Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Шкарин, Об эффективных линейно упорядоченных множествах функций сравнения, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 4, 629–637

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm878>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:58:51

УДК 517.63

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ ФУНКЦИЙ СРАВНЕНИЯ

С. А. Шкарин

С аксиоматикой ZFC теории множеств совместимы как наличие, так и отсутствие линейно упорядоченного (некоторыми естественными отношениями порядка) эффективного множества функций сравнения (=плотного класса сравнения).

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Напомним несколько определений. *Функцией сравнения* называется целая функция $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ такая, что $A_n > 0$ при всех¹ $n \in \omega$ и последовательность $\alpha_n = A_{n+1}/A_n$ убывает (возможно, нестрого) и стремится к нулю. Всюду ниже для целой функции A (соответственно B или C , быть может, с верхними индексами) символами A_n (B_n , C_n) будем обозначать коэффициенты Тейлора функции A (B , C), а символами α_n (β_n , γ_n) – величины A_{n+1}/A_n (B_{n+1}/B_n , C_{n+1}/C_n). Мы будем придерживаться следующих обозначений: $\mathcal{H}$ – множество всех целых функций, $\mathcal{P} \subset \mathcal{H}$ – множество всех полиномов, $\mathcal{H}^\circ = \mathcal{H} \setminus \mathcal{P}$, $\mathcal{A}$ – множество всех функций сравнения. *Типом функции* $F \in \mathcal{H}$ относительно $A \in \mathcal{A}$ назовем число

$$\sigma_A(F) = \inf \{ \tau \in (0, \infty) : |F(z)| < A(\tau|z|) \text{ при } |z| > R = R(\tau) \}.$$

Известная теорема об A -типе, утверждает, что

$$\sigma_A(F) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|F_n|}{A_n} \right)^{1/n}.$$

Функции сравнения играют значительную роль в теории интерполяции аналитических функций [1]– [3], [4]. Информация о функциях сравнения имеется в [5]. Несколько другая, но сходная характеристика роста целых функций предлагается в [4]. Приведенное определение является естественным обобщением понятия экспоненциального типа целой функции: экспоненциальный тип – это тип относительно $A(z) = e^z$. Число $\sigma_A(F)$ дает содержательную информацию о росте функции F , если $0 < \sigma_A(F) < \infty$. Это обстоятельство оправдывает введение понятия эффективного множества функций сравнения. Множество $M \subset \mathcal{A}$ называется *эффективным* (или *плотным классом сравнения*), если для всякой функции $F \in \mathcal{H}^\circ$ существует $A \in M$ такая, что $0 < \sigma_A(F) < \infty$.

¹Здесь и ниже $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ – множество целых неотрицательных чисел.

В этой работе рассматривается вопрос, поставленный Ю. А. Казьминим, о существовании эффективного множества функций сравнения, линейно упорядоченного относительно естественно возникающих частичных упорядочений множества $\mathcal{A}$. Пусть $A, B \in \mathcal{A}$. Тогда соотношения порядка определяются так:

- 1) $A <_0 B \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n/B_n)^{1/n} = 0$;
- 2) $A <_1 B \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n/\beta_n) = 0$;
- 3) $A <_2 B \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n/\beta_n) = 0$ и последовательность α_n/β_n финально убывает.²

Легко видеть, что $A <_2 B \implies A <_1 B \implies A <_0 B$ и что условие $A <_0 B$ эквивалентно условию $\sigma_B(A) = 0$.

Напомним, что *множеством первой категории* в топологическом пространстве называется объединение счетного числа нигде не плотных множеств; прочие множества называются *множествами второй категории*.

Пусть СН – континуум-гипотеза, а LC – следующее условие.

УСЛОВИЕ LC. Отрезок нельзя представить в виде объединения линейно упорядоченного (по включению) набора множеств первой категории.

Еще в 30-х годах Гёдель доказал (см., например, [6]), что СН совместима с аксиоматикой теории множеств ZFC (см. [6], [7]) Цермело–Френкеля (с аксиомой выбора). Из основного результата работы [8] вытекает следующая теорема. Эта теорема совпадает также с утверждением 12 из [9] для случая $m = \aleph_2$.

