Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Самко, С. М. Умархаджиев, О регуляризации одного многомерного интегрального уравнения в пространствах Лебега с переменным показателем, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 4, 575–585

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8786>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:26:08

О регуляризации одного многомерного интегрального уравнения в пространствах Лебега с переменным показателем

С. Г. Самко, С. М. Умархаджиев

Многомерное интегральное уравнение первого рода с ядром типа потенциала малого порядка в пространствах суммируемых функций переменного порядка сводится к уравнению второго рода.

Библиография: 28 названий.

DOI: 10.4213/mzm8786

1. Введение

Рассматривается многомерное интегральное уравнение первого рода

$$\mathbf{M}^\alpha \varphi := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c(x, y)}{|x - y|^{n-\alpha}} \varphi(y) dy = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

где $0 < \alpha < 1$, функция $c(x, y)$ предполагается удовлетворяющей следующим условиям:

1) выполнено

$$c(x, y) \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \quad c(x, x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^n} |c(x, x)| > 0; \quad (1.2)$$

2) $c(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера по первой переменной (в $\mathbb{R}^n$, компактифицированном одной бесконечно удаленной точкой) равномерно по второй, т.е.

$$|c(x, y) - c(z, y)| \leq \frac{C|x - z|^\lambda}{(1 + |x|)^\lambda(1 + |z|)^\lambda}, \quad \alpha < \lambda \leq 1, \quad (1.3)$$

где $C > 0$ не зависит от x, y, z ;

(заметим, что из (1.2), (1.3) следует, что $c(x, y) \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$).

Известно (см. [1], [2], [3; гл. 10]), что гиперсингулярный оператор

$$\mathbf{R}f = \frac{\mu}{c(x, x)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(x - y)}{|y|^{n+\alpha}} dy, \quad (1.4)$$

где

$$\mu = \frac{\alpha}{2\pi^{n+1}} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)$$

и предел понимается в смысле сильной сходимости в $L^p(\mathbb{R}^n)$, является регуляризатором для уравнения (1.1) в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$, т.е.

$$\mathbf{R}\mathbf{M}^\alpha \varphi = \varphi + \mathbf{A}\varphi, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{A}$ – оператор, компактный в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < n/\alpha$.

Регуляризация вида (1.5) уравнения (1.1) в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$ доказана в [2] также в случае $1 \leq \alpha < n$. Этот случай требует привлечения гиперсингулярных интегралов высших порядков; см. [3] о гиперсингулярных интегралах произвольного порядка.

В этой заметке в случае $0 < \alpha < 1$ мы распространяем указанный результат о регуляризации на случай пространств Лебега $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с переменным показателем, пользуясь недавним прогрессом в теории таких пространств; подобное обобщение в случае $1 \leq \alpha < n$ требует преодоления существенно больших технических трудностей и не затрагивается в этой заметке.

Первой работой, специально посвященной пространствам Лебега $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ с переменным показателем, была работа [4] (в одномерном случае), дальнейшее развитие, включая многомерный случай, было дано в [5]. Обобщенные пространства Лебега $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ с переменным показателем оказались удобным аппаратом в исследовании моделей с так называемым нестандартным ростом (например, в теории упругости, в гидромеханике, теории дифференциальных уравнений, в частности, уравнений с $p(x)$ -лапласианом, вариационных задачах, см., например, работы [6]–[8]).

Эти приложения стимулировали быстрый прогресс в теории пространств $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, сошлемся на обзоры [9]–[12], где можно найти дальнейшие ссылки.

Хотя пространства $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ обладают рядом нежелательных свойств (пространства $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ не инвариантны относительно сдвига, функции в этих пространствах не являются $p(x)$ -непрерывными в среднем, теорема Юнга для сверток не имеет места), имеется существенный прогресс в их исследовании и в построении гармонического анализа в этих пространствах, стимулированный указанными выше приложениями. Этот прогресс стал возможен для непрерывных показателей $p(x)$, удовлетворяющих логарифмическому условию Дини.

Наибольший прогресс в развитии гармонического анализа и теории операторов в пространствах $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, использующий ограниченность максимального оператора, достигнут при условиях (2.5) и (2.6) (плюс условие (2.7) в случае неограниченных множеств Ω).

В разделе 2 мы даем необходимые сведения о пространствах Лебега $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ с переменным показателем и некоторые вспомогательные утверждения. Раздел 3 содержит формулировку основного результата. В разделе 4 дается оценка ядра интегрального оператора $\mathbf{A}$ в (1.5) в связи с тем, что известная из [3; гл. 10] оценка этого ядра недостаточна для работы в пространстве с переменным показателем. С помощью этой оценки в разделе 5 доказывается основное утверждение заметки.

Через $C, c, c_1, \dots$ будем обозначать абсолютные положительные постоянные, которые могут принимать разные значения даже в одной строке.

