Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Хессами Пилеруд, Х. Хессами Пилеруд, Рациональные приближения значений дигамма-функции и гипотеза о знаменателях, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 5, 744–763

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8780>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 06:31:16

Рациональные приближения значений дигамма-функции и гипотеза о знаменателях

Т. Хессами Пилеруд, Х. Хессами Пилеруд

В статье получены явные конструкции рациональных приближений для чисел $\ln(b) - \psi(a+1)$, где ψ определяет логарифмическую производную гамма-функции Эйлера. Доказаны формулы, выражающие числители и знаменатели приближений в терминах гипергеометрических сумм. Это обобщает конструкцию Аптекарева рациональных приближений для константы Эйлера γ . В качестве следствия получены рациональные приближения для чисел $\pi/2 \pm \gamma$. Проведено сравнение рассматриваемой конструкции с рациональными приближениями Ривоаля для чисел $\gamma + \ln(b)$. Доказаны предположения, высказанные Ривоалем, о знаменателях рациональных приближений чисел $\gamma + \ln(b)$ и об общих знаменателях совместных приближений чисел γ и $\zeta(2) - \gamma^2$.

Библиография: 12 названий.

1. Введение.

1. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $a > -1$. Рассмотрим многочлен Якоби–Лагерра

$$Q_n^{(a,b)}(x) = \frac{1}{n!2} \frac{x^{-a} e^{bx}}{1-x} (x^n (x^{n+a} (1-x)^{2n+1} e^{-bx})^{(n)})^{(n)}, \quad (1)$$

являющийся совместно ортогональным многочленом относительно двух весовых функций

$$w_1(x) = x^a (1-x) e^{-bx}, \quad w_2(x) = x^a (1-x) e^{-bx} \ln(x)$$

на промежутках $\Delta_1 = [0, 1]$ и $\Delta_2 = [1, +\infty)$, и для которого имеют место следующие соотношения ортогональности:

$$\int_{\Delta_j} x^\nu Q_n^{(a,b)}(x) w_k(x) dx = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad j, k = 1, 2.$$

Совместно ортогональные многочлены (1) были введены в статье [1]. В работе [2] многочлены $Q_n^{(a,b)}$ при $a = 0$, $b = 1$ впервые были применены для построения рациональных приближений постоянной Эйлера

$$\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} - \ln k \right).$$

Работа выполнена при поддержке Института исследований по фундаментальным наукам (Иран), (гранты № 89110025 (первый автор) и № 89110024 (второй автор)).

Полученные приближения хотя и не позволяют доказать иррациональность γ , обладают достаточно хорошими свойствами. Числители p_n и знаменатели q_n рациональных приближений являются целыми числами, задаваемыми рекурсией третьего порядка

$$(16n - 15)q_{n+1} = (128n^3 + 40n^2 - 82n - 45)q_n - n^2(256n^3 - 240n^2 + 64n - 7)q_{n-1} + n^2(n - 1)^2(16n + 1)q_{n-2} \quad (2)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, & p_1 &= 2, & p_2 &= 31, \\ q_0 &= 1, & q_1 &= 3, & q_2 &= 50, \end{aligned}$$

и имеющими следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} q_n &= (2n)! \frac{e^{\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}(4e)^{3/8}} + O(n^{-1/2}) \right), \\ p_n - \gamma q_n &= (2n)! \frac{e^{-\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{(4e)^{3/8}} + O(n^{-1/2}) \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, рекуррентное соотношение (2) определяет рациональные приближения постоянной Эйлера

$$\frac{p_n}{q_n} - \gamma = 2\pi e^{-2\sqrt{2n}}(1 + O(n^{-1/2})), \quad n \rightarrow \infty.$$

Целочисленность последовательностей p_n и q_n не следует непосредственно из (2) и была доказана независимо в [3] с помощью рассмотрения более “плотной” последовательности рациональных приближений к γ , числители и знаменатели которой удовлетворяют более простым рекуррентным соотношениям. Основную трудность работ [2], [3] представляет нахождение рекуррентных уравнений, которые опираются на рекуррентные соотношения для многочленов (1).

В настоящей статье мы обобщим конструкцию работы [2] и построим рациональные приближения для чисел $\ln b - \psi(a + 1)$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, $a > -1$, $b > 0$, $\psi(z)$ определяет логарифмическую производную гамма-функции Эйлера (или дигамма-функцию)

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right),$$

при этом $\psi(1) = -\gamma$. Мы дадим явные формулы для числителей и знаменателей этих приближений в терминах гипергеометрических сумм, а для остатков приближений – в терминах гиперэкспоненциальных интегралов. Хорошо развитая техника для работы с такими объектами (см. [4], [5]), реализованная в алгоритмах ЕКНАД и MultiAlmkvistZeilberger, сопровождающих программный пакет MAPLE, позволяет получать рекуррентные уравнения, задающие рациональные приближения, автоматически.

Сформулируем результаты, доказываемые в статье. Пусть, как обычно, $(a)_0 = 1$, $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$, $n \geq 1$, обозначает символ Похгаммера или сдвинутый факториал. Гипергеометрическая функция Гаусса $F(a, b; c; z)$ при комплексных

параметрах a, b, c определяется как сумма ряда

$$F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} z^k, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots \quad (4)$$

Если a и b отличны от $0, -1, -2, \dots$, то гипергеометрический ряд (4) абсолютно сходится для всех значений z , лежащих внутри круга $|z| < 1$. Если один из параметров a, b равен целому неположительному числу, то ряд (4) обрывается на конечном числе слагаемых, и гипергеометрическая функция является многочленом от z . Пусть $H_n(\alpha)$ обозначает частичную сумму гармонического ряда

$$H_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \alpha}, \quad \alpha \neq -1, \dots, -n, \quad n \geq 1, \quad H_0(\alpha) = 0,$$

$H_n := H_n(0)$, и D_n – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, n$. Всюду в дальнейшем считаем, что сумма (произведение) по пустому множеству значений индекса равна 0 (равно 1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a, b \in \mathbb{Q}$, $a > -1$, $b > 0$. Тогда для любого целого $n \geq 0$ справедливо следующее представление:

$$\frac{b^{2n+a+1}}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty Q_n^{(a,b)}(x) x^a e^{-bx} \ln(x) dx = p_n - q_n(\ln(b) - \psi(a+1)),$$

где

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (a+1)_{n+k} b^{n-k} \in \mathbb{Z}[a, b], \\ p_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (a+1)_{n+k} b^{n-k} H_{n+k}(a) \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^k \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^{m+k}}{k} \binom{n}{k+1} \binom{k}{m} \binom{n-k}{l} (a+1)_{m+n+l} b^{n-m-l} \\ &\in \frac{1}{D_n} \mathbb{Z}[a, b]. \end{aligned}$$

При этом для последовательностей q_n и p_n имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} q_n &= (2n)! \frac{e^{\sqrt{2bn}}}{n^{1/4-a}} (c(a, b) + O(n^{-1/2})), \quad n \rightarrow \infty \\ p_n - q_n(\ln b - \psi(a+1)) &= (2n)! \frac{-e^{\sqrt{2bn}}}{n^{1/4-a}} (2\pi c(a, b) + O(n^{-1/2})), \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

где

$$c(a, b) = \frac{2^a}{\Gamma(a+1)/(8b\pi^2 e^{3b/2})^{1/4}}.$$

Последовательности q_n и p_n из теоремы 1 являются решениями рекуррентного уравнения третьего порядка с полиномиальными коэффициентами, зависящими

от a и b . Это рекуррентное уравнение легко может быть выписано при конкретных значениях a и b (см. замечание к лемме 4). Однако, мы не приводим его здесь в общем виде в силу громоздкости его коэффициентов.