ТЕОРЕМА VH. С аксиоматикой ZFC совместимо следующее сочетание свойств:

- 1) $2^{\aleph_0} = \aleph_2$;
- 2) отрезок $[0, 1]$ не является объединением $\aleph_1$ множеств 1-й категории;
- 3) на отрезке $[0, 1]$ существует множество второй категории мощности $\aleph_1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Условие LC совместимо с ZFC.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам достаточно проверить, что условие LC выполняется в модели из теоремы VH. Предположим, что это не так. Тогда $d[0, 1] = \bigcup_{\alpha < \tau} X_\alpha$, где τ – некоторый кардинал, α пробегает множество ординалов, меньших τ , X_α – множества первой категории в $[0, 1]$ и $X_\alpha \subset X_\beta$ при $\alpha < \beta$. По свойству 2 из теоремы VH $\tau > \aleph_1$. Следовательно, $\tau = \aleph_2$, ибо $|[0, 1]| = \aleph_2$ по свойству 1. По свойству 3 существует множество второй категории $Y \subset [0, 1]$ такое, что $|Y| = \aleph_1$. В силу последнего равенства существует $\alpha < \tau$, для которого $Y \subset X_\alpha$. Получилось противоречие с тем, что X_α – множество первой категории. Следствие доказано.

В настоящей работе доказываются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. В предположении справедливости СН существует эффективное линейно упорядоченное отношением $<_2$ подмножество $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА 2. В предположении справедливости LC для всякого линейно упорядоченного отношением $<_0$ множества $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ существует функция $f \in \mathcal{H}$

²Последовательность a_n вещественных чисел называется *финально убывающей*, если $a_{n+1} \leq a_n$ при всех достаточно больших n .

такая, что $\sigma_B(f) = \infty$ для всех $B \in \mathcal{B}$. Тем самым, не существует линейно упорядоченного отношением $<_0$ эффективного множества функций сравнения.

Из теорем 1, 2 и следствия 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого $i \in \{0, 1, 2\}$ утверждение о существовании линейно упорядоченного отношением $<_i$ эффективного подмножества $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ не зависит от ZFC, т.е. это утверждение и его отрицание – оба совместимы с ZFC.

2. Доказательство теоремы 1. Для доказательства нам потребуется ряд технических лемм.

ЛЕММА 1. Пусть $A^{[n]}, B^{[n]} \in \mathcal{A}$ ($n \in \omega$), $F \in \mathcal{H}$, причем $A^{[n]} <_2 B^{[m]}$, $A^{[n]} <_2 A^{[n+1]}$, $B^{[n+1]} <_2 B^{[n]}$, $\sigma_{A^{[n]}}(F) = \infty$, $\sigma_{B^{[n]}}(F) = 0$ при всех $m, n \in \omega$. Тогда существует $B \in \mathcal{A}$ такая, что $\sigma_B(F) = 0$ и $A^{[n]} <_2 B <_2 B^{[n]}$ при всех $n \in \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n_k – строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Положим $\beta_k = \beta_k^{[1]}$ при $k \leq n_1$; $\beta_k / \beta_{k-1} = \beta_k^{[m]} / \beta_{k-1}^{[m]}$ при $n_{m-1} < k \leq n_m$, $m \geq 2$. Очевидно, приведенные соотношения однозначно определяют последовательность β_n . Положим также $B_0 = 1$, $B_n = \prod_{k=0}^{n-1} \beta_k$ при $n > 0$ и (пока чисто формально) $B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^k$. Для доказательства леммы достаточно показать, что при подходящем выборе n_k выполняются условия:

(1.1) последовательность β_k монотонно убывает и стремится к нулю (следовательно, B_n – коэффициенты Тейлора функции сравнения B);

(1.2) $\sigma_B(F) = 0$ и $A^{[n]} <_2 B <_2 B^{[n]}$ для всех $n \in \omega$.

