lie Groups and Invariant Theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **213**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 157–172; *Lie Superalgebra Structures in Cohomology Spaces of Lie Algebras with Coefficients in the Adjoint Representation*, arXiv:math.KT/0404139.
- [20] P. Grozman, D. Leites, “Lie superalgebra structures in $H^*(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$ ”, *Czechoslovak J. Phys.*, **54**:11 (2004), 1313–1319; arXiv:math.RT/0509469.
- [21] P. Grozman, *SuperLie*, www.equaonline.com/math/SuperLie.
- [22] I. Cunha, A. Elduque, “An extended Freudenthal magic square in characteristic 3”, *J. Algebra*, **317**:2 (2007), 471–509; arXiv:math.RA/0605379.
- [23] Ю. В. Биллинг, “Модулярные аффинные алгебры Ли”, *Матем. сб.*, **181**:8 (1990), 1130–1143.

С. Буаррудж

United Arab Emirates University

E-mail: Bouarrroudj.sofiane@uaeu.ac.ae

Поступило

14.03.2010

Исправленный вариант

26.05.2010

А. В. Лебедев

Нижегородский государственный университет

им. Н. И. Лобачевского

E-mail: yorool@mail.ru

Ф. Вагеманн

Université de Nantes, France

E-mail: wagemann@math.univ-nantes.fr