Заметим, что при $a = 0$, $b = 1$ полученные приближения совпадают с рациональными приближениями Аптекарева для константы Эйлера. Тем самым, теорема 1 дает явные формулы для q_n , p_n из (3)

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (n+k)!, \\ p_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (n+k)! H_{n+k} \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^k \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^{m+k}}{k} \binom{n}{k+1} \binom{k}{m} \binom{n-k}{l} (m+n+l)!, \end{aligned} \quad (5)$$

откуда следует не только целочисленность последовательностей q_n и p_n , но также и делимость q_n на $n!$, а p_n на $n!/D_n$. Поэтому линейные формы (3) можно сократить на большой общий множитель $n!/D_n$: полученные формы также будут иметь целые коэффициенты, однако, этого все равно недостаточно для доказательства иррациональности γ .

Отметим несколько следствий теоремы 1. При $a = 0$, $b \in \mathbb{Q}$, $b > 0$ получаем рациональные приближения для $\gamma + \ln(b)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Последовательности*

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (n+k)! b^{n-k} \in n! \mathbb{Z}[b], \\ p_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (n+k)! b^{n-k} H_{n+k} \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^k \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^{m+k}}{k} \binom{n}{k+l} \binom{k}{m} \binom{n-k}{l} (m+n+l)! b^{n-m-l} \in \frac{n!}{D_n} \mathbb{Z}[b] \end{aligned}$$

удовлетворяют следующему асимптотическому равенству:

$$\frac{p_n}{q_n} - (\ln(b) + \gamma) = 2\pi e^{-2\sqrt{2bn}}(1 + O(n^{-1/2})), \quad n \rightarrow \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $b \notin 4/3 + 16\mathbb{N}/3$ последовательности p_n и q_n из следствия 1 альтернативно могут быть заданы как решения рекуррентного уравнения третьего порядка

$$\begin{aligned} &(16n - 3b + 4)f_{n+2} \\ &= (128n^3 + 8n^2b - 6nb^2 + 416n^2 - 12nb - 9b^2 + 400n - 38b + 88)f_{n+1} \\ &\quad - (n+1)^2(256n^3 - 48n^2b + 16nb^2 - 3b^3 + 576n^2 \\ &\quad \quad - 48nb + 8b^2 + 384n - 12b + 80)f_n \\ &\quad + b^2n^2(n+1)^2(16n - 3b + 20)f_{n-1} \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, & p_1 &= 3b - 1, & p_2 &= 9b^2 + 44b - 22, \\ q_0 &= 1, & q_1 &= b + 2, & q_2 &= 2b^2 + 24b + 24. \end{aligned}$$

При $b = 1$, $a \in \mathbb{Q}$, $a > -1$ получаем рациональные приближения значений дигамма-функции $\psi(a+1)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $a \in \mathbb{Q}$, $a > -1$ имеем

$$\psi(a+1) - \frac{p_n}{q_n} = 2\pi e^{-2\sqrt{2n}}(1 + O(n^{-1/2})), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (a+1)_{n+k}, \\ p_n &= 2 \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^k \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^{m+k}}{k} \binom{n}{k+l} \binom{k}{m} \binom{n-k}{l} (a+1)_{m+n+l} \\ &\quad - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (a+1)_{n+k} H_{n+k}(a). \end{aligned}$$

При $b = 1/8$, $a = -3/4$, $a = -1/4$ получаем рациональные приближения для чисел $\pi/2 \pm \gamma$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Последовательности

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \left(\frac{1}{4}\right)_{n+k} 8^{n+k}, \\ p_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \left(\frac{1}{4}\right)_{n+k} \sum_{l=1}^{n+k} \frac{4 \cdot 8^{n+k}}{4l-3} \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^k \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^{m+k}}{k} \binom{n}{k+l} \binom{k}{m} \binom{n-k}{l} \left(\frac{1}{4}\right)_{m+n+l} 8^{m+n+l} \end{aligned}$$

задают рациональные приближения числа $\gamma + \pi/2$

$$\frac{p_n}{q_n} - \left(\gamma + \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi e^{-\sqrt{n}}(1 + O(n^{-1/2})), \quad n \rightarrow \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Последовательности q_n и p_n из следствия 3 также могут быть заданы как решения рекуррентного уравнения

$$\begin{aligned} &(2n-1)(n+2)(2048n^3 - 304n^2 - 456n + 153)f_{n+2} \\ &= (2097152n^7 + 7618560n^6 + 7195136n^5 - 1843584n^4 \\ &\quad - 3710560n^3 + 569496n^2 + 505524n - 142182)f_{n+1} \\ &\quad - 4(n+1)(67108864n^8 + 191365120n^7 + 149225472n^6 - 2504192n^5 \\ &\quad - 43117824n^4 - 10174400n^3 + 2244800n^2 + 726450n + 45729)f_n \\ &\quad + 256(2n+1)(n+1)(2048n^3 + 5840n^2 + 5080n + 1441)(4n-3)^2 n^2 f_{n-1} \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$p_1 = 0, \quad p_1 = 68, \quad p_2 = 31596 \quad \text{и} \quad q_0 = 1, \quad q_1 = 22, \quad q_2 = 10820.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. *Последовательности*

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \left(\frac{3}{4}\right)_{n+k} 8^{n+k}, \\ p_n &= 2 \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^k \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^{m+k}}{k} \binom{n}{k+l} \binom{k}{m} \binom{n-k}{l} \left(\frac{3}{4}\right)_{m+n+l} 8^{m+n+l} \\ &\quad - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \left(\frac{3}{4}\right)_{n+k} \sum_{l=1}^{n+k} \frac{4 \cdot 8^{n+k}}{4l-1} \end{aligned}$$

задают рациональные приближения числа $\pi/2 - \gamma$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) - \frac{p_n}{q_n} = 2\pi e^{-\sqrt{n}}(1 + O(n^{-1/2})), \quad n \rightarrow \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Последовательности q_n и p_n из следствия 4 являются решениями рекуррентного уравнения

$$\begin{aligned} &(n+2)(4096n^4 + 2464n^3 - 736n^2 + 58n - 3)f_{n+2} \\ &= (2097152n^7 + 11288576n^6 + 21899776n^5 + 17372032n^4 + 3526048n^3 \\ &\quad - 1084856n^2 - 18076n + 4298)f_{n+1} \\ &\quad - 4(n+1)(67108864n^8 + 342360064n^7 + 664600576n^6 + 613444096n^5 \\ &\quad + 259912960n^4 + 27448384n^3 - 10104768n^2 - 1517358n + 191079)f_n \\ &\quad + 256(n+1)(4096n^4 + 18848n^3 + 31232n^2 + 22362n + 5879)(4n-1)^2 n^2 f_{n-1} \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$p_1 = 0, \quad p_1 = -12, \quad p_2 = 8596 \quad \text{и} \quad q_0 = 1, \quad q_1 = 90, \quad q_2 = 62916.$$