Опишем процесс выбора последовательности n_k . Отметим, что в силу (1.1) и определения порядка $<_2$ все достаточно большие натуральные числа k удовлетворяют условиям

$$(1.a) \quad \frac{\beta_{k+1}^{[2]}}{\beta_{k+1}^{[1]}} \leq \frac{\beta_k^{[2]}}{\beta_k^{[1]}} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_{k+1}^{[1]}}{\beta_{k+1}^{[2]}} \leq \frac{\alpha_k^{[1]}}{\beta_k^{[2]}};$$

(1.b) $F_k \leq \prod_{j=0}^{k-1} \beta_j^{(2)}$, где $\beta_j^{(2)}$ определяется из соотношений $\beta_k^{(2)} = \beta_k^{[1]}$ при $k \leq n_1$; $\beta_k^{(2)} / \beta_{k-1}^{(2)} = \beta_k^{[2]} / \beta_{k-1}^{[2]}$ при $n_1 < k$.

Натуральное число n_1 надо выбрать так, чтобы при всех $k \geq n_1$ выполнялись условия (1.a) и (1.b). Далее, если $n_1, \dots, n_{j-1}$ уже выбраны, то $n_j \in \omega$ выберем так, чтобы $n_j > n_{j-1}$ и при всех $k \geq n_j$, $1 \leq i \leq j$ выполнялись условия

$$(1.a') \quad \frac{\beta_{k+1}^{[j+1]}}{\beta_{k+1}^{[j]}} \leq \frac{\beta_k^{[j+1]}}{\beta_k^{[j]}} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_{k+1}^{[i]}}{\beta_{k+1}^{[j+1]}} \leq \frac{\alpha_k^{[i]}}{\beta_k^{[j+1]}};$$

(1.b') $F_k \leq j^{-k} \prod_{p=0}^{k-1} \beta_p^{(j+1)}$, где $\beta_p^{(j+1)}$ определяется из соотношений:

$$\begin{aligned} \beta_p^{(j+1)} &= \beta_p^{[1]} && \text{при } p \leq n_1; \\ \frac{\beta_p^{(j+1)}}{\beta_{p-1}^{(j+1)}} &= \frac{\beta_p^{[m]}}{\beta_{p-1}^{[m]}} && \text{при } n_{m-1} < p \leq n_m, \quad 2 \leq m \leq j; \\ \frac{\beta_p^{(j+1)}}{\beta_{p-1}^{(j+1)}} &= \frac{\beta_p^{[j+1]}}{\beta_{p-1}^{[j+1]}} && \text{при } p > n_j. \end{aligned}$$

Отметим ряд свойств β_n , соответствующих построенной последовательности n_k .

1) Из построения n_k непосредственно видно, что $\beta_k/\beta_{k-1} \leq 1$ при всех k . Значит, последовательность β_n убывает.

2) Из условия (1.а') видно, что

$$\frac{\beta_k}{\beta_{k-1}} = \frac{\beta_k^{[m]}}{\beta_{k-1}^{[m]}} \leq \frac{\beta_k^{[i]}}{\beta_{k-1}^{[i]}} \quad \text{при } n_{m-1} < k \leq n_m, \quad i \leq m.$$

Следовательно, $\beta_k/\beta_k^{[i]} \leq \beta_{k-1}/\beta_{k-1}^{[i]}$. Таким образом, для всякого i последовательность $\beta_k/\beta_k^{[i]}$ финально убывает. Отсюда и из убывания $B^{[i]}$ по порядку $<_2$ получаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} (\beta_k/\beta_k^{[i]}) = 0$. Из последнего равенства и 1) видно, что $B \in \mathcal{A}$ и $B <_2 B^{[i]}$ при всех i .

3) Из условия (1.а') вытекает, что

$$\frac{\beta_k}{\beta_{k-1}} = \frac{\beta_k^{[m]}}{\beta_{k-1}^{[m]}} \geq \frac{\alpha_k^{[i]}}{\alpha_{k-1}^{[i]}} \quad \text{при } n_{m-1} < k \leq n_m, \quad i \leq m.$$

Стало быть, последовательность $\alpha_k^{[i]}/\beta_k$ финально убывает.

4) Из условия (1.б') следует, что $(F_k/B_k)^{1/k} \leq \frac{1}{m}$ при $n_{m-1} < k \leq n_m$. Значит, $\sigma_B(F) = 0$.

5) Из 3) и равенств $\sigma_{A^{[n]}}(F) = \infty$, $\sigma_{B^{[n]}}(F) = 0$ имеем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k^{[i]}/\beta_k) = 0$ для всякого $i \in \omega$. Стало быть, $A^{[i]} <_2 B$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $A, B^{[n]} \in \mathcal{A}$ ($n \in \omega$), $F \in \mathcal{H}$, причем $\sigma_A(F) = \infty$ и $A <_2 B^{[n]}$, $B^{[n+1]} <_2 B^{[n]}$, $\sigma_{B^{[n]}}(F) = 0$ при всех $n \in \omega$. Тогда существует $B \in \mathcal{A}$ такая, что $\sigma_B(F) = 0$ и $A <_2 B <_2 B^{[n]}$ для всех $n \in \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 1 (но несколько проще).

ЛЕММА 3. Пусть $B \in \mathcal{A}$, $A^{[n]}$ ($n \in \omega$), $F \in \mathcal{H}$, причем $\sigma_B(F) = 0$ и $A^{[n]} <_2 B$, $A^{[n]} <_2 A^{[n+1]}$, $\sigma_{A^{[n]}}(F) = \infty$ при всех $n \in \omega$. Тогда существует $A \in \mathcal{A}$ такая, что $\sigma_A(F) = \infty$ и $A^{[n]} <_2 A <_2 B$ для всех $n \in \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем действовать так же, как при доказательстве леммы 1. Пусть n_k — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Положим $\alpha_k = \alpha_k^{[1]}$ при $k \leq n_1$; $\alpha_k/\alpha_{k-1} = \alpha_k^{[m]}/\alpha_{k-1}^{[m]}$ при $n_{m-1} < k \leq n_m$, $m \geq 2$. Функцию A определим по α_n так же, как функция B определялась по β_n в доказательстве леммы 1. Нам остается выбрать подходящим образом последовательность n_k . Так же как при доказательстве леммы 1, n_1 выберем так, чтобы выполнялись условия:

$$(3.a) \quad \frac{\alpha_{k+1}^{[1]}}{\alpha_{k+1}^{[2]}} \leq \frac{\alpha_k^{[1]}}{\alpha_k^{[2]}} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_{k+1}^{[2]}}{\beta_{k+1}} \leq \frac{\alpha_k^{[2]}}{\beta_k} \quad \text{для всех } k \geq n_1.$$

$$(3.b) \quad \text{Существует } m < n_1 \text{ такое, что } F_m \geq \prod_{j=0}^{m-1} \alpha_j, \text{ где } \alpha_j = \alpha_j^{[1]} \text{ при } j \leq n_1.$$

Далее, если $n_1, \dots, n_{j-1}$ уже выбраны, то $n_j \in \omega$ выберем так, чтобы $n_j > n_{j-1}$ и при всех $k \geq n_j$, $1 \leq i \leq j$ выполнялись условия:

$$(3.a') \quad \frac{\alpha_{k+1}^{[i]}}{\alpha_{k+1}^{[j+1]}} \leq \frac{\alpha_k^{[i]}}{\alpha_k^{[j+1]}} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_{k+1}^{[j+1]}}{\beta_{k+1}} \leq \frac{\alpha_k^{[j+1]}}{\beta_k}.$$

(3.b') Существует $m \in (n_{j-1}, n_j)$ такое, что $F_m \geq j^m \prod_{p=0}^{m-1} \alpha_p$, где α_p определяется из соотношений: $\alpha_p = \alpha_p^{[1]}$ при $p \leq n_1$; $\alpha_p / \alpha_{p-1} = \alpha_p^{[r]} / \alpha_{p-1}^{[r]}$ при $n_{r-1} < p \leq n_r$, $2 \leq r \leq j$.

Так же как при доказательстве леммы 1, из свойств (3.a') и (3.b') выводятся следующие свойства последовательности α_n (и соответствующих $A_n, A(z)$).

- 1) Последовательность α_n убывает.
- 2) Из условия (3.a') видно, что

$$\frac{\alpha_k^{[i]}}{\alpha_{k-1}^{[i]}} \leq \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} = \frac{\alpha_k^{[m]}}{\alpha_{k-1}^{[m]}} \leq \frac{\beta_k}{\beta_{k-1}} \quad \text{при} \quad n_{m-1} < k \leq n_m, \quad i \leq m.$$

Значит, последовательности $\alpha_k / \beta_k, \alpha_k / \alpha_k^{[i]}$ финально убывают.