2. В работе [6] Ривоаль предложил альтернативный метод для получения рациональных приближений значений $\gamma + \ln(x)$, $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$. Для этой цели Ривоаль использовал обобщенные многочлены Лагерра

$$A_n(x) = \frac{1}{n!^2} e^x (x^n (x^n e^{-x})^{(n)})^{(n)},$$

являющиеся совместно ортогональными многочленами на $[0, +\infty)$ относительно весовых функций $w_1(x) = e^{-x}$ и $w_2(x) = e^{-x} \ln(x)$. Построенные им приближения имеют вид

$$\begin{aligned} &(n+1)^2 \int_0^\infty \frac{A_{n+1}(x)A_n(t) - A_n(x)A_{n+1}(t)}{t-x} (\ln(t) - \ln(x)) e^{-t} dt \\ &= Q_n(x)(\ln(x) + \gamma) - P_n(x), \end{aligned} \tag{6}$$

где $n!^2 P_n(x), n!^2 Q_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P_n, Q_n \leq n + 1$,

$$Q_n(x) = O(\exp(3x^{1/3}n^{2/3} - x^{2/3}n^{1/3})),$$

и

$$\left| \ln(x) + \gamma - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| = O(\exp(-9/2x^{1/3}n^{2/3} + 3/2x^{2/3}n^{1/3})).$$

В [6] Ривоаль высказал предположение, что для знаменателей $Q_n(x)$ имеет место более строгое включение.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Для любого целого $n \geq 0$ $n! Q_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Аналогичное предположение было высказано в [6] для последовательности b_n , представляющей общие знаменатели совместных приближений чисел γ и $\zeta(2) - \gamma^2$ по формулам

$$(n+1)^3 \int_0^\infty \frac{\tilde{A}_n(t)\tilde{A}_{n+1}(1) - \tilde{A}_{n+1}(t)\tilde{A}_n(1)}{1-t} \ln(t) e^{-t} dt = a_{1,n} - b_n \gamma, \quad (7)$$

$$(n+1)^3 \int_0^\infty \frac{\tilde{A}_n(t)\tilde{A}_{n+1}(1) - \tilde{A}_{n+1}(t)\tilde{A}_n(1)}{1-t} (\ln^2(t) + 2\gamma \ln(t)) e^{-t} dt = b_n(\zeta(2) - \gamma^2) - a_{2,n}, \quad (8)$$

где

$$\tilde{A}_n(x) = \frac{1}{n!^3} e^x (x^n (x^n (x^n e^{-x})^{(n)})^{(n)})^{(n)}$$

и $a_{1,n}, a_{2,n}, b_n \in \mathbb{Z}/((3n)!(3n+2)!)$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Для любого целого $n \geq 0$ $n!^2 b_n \in \mathbb{Z}$.

В настоящей статье мы доказываем более общее утверждение, из которого следуют оба предположения Ривоалья, а также более точные оценки для знаменателей рассматриваемых последовательностей.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $(A_{s,n})_{n \geq 0}$ — последовательность обобщенных многочленов Лагерра, заданная рекурсивно:

$$A_{0,n}(x) \equiv 1, \quad A_{r+1,n}(x) = \frac{1}{n!} e^x (x^n e^{-x} A_{r,n}(x))^{(n)}, \quad r \geq 0.$$

Тогда для интегралов

$$J_{s,n}(x) := (n+1)^s \int_0^\infty \frac{A_{s,n+1}(x)A_{s,n}(t) - A_{s,n}(x)A_{s,n+1}(t)}{t-x} \ln(t) e^{-t} dt$$

справедливо следующее представление:

$$J_{s,n}(x) = Q_{s,n}(x)\gamma - P_{s,n}(x),$$

где

$$Q_{s,n}(x) = (n+1)^s \int_0^\infty \frac{A_{s,n+1}(t)A_{s,n}(x) - A_{s,n}(t)A_{s,n+1}(x)}{t-x} e^{-t} dt$$

и $n!^{s-1} Q_{s,n}(x), D_n n!^{s-1} P_{s,n}(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Для многочленов $Q_n(x)$, $P_n(x)$, определенных в (6), имеют место следующие включения: $n!Q_n(x)$, $D_n n!P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Для последовательностей b_n , $a_{1,n}$, $a_{2,n}$, определенных в (7), (8), имеем $n!^2 b_n$, $D_n n!^2 a_{1,n}$, $D_n^2 n!^2 a_{2,n} \in \mathbb{Z}$.

Аналогичный подход применим также к работе Ривоаля [7], где с помощью обобщенных многочленов Лагерра вида

$$\hat{A}_{n,a}(x) = \frac{1}{n!^2} e^x (x^{n-a} (x^{n+a} e^{-x})^{(n)})^{(n)}$$

были получены рациональные приближения для числа $\Gamma(a+1)/x^a$, $a, x \in \mathbb{Q}$, $a > -1$, $x > 0$. В этой конструкции числители и знаменатели рациональных приближений определяются из разложения следующего интеграла

$$\int_0^\infty (\hat{A}_{n,a}(x)\hat{A}_{n+1,a}(t) - \hat{A}_{n+1,a}(x)\hat{A}_{n,a}(t)) \frac{x^a - t^a}{x - t} e^{-t} dt = Q_n(a, x)\Gamma(1+a) - x^a P_n(a, x), \quad (9)$$

при этом

$$\left| \frac{\Gamma(a+1)}{x^a} - \frac{P_n(a, x)}{Q_n(a, x)} \right| = O(e^{-9/2x^{1/3}n^{2/3} + 3/2x^{2/3}n^{1/3}}), \quad n \rightarrow \infty,$$

и

$$n!^2(n+1)!^2(\text{den } a)^{2n+1}(\text{den } x)^{4n-1}P_n(a, x) \in \mathbb{Z},$$

$$n!^2(n+1)!^2(\text{den } a)^{3n+2}(\text{den } x)^{4n-1}Q_n(a, x) \in \mathbb{Z},$$

где $\text{den } \alpha \in \mathbb{N}$ обозначает знаменатель несократимой дроби α . В данной ситуации также возможно существенно уточнить оценки знаменателей $Q_n(a, x)$ и $P_n(a, x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При $a, x \in \mathbb{Q}$, $a > -1$, $x > 0$ справедливы следующие включения:

$$(\text{den } x)^{n+1} \mu_a^{2n+1} P_n(a, x), (\text{den } x)^{n+1} \mu_a^{3n+1} Q_n(a, x) \in \frac{1}{(n+1)^2 n!} \mathbb{Z},$$

где

$$\mu_a^n = (\text{den } a)^n \cdot \prod_{p|\text{den } a} p^{[n/(p-1)]}.$$

2. Вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $a > -1$. Справедливы следующие равенства:

$$(i) \quad \int_0^\infty x^a e^{-bx} dx = \frac{\Gamma(a+1)}{b^{a+1}},$$

$$(ii) \quad \int_0^\infty x^a e^{-bx} \ln(x) dx = \frac{\Gamma(a+1)}{b^{a+1}} (\psi(a+1) - \ln b),$$

$$(iii) \quad \int_0^\infty x^a e^{-x} \ln(x)^2 dx = \Gamma(a+1) (\psi^2(a+1) + \psi'(a+1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (i) непосредственно следует из определения гамма-функции Эйлера. Дифференцируя (i) по параметру a , получим (ii). Полагая в (ii) $b = 1$ и дифференцируя по a , получим (iii).