3) Из 2) и 1) следует, что A – функция сравнения. В силу произвольности i , возрастания последовательности $A^{[i]}$ по порядку $<_2$ и 2) получаем, что $A^{[i]} <_2 A$ при всех i .

4) Из (3.b') следует, что $\sigma_A(F) = \infty$. Из последнего равенства и 2) вытекает, что $\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k / \beta_k) = 0$. Значит, $A <_2 B$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $F \in \mathcal{H}$, причем $A <_2 B$, $\sigma_A(F) = \infty$ и $\sigma_B(F) = 0$. Тогда существует $C \in \mathcal{A}$ такая, что $A <_2 C <_2 B$ и $\sigma_C(F) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} (|F_n| / B_n)^{1/n} = 0$ и $F \neq 0$, то

$$0 < r = \max_{n \in \omega} \left(\frac{|F_n|}{B_n} \right)^{1/n} < \infty.$$

В силу определения отношения $<_2$ существует $n_1 \in \omega$ такое, что $\alpha_{n+1} / \beta_{n+1} \leq \alpha_n / \beta_n$ при $n \geq n_1$. Положим $\gamma_i = r\beta_i$ при $i \leq n_1$ и γ_n при $n > n_1$ будем выбирать индуктивно. Опишем шаг индукции. Пусть $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_N$ ($N \geq n_1$) уже выбраны, причем

$$(4.1) \quad \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \in \left[\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}, \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \right] \quad \text{при} \quad n_1 \leq n \leq N-1$$

(непустота последнего отрезка очевидна в силу выбора n_1);

$$(4.2) \quad \text{если} \quad \gamma'_j = \begin{cases} \gamma_j & \text{при } 0 \leq j \leq N, \\ \gamma_N \beta_j / \beta_N & \text{при } j > N, \end{cases}$$

$$C'_0 = 1, \quad C'_j = \prod_{k=0}^{j-1} \gamma'_k \quad \text{при } j \geq 1, \quad \text{то} \quad \Delta_N = \max_{k \in \omega} \left(\frac{|F_k|}{C'_k} \right)^{1/k} \leq 1.$$

Пусть $\Delta'_N = \max_{k \geq N+1} (|F_k|/C'_k)^{1/k} \leq 1$. Очевидно, $\Delta'_N \leq \Delta_N$. Выберем γ_{N+1} и проследим за выполнением условий (4.1) и (4.2). Для $\delta \in [\gamma_N \alpha_{N+1}/\alpha_N, \gamma_N \beta_{N+1}/\beta_N]$ положим

$$\gamma_j^{N,\delta} = \begin{cases} \gamma_j & \text{при } 0 \leq j \leq N, \\ \delta \frac{\beta_j}{\beta_{N+1}} & \text{при } j > N. \end{cases}$$

Отметим, что из выбора δ следует, что $\gamma_j^{N,\delta} \leq \gamma'_j$ и $\Delta_j^{N,\delta} = \Delta'_N \leq \Delta_N \leq 1$, где

$$\Delta_N^\delta = \max_{k \geq N+1} \left(\frac{|F_k|}{C_k^{N,\delta}} \right)^{1/k}, \quad C_j^{N,\delta} = \prod_{k=0}^{j-1} \gamma_k^{N,\delta}.$$

Из определения величины Δ_N^δ следует, что функция $\delta \mapsto \Delta_N^\delta$ строго убывает и непрерывна. Последнее утверждение делает корректным следующее определение величины γ_{N+1} . Пусть $\gamma_{N+1} = \gamma_N \alpha_{N+1}/\alpha_N$, если $\Delta_N^\delta < 1$ при всех $\delta \in [\gamma_N \alpha_{N+1}/\alpha_N, \gamma_N \times \beta_{N+1}/\beta_N]$. В противном случае в качестве γ_{N+1} возьмем (единственное) число $\delta \in [\gamma_N \times \alpha_{N+1}/\alpha_N, \gamma_N \beta_{N+1}/\beta_N]$ такое, что $\Delta_N^\delta = 1$. Выполнение условий (4.1) и (4.2) для $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{N+1}$ непосредственно вытекает из построения γ_{N+1} . Описание выбора последовательности γ_n закончено. Положим $C_n = \prod_{k=0}^{n-1} \gamma_k$. Из условия (4.2) имеем, что

$$\left(\frac{|F_k|}{C_k} \right)^{1/k} \leq 1 \quad \forall k \in \omega. \quad (1)$$

Из условия (4.1) следует, что последовательности γ_n/β_n , α_n/γ_n финально убывают (точнее – убывают при $n \geq n_1$). Учитывая, что последовательность β_n убывает и стремится к нулю (B – функция сравнения), получаем, что последовательность γ_n обладает теми же свойствами и, следовательно, $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ – функция сравнения. Из (1) видно, что $\sigma_C(F) \leq 1$. Заметим, что равенство $\Delta_N^{\gamma_{N+1}} = 1$ выполняется для бесконечного числа значений N (иначе, при N , больших некоторого N_0 , выполняется равенство $\gamma_{N+1} = \gamma_N \alpha_{N+1}/\alpha_N$, следовательно, $\gamma_N = \mu \alpha_N$ для некоторой положительной константы μ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (|F_n|/C_n)^{1/n} = \infty$ в силу условия $\sigma_A(F) = \infty$, что противоречит (1)). Условие $\Delta_N^{\gamma_{N+1}} = 1$ эквивалентно существованию $m > N$ такого, что $C_m = F_m$. Таким образом, равенство $C_m = F_m$ выполняется для бесконечного числа значений m . Стало быть, $\sigma_C(F) \geq 1$. То есть, $\sigma_C(F) = 1$. Из финального убывания последовательностей γ_n/β_n , α_n/γ_n следует, что обе они имеют (конечный) предел. Но если бы первый из этих двух пределов был бы отличен от нуля, то вышло бы противоречие с условием $\sigma_B(F) = 0$, а если бы отличен от нуля был второй предел, то это противоречило бы условию $\sigma_A(F) = \infty$ (здесь используется равенство $\sigma_C(F) = 1$). Равенство нулю этих пределов влечет соотношение $A <_2 C <_2 B$. Лемма доказана.

Следующие два утверждения проверяются элементарно.

ЛЕММА 5. Пусть $M \subset \mathcal{A}$ – (не более чем) счетное множество (возможно пустое), $F \in \mathcal{H}$, $\sigma_A(F) = \infty$ для всех $A \in M$. Тогда существует $B \in \mathcal{A}$ такая, что $\sigma_B(F) = 0$ и $A <_2 B$ для всех $A \in M$.

ЛЕММА 6. Пусть $M \subset \mathcal{A}$ – счетное множество, $F \in \mathcal{H}^\circ$, $\sigma_B(F) = 0$ при всех $B \in M$. Тогда существует $A \in \mathcal{A}$ такая, что $\sigma_A(F) = \infty$ и $A <_2 B$ при всех $B \in M$.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть $M \subset \mathcal{A}$ – счетное множество, линейно упорядоченное отношением $<_2$, $F \in \mathcal{H}^\circ$. Тогда существует $M' \subset \mathcal{A}$ такое, что $M \subseteq M'$ и

- (О.1) M' – счетное множество, линейно упорядоченное отношением $<_2$;
- (О.2) Существует $C \in M'$ такое, что $0 < \sigma_C(F) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если существует $C \in M$ такое, что $0 < \sigma_C(F) < \infty$, то само множество M подойдет в качестве M' . Если такой функции C не существует, то $M = M_1 \cup M_2$, где $M_1 = \{A \in M : \sigma_A(F) = \infty\}$, $M_2 = \{A \in M : \sigma_A(F) = 0\}$. В силу линейной упорядоченности множества M отношением $<_2$ множества M_1 и M_2 также линейно упорядочены этим отношением, причем $A <_2 B$ при всех $A \in M_1$, $B \in M_2$. Возможны несколько случаев.

СЛУЧАЙ 1. Множество M_1 непусто и не имеет наибольшего элемента (относительно порядка $<_2$), а множество M_2 непусто и не имеет наименьшего элемента.

В силу счетности линейно упорядоченных множеств M_1 и M_2 существуют последовательности $A^{[n]} \in M_1$, $B^{[n]} \in M_2$ такие, что $A^{[n]} <_2 A^{[n+1]}$ и $B^{[n+1]} <_2 B^{[n]}$ для всех $n \in \omega$, и для любых $G \in M_1$, $H \in M_2$ существует $n \in \omega$ такое, что $G <_2 A^{[n]}$ и $B^{[n]} <_2 H$.