ЛЕММА 2 (см. [8; § 2.8]). Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, c отлично от отрицательных целых чисел и нуля, и $c - a$ отлично от чисел $0, -1, -2, \dots, -n + 1$. Тогда

$$(i) \quad \frac{d^n}{dz^n} [z^{c-a+n-1} (1-z)^{a+b-c} F(a, b; c; z)] \\ = (c-a)_n z^{c-a-1} (1-z)^{a+b-c-n} F(a-n, b; c; z).$$

В частности, при $a = 0$ имеем

$$\frac{d^n}{dz^n} [z^{n+c-1} (1-z)^{b-c}] = (c)_n z^{c-1} (1-z)^{b-c-n} F(-n, b; c; z).$$

(ii) Если и $c - b$ отлично от чисел $0, -1, -2, \dots, -n + 1$, то

$$\frac{d^n}{dz^n} [(1-z)^{a+b-c} F(a, b; c; z)] = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n} (1-z)^{a+b-c-n} F(a, b; c+n; z).$$

3. Рациональные приближения для $\ln(b) - \psi(a+1)$. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $a > -1$. Для целого $n \geq 0$ определим интеграл

$$E_n = E_n^{(a,b)} = \frac{b^{2n+a+1}}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty Q_n^{(a,b)}(x) x^a e^{-bx} \ln(x) dx. \quad (10)$$

ЛЕММА 3. Для любого целого $n \geq 0$ справедливо следующее представление:

$$E_n = q_n(\psi(a+1) - \ln b) + p_n,$$

где последовательности p_n и q_n определены в теореме 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 0$ имеем $Q_0^{(a,b)} \equiv 1$, и $E_0 = \psi(a+1) - \ln(b)$. Пусть $n \geq 1$. Из равенств (1) и (10) с помощью последовательного интегрирования по частям получаем

$$E_n = \frac{(-1)^n}{n!^2} \frac{b^{2n+a+1}}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty \left(\frac{\ln(x)}{1-x} \right)^{(n)} x^n (x^{n+a} (1-x)^{2n+1} e^{-bx})^{(n)} dx. \quad (11)$$

Вычисляя n -ю производную функции $\ln(x)/(1-x)$ по правилу Лейбница, находим

$$\left(\frac{\ln(x)}{1-x} \right)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\ln(x))^{(k)} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(n-k)} = \frac{n! \ln(x)}{(1-x)^{n+1}} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k n!}{k x^k (1-x)^{n-k+1}}.$$

Подставляя найденное выражение в (11) и интегрируя по частям, находим

$$E_n = \frac{b^{2n+a+1}}{\Gamma(a+1)n!} \int_0^\infty \left[\left(\frac{x^n \ln x}{(1-x)^{n+1}} \right)^{(n)} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{x^{n-k}}{(1-x)^{n-k+1}} \right)^{(n)} \right] \\ \times x^{n+a} (1-x)^{2n+1} e^{-bx} dx. \quad (12)$$

Применяя правило Лейбница и лемму 2, вычислим n -е производные в формуле (12). Имеем

$$\left(\frac{x^n \ln(x)}{(1-x)^{n+1}} \right)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\ln(x))^{(k)} \left(\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}} \right)^{(n-k)}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(x) \left(\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}} \right)^{(n)} - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k (k-1)!}{x^k} \left(\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}} \right)^{(n-k)} \\
&= \frac{n! \ln(x)}{(1-x)^{2n+1}} F(-n, -n; 1; x) \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k n!}{k(1-x)^{2n+1-k}} F(k-n, k-n; k+1; x).
\end{aligned}$$

Аналогично, по лемме 2 находим

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^{n-k}}{(1-x)^{n-k+1}} \right)^{(n)} &= (n-k)! ((1-x)^{2k-2n-1} F(k-n, k-n; 1; x))^{(k)} \\
&= n! \binom{n}{k} (1-x)^{k-2n-1} F(k-n, k-n; k+1; x).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{b^{2n+a+1}}{\Gamma(a+1)} \left[\int_0^\infty x^{n+a} e^{-bx} \ln(x) F(-n, -n; 1; x) dx \right. \\
&\quad \left. - 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \binom{n}{k} \int_0^\infty x^{n+a} (1-x)^k e^{-bx} F(k-n, k-n; k+1; x) dx \right].
\end{aligned} \tag{13}$$

Интегралы в (13) могут быть явно вычислены по лемме 1. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^{n+a} e^{-bx} \ln(x) F(-n, -n; 1; x) dx \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \int_0^\infty x^{n+k+a} e^{-bx} \ln(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \frac{\Gamma(n+k+a+1)}{b^{n+k+a+1}} (\psi(n+k+a+1) - \ln(b)).
\end{aligned} \tag{14}$$

Для второго интеграла имеем

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^{n+a} (1-x)^k e^{-bx} F(k-n, k-n; k+1; x) dx \\
&= \sum_{m=0}^k \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^m \binom{k}{m} \frac{(k-n)_l^2}{l! (k+1)_l} \int_0^\infty x^{n+a+m+l} e^{-bx} dx \\
&= \binom{n}{k}^{-1} \sum_{m=0}^k \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^m \binom{k}{m} \binom{n-k}{l} \binom{n}{k+l} \frac{\Gamma(m+n+l+a+1)}{b^{m+n+l+a+1}}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Наконец, из (13)–(15) и функционального соотношения для дигамма-функции

$$\psi(z+n) = \psi(z) + H_n(z-1)$$

получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 4. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a > -1$, $b > 0$. Тогда для любого целого $n \geq 0$ имеем

$$E_n = \frac{b^{2n+a+1}}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^{n+a} y^n (x-1)^{2n+1} e^{-bx}}{(xy+1)^{n+1} (y+1)^{n+1}} dx dy. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставив выражение (1) в (10), получим

$$E_n = \frac{b^{2n+a+1}}{\Gamma(a+1)n!^2} \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{1-x} (x^n (x^{n+a}(1-x)^{2n+1} e^{-bx})^{(n)})^{(n)} dx.$$

Воспользуемся представлением

$$\frac{\ln(x)}{1-x} = - \int_0^\infty \frac{du}{(1+u)(1+ux)}$$

и осуществим n -кратное интегрирование по частям; получим

$$E_n = - \frac{b^{2n+a+1}}{\Gamma(a+1)n!} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^n u^n}{(1+u)(1+ux)^{n+1}} (x^{n+a}(1-x)^{2n+1} e^{-bx})^{(n)} dx du.$$

Сделаем замену переменной u по формуле $u = 1/(xy)$ или $y = 1/(xu)$, имеем

$$E_n = - \frac{b^{2n+a+1}}{\Gamma(a+1)n!} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(x^{n+a}(1-x)^{2n+1} e^{-bx})^{(n)}}{(xy+1)(y+1)^{n+1}} dx dy.$$