Теперь нетрудно заметить, что функции $A^{[n]}$, $B^{[n]}$ и F удовлетворяют условиям леммы 1. Пусть B – функция, существование которой утверждается в лемме 1. Теперь функции $A^{[n]}$, B и F удовлетворяют условиям леммы 3 и пусть A – функция, существование которой гарантируется леммой 3. Функции A , B и F , очевидно, удовлетворяют условиям леммы 4. Теперь видно, что в качестве M' можно взять множество $M \cup \{C\}$, где C – функция из леммы 4. В самом деле, из перечисленных лемм и свойств последовательностей $A^{[n]}$ и $B^{[n]}$ следует, что $\sigma_C(F) = 1$ и $A <_2 C <_2 B$ для всех $A \in M_1$, $B \in M_2$.

СЛУЧАЙ 2. Множество M_1 непусто и не имеет наибольшего элемента, а множество M_2 имеет наименьший элемент B .

Выберем последовательность $A^{[n]} \in M_1$ такую, что $A^{[n]} <_2 A^{[n+1]}$ для всех $n \in \omega$ и для любой $G \in M_1$ существует $n \in \omega$ такое, что $G <_2 A^{[n]}$.

Тогда функции $A^{[n]}$, B , F удовлетворяют условиям леммы 3. Пусть A – функция, существование которой доказано в лемме 3. Функции A , B и F , очевидно, удовлетворяют условиям леммы 4. Из лемм 3, 4, так же как в первом случае, следует, что в качестве M' можно взять множество $M \cup \{C\}$, где C – функция из леммы 4.

СЛУЧАЙ 3. Множество M_1 имеет наибольший элемент A , а множество M_2 непусто и не имеет наименьшего элемента.

Выберем последовательность $B^{[n]} \in M_2$ такую, что $B^{[n+1]} <_2 B^{[n]}$ для всех $n \in \omega$ и для любой $H \in M_2$ существует $n \in \omega$ такое, что $B^{[n]} <_2 H$.

Тогда функции A , $B^{[n]}$ и F удовлетворяют условиям леммы 2. Пусть A – функция, существование которой доказано в лемме 2. Существование искомого множества получается применением леммы 4 так же, как в предыдущем случае.

СЛУЧАЙ 4. Множество M_1 имеет наибольший элемент A , а множество M_2 имеет наименьший элемент B .

Доказательство существования множества M' совпадает с завершающим этапом доказательства в трех разобранных случаях (т.е. мгновенно следует из леммы 4).

СЛУЧАЙ 5. $M_1 = \emptyset$ или $M_2 = \emptyset$.

В этом случае леммы 5 и 6 позволяют добавить к множеству M один элемент (или два элемента, если оба множества M_1 и M_2 пусты) так, чтобы множество M по-прежнему оставалось линейно упорядоченным, а множества M_1 и M_2 стали бы непустыми. В этом случае мы окажемся в условиях одного из предыдущих случаев. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть выполняется СН. Тогда $\mathcal{H}^\circ = \{F_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ (α пробегает множество счетных ординалов). Построим индуктивно трансфинитную последовательность $\{M_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ счетных подмножеств $\mathcal{A}$, обладающих следующими свойствами:

1. $M_\alpha \subset M_\beta$ при $\alpha < \beta$;
2. M_α линейно упорядочено отношением $<_2$;
3. Для всякого $\alpha < \beta$ найдется $A \in M_\beta$ такое, что $0 < \sigma_A(F_\alpha) < \infty$.