Снова интегрируя по частям, получим

$$E_n = - \frac{b^{2n+a+1}}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^{n+a} y^n (1-x)^{2n+1} e^{-bx}}{(y+1)^{n+1} (xy+1)^{n+1}} dx dy,$$

и лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Применяя к последовательности интегралов $E_n^{(a,b)}$ алгоритм Multi-AlmkvistZeilberger (теоретическое обоснование которого можно найти в [5]), нетрудно получить, что последовательность $E_n^{(a,b)}$ удовлетворяет рекуррентному уравнению третьего порядка с полиномиальными коэффициентами. С помощью алгоритма ЕКНАД можно показать, что последовательность $q_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (a+1)_{n+k} b^{n-k}$ удовлетворяет тому же рекуррентному уравнению, и следовательно, по линейности последовательность p_n также является решением того же уравнения. Мы не выписываем это уравнение в общем виде в силу громоздкости его коэффициентов. Однако, при конкретных значениях a и b это легко можно сделать (см., например, замечания к следствиям 1, 3, 4).

ЛЕММА 5. Справедливы асимптотические формулы

$$q_n = (2n)! \frac{e^{\sqrt{2bn}}}{n^{1/4-a}} (c(a,b) + O(n^{-1/2})), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$E_n = (2n)! \frac{e^{-\sqrt{2bn}}}{n^{1/4-a}} (2\pi c(a,b) + O(n^{-1/2})), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $c(a,b) = 2^a / (\sqrt{\pi} \Gamma(a+1) e^{3b/8} (8b)^{1/4})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Асимптотику последовательности q_n найдем, следуя методу работы [9]. Используя лемму 1 и проведя последовательное интегрирование по частям, находим

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{b^{2n+a+1}}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty Q_n^{(a,b)}(x) x^a e^{-bx} dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \frac{b^{2n+a+1}}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty x^{n+a} (x-1)^{2n+1} e^{-bx} \left(\frac{x^n}{(x-1)^{n+1}} \right)^{(n)} dx. \end{aligned}$$

Далее дословно повторяя рассуждения из [9; с. 56–59], получим

$$q_n = \frac{b^{2n+a+1} n^{2n+a+3/4}}{2\sqrt{\pi} \Gamma(a+1)} \int_0^\infty e^{n\varphi_1(y)} \psi_1(y) dy (1 + O(n^{-1/2})), \quad (17)$$

где

$$\varphi_1(y) = 2 \ln \left(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \ln y - by, \quad \psi_1(y) = \left(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) y^{a-1/4}.$$

Функция $\varphi_1(y)$ достигает глобального максимума на полуоси $(0, +\infty)$ в точке $y_0 = 2/b - 1/\sqrt{2bn} + 3/(8n) + O(n^{-3/2})$. При этом имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1(y_0) &= 2 \ln \frac{2}{b} - 2 + \sqrt{\frac{2b}{n}} - \frac{3b}{8n} + O(n^{-3/2}), \\ \varphi_1''(y_0) &= -\frac{b^2}{2} + O(n^{-1/2}), \\ \psi_1(y_0) &= \left(\frac{2}{b} \right)^{a+1/4} + O(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Применяя метод перевала к интегралу (17), получим асимптотическую формулу

$$q_n = \frac{(2n)^{2n+a+1/4}}{\Gamma(a+1)b^{1/4}} e^{-2n+\sqrt{2bn}-3b/8} (1 + O(n^{-1/2})) = (2n)! \frac{e^{\sqrt{2bn}}}{n^{1/4-a}} (c(a,b) + O(n^{-1/2})).$$

Асимптотику остатков приближений E_n найдем, используя лемму 4 и метод Лапласа для кратных интегралов (см. [10; § 4]). Сделаем в интеграле (16) замену переменных $x = nu$, $y = v/\sqrt{nu}$; получим

$$E_n = \frac{b^{2n+a+1} n^{3n+a+2}}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty \int_0^\infty g(u,v) f^n(u,v) du dv, \quad (18)$$

где

$$f(u,v) = \frac{uv(u-1/n)^2 e^{-bu}}{(v+\sqrt{nu})(v\sqrt{nu}+1)}, \quad g(u,v) = \frac{u^a(u-1/n)}{(v+\sqrt{nu})(v\sqrt{nu}+1)}.$$

Как нетрудно видеть, функция $f(u,v)$ достигает глобального максимума в области $u > 0$, $v > 0$ в точке (u_0, v_0) , где $u_0 = 2/b + 1/\sqrt{2bn} + 3/(8n) + O(n^{-3/2})$, $v_0 = 1$. При этом имеем

$$\begin{aligned} f(u_0, v_0) &= \frac{u_0}{n^2} (\sqrt{nu_0} - 1)^2 e^{-bu_0} \\ &= \exp \left(-\ln n - 2 + 2 \ln \left(\frac{2}{b} \right) - \sqrt{\frac{2b}{n}} - \frac{3b}{8n} + O(n^{-3/2}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u_0, v_0) &= -\frac{2e^{-2}}{n}(1 + O(n^{-1/2})), & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u_0, v_0) &= -\frac{4\sqrt{2}e^{-2}}{(bn)^{3/2}}(1 + O(n^{-1/2})), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u_0, v_0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u_0, v_0) = 0, & g(u_0, v_0) &= \frac{1}{n} \left(\frac{2}{b}\right)^a (1 + O(n^{-1/2})).\end{aligned}$$

Применяя метод Лапласа к интегралу (18), получим

$$E_n = \frac{b^{2n+a+1}n^{3n+a+2}}{\Gamma(a+1)} \frac{2\pi}{n\sqrt{A}} g(u_0, v_0) f^{n+1}(u_0, v_0) (1 + O(n^{-1})),$$

где

$$A = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u_0, v_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}E_n &= \frac{2\pi(2n)^{2n+a+1/4}}{\Gamma(a+1)b^{1/4}} e^{-2n-\sqrt{2bn}-3b/8} (1 + O(n^{-1/2})) \\ &= (2n)! \frac{e^{-\sqrt{2bn}}}{n^{1/4-a}} (2\pi c(a, b) + O(n^{-1/2})).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 1 легко следует из лемм 3–5.

4. Свойства обобщенных многочленов Лагерра. Пусть $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{R}$ и $a_1, \dots, a_s > -1$, а $n_1, \dots, n_s$ — целые неотрицательные числа. Определим обобщенные многочлены Лагерра $L_s(x) = L_{(n_1, \dots, n_s)}^{(a_1, \dots, a_s)}$ рекурсивно. Положим $L_0(x) \equiv 1$ и

$$L_s(x) = \frac{x^{-a_s} e^x}{n_s!} (x^{n_s+a_s} e^{-x} L_{s-1}(x))^{(n_s)}, \quad s \geq 1. \quad (19)$$

ЛЕММА 6. Для обобщенных многочленов Лагерра имеет место представление

$$L_s(x) = \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^n \dots \sum_{k_s=0}^n \prod_{j=1}^s \binom{n_j + a_j + k_1 + \dots + k_{j-1}}{n_j - k_j} \frac{(-x)^{k_j}}{k_j!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем индукцией по s . При $s = 0$ имеем $L_0(x) \equiv 1$. При $s = 1$ получаем классические многочлены Лагерра

$$L_1(x) = L_{n_1}^{a_1}(x) = \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1 + a_1}{n_1 - k} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

Пусть $s > 1$ и предположим, что утверждение верно до $s - 1$ включительно. Тогда имеем

$$L_s(x) = \frac{x^{-a_s} e^x}{n_s!} (x^{n_s+a_s} e^{-x} L_{s-1}(x))^{(n_s)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^{-a_s} e^x}{n_s!} \left(\sum_{k_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{k_{s-1}=0}^{n_{s-1}} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{(-1)^{k_j}}{k_j!} \binom{n_j + a_j + k_1 + \cdots + k_{j-1}}{n_j - k_j} \right. \\
&\quad \left. \times x^{n_s + a_s + k_1 + \cdots + k_{s-1}} e^{-x} \right)^{(n_s)} \\
&= \frac{1}{n_s!} \sum_{k_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{k_{s-1}=0}^{n_{s-1}} \sum_{k_s=0}^{n_s} \binom{n_s}{k_s} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{(-x)^{k_j}}{k_j!} \binom{n_j + a_j + k_1 + \cdots + k_{j-1}}{n_j - k_j} \\
&\quad \times (-x)^{k_s} \frac{(n_s + a_s + \sum_{j=1}^{s-1} k_j)!}{(a_s + k_1 + \cdots + k_s)!} \\
&= \sum_{k_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{k_s=0}^{n_s} \prod_{j=1}^s \binom{n_j + a_j + k_1 + \cdots + k_{j-1}}{n_j - k_j} \frac{(-x)^{k_j}}{k_j!},
\end{aligned}$$

и лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $s, n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{R}$, $a_1, \dots, a_s > -1$, и $a_j - a_k \notin \mathbb{Z}$ при $j \neq k$. Для обобщенных многочленов Лагерра имеют место следующие соотношения ортогональности

$$\int_0^\infty t^{l+a_m} L_s(t) e^{-t} dt = 0, \quad l = 0, 1, \dots, n_m - 1, \quad m = 1, \dots, s. \quad (20)$$

Кроме того, при целом $l \geq n_m$ имеем

$$\int_0^\infty t^{l+a_m} L_s(t) e^{-t} dt = (-1)^{n_1 + \cdots + n_s} \Gamma(l + a_m + 1) \prod_{j=1}^s \binom{l + a_m - a_j}{n_j}. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как легко видеть из (19), для многочленов $L_s(x)$ справедлива формула Родрига

$$L_s(x) = e^x \prod_{j=1}^s \left[\frac{x^{-a_j}}{n_j!} \frac{d^{n_j}}{dx^{n_j}} x^{n_j + a_j} \right] e^{-x},$$

где операторы, стоящие в квадратных скобках, коммутируют между собой (см. [1; § 2.3]). Используя свойство коммутирования и n_m -кратное интегрирование по частям, легко получаем (20). Равенство (21) непосредственно следует из формулы интегрирования по частям.

Для многочленов $A_{s,n}(x) = L_{(n, \dots, n)}^{(0, \dots, 0)}(x)$, определенных в формулировке теоремы 2, имеем

ЛЕММА 8 [6; § 4.2]. Пусть $s, n \in \mathbb{N}$. Для обобщенных многочленов Лагерра $A_{s,n}$ имеют место следующие соотношения ортогональности:

$$\int_0^\infty t^l A_{s,n}(t) \ln(t)^{j-1} e^{-t} dt = 0, \quad l = 0, 1, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко следует из формулы интегрирования по частям.

ЛЕММА 9. При $s, l, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $l \geq n$ имеем

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \frac{(-1)^{sn}}{l!} \int_0^\infty t^l A_{s,n}(t) e^{-t} dt = \binom{l}{n}^s, \\
 (b) \quad & \frac{(-1)^{sn}}{l!} \int_0^\infty t^l A_{s,n}(t) \ln(t) e^{-t} dt = \binom{l}{n}^s \psi(l+1) - s \binom{l}{n}^{s-1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \binom{l}{n-k}, \\
 (c) \quad & \frac{(-1)^{sn}}{l!} \int_0^\infty t^l A_{s,n}(t) \ln^2(t) e^{-t} dt \\
 & = \binom{l}{n}^s (\psi^2(l+1) + \psi'(l+1)) \\
 & \quad - 2s \binom{l}{n}^{s-1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \binom{l}{n-k} (\psi(l+1) - H_{k-1}) \\
 & \quad + s(s-1) \binom{l}{n}^{s-2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \binom{l}{n-k} \right)^2.
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $s = 0$ многочлен $A_{0,n}(t)$ тождественно равен 1, и требуемые утверждения легко следуют из леммы 1. При $s \geq 1$ по формуле интегрирования по частям имеем

$$\begin{aligned}
 I_{s,j} &:= (-1)^{sn} \int_0^\infty t^l A_{s,n}(t) \ln(t)^{j-1} e^{-t} dt \\
 &= \frac{(-1)^{(s-1)n}}{n!} \int_0^\infty (t^l \ln(t)^{j-1})^{(n)} t^n A_{s-1,n}(t) e^{-t} dt.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Откуда, в частности, получаем $I_{s,1} = \binom{l}{n} I_{s-1,1}$, и формула (a) доказана. Для доказательства (b) вычислим n -ю производную произведения $t^l \ln(t)$ по правилу Лейбница. Имеем

$$(t^l \ln(t))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (t^l)^{(n-k)} (\ln(t))^{(k)} = n! t^{l-n} \left(\binom{l}{n} \ln(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \binom{l}{n-k} \right).$$

Следовательно, с учетом (23) и (a) находим

$$I_{s,2} = \binom{l}{n} I_{s-1,2} - I_{s-1,1} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \binom{l}{n-k},$$

откуда формула (b) легко следует индукцией по s . Для доказательства (c), аналогично, по правилу Лейбница находим

$$(t^l \ln(t)^2)^{(n)} = n! t^{l-n} \left(\binom{l}{n} \ln(t)^2 - 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \binom{l}{n-k} (\ln(t) - H_{k-1}) \right).$$

Тогда из (23) получаем

$$I_{s,3} = \binom{l}{n} I_{s-1,3} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \binom{l}{n-k} (I_{s-1,2} - H_{k-1} I_{s-1,1}),$$

и требуемое утверждение легко следует по индукции по параметру s .

Из леммы 9 легко получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 10. При $s, l, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $l \geq n$

$$(-1)^{sn} \int_0^\infty t^l A_{s,n}(t) (\ln(t)^2 + 2\gamma \ln(t)) e^{-t} dt = p_{l,n}(\zeta(2) - \gamma^2) + q_{l,n},$$

где $p_{l,n} = l! \binom{l}{n}^s$ и $(D_n^2/n!)q_{l,n} \in \mathbb{Z}$.