Положим $M_0 = \emptyset$. Пусть $\beta < \aleph_1$ и M_α при $\alpha < \beta$, удовлетворяющие требуемым условиям, построены. Построим M_β . Если β – предельный ординал, то в качестве M_β можно взять $\bigcup_{\alpha < \beta} M_\alpha$ (это множество счетно в силу счетности ординала β). Если β имеет непосредственного предшественника $\beta - 1$, то в качестве M_β можно взять множество M' , которое получается, если применить основную лемму к $F = F_{\beta-1}$, $M = M_{\beta-1}$. Построение M_α завершено. Из условий 1, 2, 3, которым удовлетворяют множества M_α , непосредственно следует, что $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha < \aleph_1} M_\alpha$ – эффективное линейно упорядоченное отношением $<_2$ множество функций сравнения.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\mathcal{B}$ – эффективное линейно упорядоченное отношением $<_0$ множество функций сравнения, то для всякой функции $F \in \mathcal{H}^\circ$ существует ровно одна функция $B \in \mathcal{B}$ такая, что $0 < \sigma_B(F) < \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Схема доказательства теоремы 2 позволяет (в предположении СН) всякое линейно упорядоченное (порядком $<_2$) сепарабельное (в порядковой топологии) множество функций сравнения дополнить до эффективного линейно упорядоченного множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Символом c_0 будем обозначать банахово пространство всех комплексных последовательностей, сходящихся к нулю (с нормой $\|x\| = \max\{|x_n| : n \in \omega\}$).

ЛЕММА 7. В предположении справедливости ЛС пространство c_0 нельзя представить в виде объединения линейно упорядоченного (по включению) множества подмножеств первой категории.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно показать существования биективного отображения $f: [0, 1] \rightarrow c_0$ такого, что отображения f и f^{-1} переводят любое множество первой категории в множество первой категории. Существование такого отображения вытекает из теоремы 2 с. 495 в книге [10]. Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2. Пусть $\mathcal{B}$ – линейно упорядоченное отношением $<_0$ множество функций сравнения. Для всякого $B \in \mathcal{B}$ положим

$$Z_B = \left\{ x \in c_0 : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n|}{B_n^{1/n}} < \infty \right\}.$$

Из определения порядка $<_0$ следует, что $Z_B \subset Z_C$ при $B <_0 C$. Значит, множество $\{Z_B : B \in \mathcal{B}\}$ – линейно упорядоченное по включению множество, состоящее из подмножеств c_0 . Предположим, что заключение теоремы 2 не выполняется. Тогда всякая целая функция имеет конечный тип относительно некоторой функции из $\mathcal{B}$. Следовательно, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} Z_B = c_0$. Стало быть, по лемме 7 найдется $B \in \mathcal{B}$ такое, что Z_B – множество второй категории. Но $Z_B = \bigcup_{m \in \omega} L_m$, где $L_m = \{x \in c_0 : |x_n| \leq m B_n^{1/n} \text{ для всех } n \in \omega\}$. Следовательно, среди множеств L_m есть множества второй категории. С другой стороны каждое L_m – компактное подмножество c_0 и, значит, нигде не плотно (ибо всякое компактное подмножество бесконечномерного банахового пространства нигде не плотно). Полученное противоречие доказывает теорему 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Автору неизвестно, совместимо ли с ZFC утверждение о наличии эффективного линейно упорядоченного отношением $<_i$ множества функций сравнения и об одновременном отсутствии такого множества, упорядоченного отношением $<_j$ при некоторых $i, j \in \{0, 1, 2\}, i < j$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Казьмин Ю. А. Сравнения функция // Математическая энциклопедия. Т. 5: Советская энциклопедия, 1985. С. 168.
- [2] Казьмин А. Ю. Об одной задаче А. О. Гельфонда // Матем. сб. 1973. Т. 90. № 4. С. 521–543.
- [3] Казьмин А. Ю. Об интерполировании средними // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 5. С. 1050–1053.
- [4] Осолков А. В. О некоторых вопросах теории целых функций // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 1. С. 129–148.
- [5] Казьмин Ю. А. Методы теории интерполяции аналитических функций и их приложения. Дисс. . . . д. ф.-м. н. М.: МГУ, 1972.
- [6] Дж. Барвайс (ред.) Справочная книга по математической логике. Т. 2. Теория множеств. М.: Мир, 1980.
- [7] Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
- [8] Vopenka P., Hrbachek K. The consistency of some theorem of real numbers // Bull. Acad. Polon. Sci., ser. sci. math., astr. et phis. 1967. V. 15. № 3. P. 107–111.
- [9] Малыгин В. И. Топология и форсинг // УМН. 1983. Т. 38. № 1. С. 69–118.
- [10] Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: shkarin@mech.math.msu.su, stas@graal.math.msu.su

Поступило
08.04.1999