5. Доказательство теоремы 2. Разложим интеграл $J_{s,n}(x)$ в линейную форму от чисел 1 и γ , используя лемму 9. Для этого запишем $J_{s,n}$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{J_{s,n}(x)}{(n+1)^s} &= \int_0^\infty A_{s,n+1}(t) \frac{A_{s,n}(t) - A_{s,n}(x)}{t-x} \ln(t) e^{-t} dt \\ &\quad - \int_0^\infty A_{s,n}(t) \frac{A_{s,n+1}(t) - A_{s,n+1}(x)}{t-x} \ln(t) e^{-t} dt. \end{aligned} \quad (24)$$

По лемме 6 преобразуем частное двух многочленов; имеем

$$\begin{aligned} \frac{A_{s,n}(t) - A_{s,n}(x)}{t-x} &= \sum_{k_1=0}^n \cdots \sum_{k_s=0}^n \prod_{j=1}^s \frac{(-1)^{k_j}}{k_j!} \binom{n+k_1+\cdots+k_{j-1}}{n-k_j} \sum_{l=0}^{k_1+\cdots+k_s-1} t^l x^{k_1+\cdots+k_s-l-1}. \end{aligned}$$

Используя соотношения ортогональности (22) и лемму 9, получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty A_{s,n+1}(t) \frac{A_{s,n}(t) - A_{s,n}(x)}{t-x} \ln(t) e^{-t} dt \\ &= \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1+\cdots+k_s \geq n+2}}^n \cdots \sum_{k_s=0}^n \sum_{l=n+1}^{k_1+\cdots+k_s-1} \prod_{j=1}^s \frac{(-1)^{k_j}}{k_j!} \binom{n+k_1+\cdots+k_{j-1}}{n-k_j} x^{k_1+\cdots+k_s-l-1} \\ &\quad \times \int_0^\infty t^l A_{s,n+1}(t) \ln(t) e^{-t} dt \\ &= \pm \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1+\cdots+k_s \geq n+2}}^n \cdots \sum_{k_s=0}^n \sum_{l=n+1}^{k_1+\cdots+k_s-1} \prod_{j=1}^s \frac{(-1)^{k_j}}{k_j!} \binom{n+k_1+\cdots+k_{j-1}}{n-k_j} x^{k_1+\cdots+k_s-l-1} l! \\ &\quad \times \left(\binom{l}{n+1}^s (H_l - \gamma) - s \binom{l}{n+1}^{s-1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k} \binom{l}{n+1-k} \right) \\ &\in \frac{1}{n!^{s-1}} \left(\frac{1}{D_n} \mathbb{Z}[x] + \gamma \mathbb{Z}[x] \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогично, для второго интеграла имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty A_{s,n}(t) \frac{A_{s,n+1}(t) - A_{s,n+1}(x)}{t-x} \ln(t) e^{-t} dt \\ &= \pm \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1+\cdots+k_s \geq n+1}}^{n+1} \cdots \sum_{k_s=0}^{n+1} \sum_{l=n}^{k_1+\cdots+k_s-1} \prod_{j=1}^s \frac{(-1)^{k_j}}{k_j!} \binom{n+1+k_1+\cdots+k_{j-1}}{n+1-k_j} x^{k_1+\cdots+k_s-l-1} l! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\binom{l}{n}^s (H_l - \gamma) - s \binom{l}{n}^{s-1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \binom{l}{n-k} \right) \\ & \in \frac{1}{(n+1)^s n!^{s-1}} \left(\frac{1}{D_n} \mathbb{Z}[x] + \gamma \mathbb{Z}[x] \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Наконец, из (24)–(26) получаем

$$J_{s,n}(x) = Q_{s,n}(x)\gamma - P_{s,n}(x),$$

где $n!^{s-1}Q_{s,n}(x)$, $D_n n!^{s-1}P_{s,n}(x) \in \mathbb{Z}[x]$, и теорема доказана.

При $s = 2$ из теоремы 2 получаем следствие 5. При $s = 3$ получаем первые два включения следствия 6. Для доказательства третьего включения разложим интеграл, стоящий в левой части формулы (8), по лемме 10. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{A_{3,n}(t)A_{3,n+1}(1) - A_{3,n+1}(t)A_{3,n}(1)}{1-t} (\ln(t)^2 + 2\gamma \ln(t)) e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty A_{3,n}(t) \frac{A_{3,n+1}(1) - A_{3,n+1}(t)}{1-t} (\ln(t)^2 + 2\gamma \ln(t)) e^{-t} dt \\ & \quad - \int_0^\infty A_{3,n+1}(t) \frac{A_{3,n}(1) - A_{3,n}(t)}{1-t} (\ln(t)^2 + 2\gamma \ln(t)) e^{-t} dt \\ &= \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1+k_2+k_3 \geq n+1}}^{n+1} \sum_{k_2=0}^{n+1} \sum_{k_3=0}^{n+1} \prod_{j=1}^3 \frac{(-1)^{k_j}}{k_j!} \binom{n+1+k_1+\dots+k_{j-1}}{n+1-k_j} \\ & \quad \times \sum_{l=n}^{k_1+k_2+k_3-1} \int_0^\infty t^l A_{3,n}(t) (\ln(t)^2 + 2\gamma \ln(t)) e^{-t} dt \\ & \quad - \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1+k_2+k_3 \geq n+2}}^n \sum_{k_2=0}^n \sum_{k_3=0}^n \prod_{j=1}^3 \frac{(-1)^{k_j}}{k_j!} \binom{n+k_1+\dots+k_{j-1}}{n-k_j} \\ & \quad \times \sum_{l=n+1}^{k_1+k_2+k_3-1} \int_0^\infty t^l A_{3,n+1}(t) (\ln(t)^2 + 2\gamma \ln(t)) e^{-t} dt \\ &= \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1+k_2+k_3 \geq n+1}}^{n+1} \sum_{k_2=0}^{n+1} \sum_{k_3=0}^{n+1} \prod_{j=1}^3 \frac{(-1)^{k_j+n}}{k_j!} \binom{n+1+k_1+\dots+k_{j-1}}{n+1-k_j} \\ & \quad \times \sum_{l=n}^{k_1+k_2+k_3-1} (p_{l,n}(\zeta(2) - \gamma^2) + q_{l,n}) \\ & \quad - \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1+k_2+k_3 \geq n+2}}^n \sum_{k_2=0}^n \sum_{k_3=0}^n \prod_{j=1}^3 \frac{(-1)^{k_j+n}}{k_j!} \binom{n+k_1+\dots+k_{j-1}}{n-k_j} \\ & \quad \times \sum_{l=n+1}^{k_1+k_2+k_3-1} (p_{l,n+1}(\zeta(2) - \gamma^2) + q_{l,n+1}) \end{aligned}$$

$$\in \frac{1}{(n+1)^3 n!^2} \left(\frac{1}{D_n^2} \mathbb{Z} + (\zeta(2) - \gamma^2) \mathbb{Z} \right),$$

и следствие 6 полностью доказано.

6. Доказательство предложения 1. Из равенства (9) легко следует, что

$$Q_n(a, x) = \frac{1}{\Gamma(a+1)} \int_0^{+\infty} \frac{\hat{A}_{n,a}(x) \hat{A}_{n+1,a}(t) - \hat{A}_{n+1,a}(x) \hat{A}_{n,a}(t)}{t-x} t^a e^{-t} dt$$

и

$$P_n(a, x) = \int_0^{+\infty} \frac{\hat{A}_{n,a}(x) \hat{A}_{n+1,a}(t) - \hat{A}_{n+1,a}(x) \hat{A}_{n,a}(t)}{t-x} e^{-t} dt.$$

Перепишем многочлен $Q_n(a, x)$ в виде

$$\begin{aligned} Q_n(a, x) &= \frac{1}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty \hat{A}_{n,a}(t) \frac{\hat{A}_{n+1,a}(x) - \hat{A}_{n+1,a}(t)}{x-t} t^a e^{-t} dt \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty \hat{A}_{n+1,a}(t) \frac{\hat{A}_{n,a}(x) - \hat{A}_{n,a}(t)}{x-t} t^a e^{-t} dt = J_2 - J_1. \end{aligned}$$

Так как

$$\hat{A}_{n,a}(t) = L_{(n,n)}^{(a,0)}(t) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{n+a}{n-k} \binom{n+k}{n-j} \frac{(-x)^{k+j}}{k!j!},$$

то применяя к интегралу J_1 лемму 7, имеем

$$J_1 = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{\substack{l=n+1 \\ k+j \geq n+2}}^{k+j-1} \binom{n+a}{n-k} \binom{n+k}{n-j} \binom{l}{n+1} \binom{l+a}{n+1} \frac{(-1)^{k+j}}{k!j!} (a+1)_l x^{k+j-1-l}.$$

Следовательно, J_1 является многочленом от x степени, не превосходящей $n-2$. Более того, используя хорошо известное свойство биномиальных коэффициентов (см., например, [12; лемма 4.1])

$$\mu_a^n \cdot \frac{(a)_n}{n!} \in \mathbb{Z},$$

получаем $n!(\operatorname{den} x)^{n-2} \mu_a^{3n} J_1 \in \mathbb{Z}$. Аналогично, для интеграла J_2 имеем

$$J_2 = \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{l=n}^{k+j-1} \binom{n+1+a}{n+1-k} \binom{n+1+k}{n+1-j} \binom{l}{n} \binom{l+a}{n} \frac{(-1)^{k+j}}{k!j!} (a+1)_l x^{k+j-l-1}.$$

Откуда следует, что $(n+1) \cdot (n+1)! (\operatorname{den} x)^{n+1} \mu_a^{3n+1} J_2 \in \mathbb{Z}$, и требуемое включение для многочленов $Q_n(a, x)$ доказано.

Аналогичным образом, раскладывая интеграл, определяющий многочлен $P_n(a, x)$, имеем $P_n(a, x) = J_4 - J_3$, где

$$J_3 = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{\substack{l=n+1 \\ k+j \geq n+2}}^{k+j-1} \binom{n+a}{n-k} \binom{n+k}{n-j} \binom{l-a}{n+1} \binom{l}{n+1} \frac{(-1)^{k+j} l!}{k!j!} x^{k+j-l-1},$$

$$J_4 = \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{l=n}^{k+j-1} \binom{n+1+a}{n+1-k} \binom{n+1+k}{n+1-j} \binom{l-a}{n} \binom{l}{n} \frac{(-1)^{k+j} l!}{k! j!} x^{k+j-l-1}.$$

Откуда следует, что

$$n! (\operatorname{den} x)^{n-2} \mu_a^{2n+1} J_3, (n+1)^2 n! (\operatorname{den} x)^{n+1} \mu_a^{2n+1} J_4 \in \mathbb{Z},$$

и предложение доказано.

7. Заключительные замечания. В заключение, сравнивая обе конструкции Аптекарева и Ривоаля, задающие рациональные приближения константы Эйлера

$$\frac{p_n}{q_n} - \gamma = O(e^{-2\sqrt{2n}}) \quad \text{или} \quad \frac{D_n}{n!} p_n - \gamma \frac{D_n}{n!} q_n = O(4^n n^{n-1/4} e^{-\sqrt{2n}}), \quad (27)$$

и

$$\left| \gamma - \frac{P_n}{Q_n} \right| = O(e^{-9/2n^{2/3} + 3/2n^{1/3}}) \quad (28)$$

$$\text{или} \quad |\gamma D_n n! Q_n - D_n n! P_n| = O(n^{n+1/2} e^{-3/2n^{2/3} + 1/2n^{1/3}}),$$

где p_n, q_n определены в (5), а $P_n = P_n(1)$, $Q_n = Q_n(1)$ (см. (6)), заметим, что конструкция Ривоаля (28) несколько “ближе” к диофантовым приближениям в том смысле, что линейные формы в (27) и (28) имеют целые коэффициенты, и формы в (28) растут медленнее, чем формы в (27). С другой стороны, знаменатели в (27) выражаются в достаточно компактной форме $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (n+k)!$ и по своему виду напоминают числа Аперы

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}, \quad B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2,$$

которые являются знаменателями диофантовых приближений чисел $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$ и удовлетворяют рекуррентным уравнениям второго порядка с полиномиальными коэффициентами. Поэтому было бы интересно, с одной стороны, найти рациональные приближения константы Эйлера, задаваемые рекуррентным уравнением второго порядка, с другой – попытаться улучшить скорость сходимости рациональных приближений, т.е. найти последовательность рациональных дробей $\tilde{p}_n/\tilde{q}_n$, сходящихся к γ геометрически.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials for classical weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:10 (2003), 3887–3914.
- [2] *Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения*, Сборник статей, Совр. пробл. матем., **9**, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007.
- [3] Д. Н. Туляков, “Система рекуррентных соотношений для рациональных аппроксимаций постоянной Эйлера”, *Матем. заметки*, **85**:5 (2009), 782–787.
- [4] M. Petkovšek, H. Wilf, D. Zeilberger, $A = B$, A. K. Peters, Wellesley, MA, 1996.
- [5] M. Apagodu, D. Zeilberger, “Multi-variable Zeilberger and Almkvist–Zeilberger algorithms and the sharpening of Wilf–Zeilberger theory”, *Adv. in Appl. Math.*, **37**:2 (2006), 139–152.

- [6] T. Rivoal, “Rational approximations for values of derivatives of the Gamma function”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361**:11 (2009), 6115–6149.
- [7] T. Rivoal, “Approximations rationnelles des valeurs de la fonction gamma aux rationnels”, *J. Number Theory*, **130**:4 (2010), 944–955.
- [8] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1965.
- [9] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, “Асимптотика γ -форм, генерируемых совместно ортогональными многочленами”, *Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения*, Сборник статей, Совр. пробл. матем., **9**, МИАН, М., 2007, 55–62.
- [10] М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1987.
- [11] M. Prévost, “A new proof of the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ using Padé approximants”, *J. Comput. Appl. Math.*, **67**:2 (1996), 219–235.
- [12] G. V. Chudnovsky, “On the method of Thue–Siegel”, *Ann. of Math. (2)*, **117**:2 (1983), 325–382.

Т. Хессами Пилеруд

Shahrekord University, Iran

E-mail: hessamit@ipm.ir, hessamit@gmail.com

Поступило

06.01.2010

Х. Хессами Пилеруд

Shahrekord University, Iran

E-mail: hessamik@gmail.com