2. Вспомогательные сведения

2.1. О пространствах Лебега с переменным показателем. Приведем определения и некоторые основные факты для пространств $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, отсылая за подробностями к работам [13], [5], [14]. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $p: \Omega \rightarrow [1, \infty)$ – измеримая на Ω функция и

$$p_- = \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} p(x), \quad p_+ = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} p(x).$$

Через $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ обозначается множество всех измеримых на Ω функций f , для которых конечен модуляр

$$I^p(f) := \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty.$$

При условии $1 \leq p(x) \leq p_+ < \infty$ на Ω это банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}. \quad (2.1)$$

Весовое пространство $L^{p(\cdot)}(\Omega, \varrho)$ вводится обычным образом:

$$L^{p(\cdot)}(\Omega, \varrho) = \{f : \varrho f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)\}, \quad \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega, \varrho)} = \|\varrho f\|_{p(\cdot)}.$$

Через $p'(x)$ обозначаем сопряженный показатель: $1/p(x) + 1/p'(x) = 1$. Неравенство Гёльдера имеет место в виде

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \right| \leq k \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)}, \quad k = \frac{1}{p_-} + \frac{1}{p'_-}. \quad (2.2)$$

Известно, что при условии $1 \leq p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty$ модулярная ограниченность (сходимость) эквивалентна ограниченности (сходимости) по норме:

$$c_1 \leq \|f\|_{p(\cdot)} \leq c_2 \quad \implies \quad c_3 \leq I^p(f) \leq c_4, \quad (2.3)$$

$$C_1 \leq I^p(f) \leq C_2 \quad \implies \quad C_3 \leq \|f\|_{p(\cdot)} \leq C_4, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} c_3 &= \min(c_1^{p_-}, c_1^{p_+}), & c_4 &= \max(c_2^{p_-}, c_2^{p_+}), \\ C_3 &= \min(C_1^{1/p_-}, C_1^{1/p_+}), & C_4 &= \max(C_2^{1/p_-}, C_2^{1/p_+}). \end{aligned}$$

Ниже будет предполагаться выполненным условие

$$1 < p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty, \quad x \in \Omega. \quad (2.5)$$

Хорошо известно, что в теории пространств $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ важную роль играет условие

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{\ln(1/|x - y|)} \quad \text{для всех } x, y \in \Omega, \quad |x - y| \leq \frac{1}{2}, \quad (2.6)$$

где C не зависит от x и y , известное как *локальное log-условие* или *слабое условие Липшица* или *Дини-Липшица*, и – в случае, когда множество Ω неограничено, –

также условие выхода $p(x)$ на константу: существует постоянная p_∞ , обозначаемая также через $p(\infty)$, такая, что

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{C}{\ln(2 + |x|)}, \quad x \in \Omega. \quad (2.7)$$

Через $\mathcal{P}(\Omega)$ обозначаем множество измеримых функций $p: \Omega \rightarrow [1, \infty)$, удовлетворяющих условию (2.5) и (если Ω неограничена) условию (2.7), а через $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ – множество функций $p: \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$, удовлетворяющих условиям (2.5), (2.6) и (если Ω неограничена) условию (2.7). Очевидно, $\mathbb{P}(\Omega) \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

2.2. Об интерполяции компактности в случае переменного $p(x)$. В 1960 г. Красносельским [15] была показана возможность “односторонней” интерполяции свойства компактности в пространствах L^p с постоянным p . Доказательство в [15] предполагало ограниченность множества Ω . Она имеет место и для неограниченных множеств и в более общей постановке интерполяции в рамках интерполяционных пар общих пространств Банаха. Результаты, полученные при различных предположениях об интерполяционных парах, см., например, [16]–[20].

Для пространств $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ интерполяционным пространством является $L^{p_\theta(\cdot)}(\Omega)$, где

$$\frac{1}{p_\theta(x)} = \frac{\theta}{p_1(x)} + \frac{1-\theta}{p_2(x)}, \quad \theta \in [0, 1]. \quad (2.8)$$

Такая односторонняя интерполяция компактности была установлена в [21] с помощью результатов работы [20] в следующем виде.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, и пусть переменные показатели $p_j: \Omega \rightarrow (1, \infty)$, $j = 1, 2$, удовлетворяют условиям (2.5)–(2.7). Пусть линейный оператор A , определенный на $L^{p_1(\cdot)}(\Omega) \cup L^{p_2(\cdot)}(\Omega)$, ограничен в пространствах $L^{p_j(\cdot)}(\Omega)$, $j = 1, 2$. Если он компактен в пространстве $L^{p_1(\cdot)}(\Omega)$, то он также компактен в пространстве $L^{p_\theta(\cdot)}(\Omega)$ для любого $\theta \in (0, 1]$.

В приложениях удобно использовать следующее утверждение, получаемое с помощью теоремы 1 (см. [22]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ и даны функция $p: \Omega \rightarrow [1, \infty)$, $p(x)$ такая, что

$$1 \leq p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty,$$

и число $p_0 \in (1, \infty)$. Тогда существует функция $q: \Omega \rightarrow [1, \infty)$ с тем же свойством

$$1 < q_- \leq q(x) \leq q_+ < \infty$$

и число $\theta \in [0, 1)$ такое, что $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ является интерполяционным пространством между $L^{p_0}(\Omega)$ и $L^{q(\cdot)}(\Omega)$, отвечающим интерполяционному параметру θ . Число θ может быть взято любым в интервале $\theta \in (0, \theta_0)$, где

$$\theta_0 = \min \left\{ 1, \frac{p_0}{p_+}, \frac{p'_0}{p'_-} \right\},$$

и тогда

$$q(x) = \frac{p_0(1-\theta)p(x)}{p_0 - \theta p(x)}.$$

Эффективность последнего утверждения для приложений очевидна: оно позволяет немедленно получать компактность в $L^{p(\cdot)}$ с переменным показателем, располагая для переменных показателей лишь ограниченностью, а компактность зная только при постоянных показателях.

3. Основное утверждение

Через

$$p^\sharp(x) = \frac{np(x)}{n - \alpha p(x)}$$

обозначаем соболевский показатель. Если $p \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$, то и $p^\sharp \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ в случае $\alpha p_+ < n$.

В следующей теореме гиперсингулярный оператор $\mathbf{R}$ трактуется как

$$\mathbf{R}f = \frac{\mu}{c(x, x)} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L^{p(\cdot)})}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(x - y)}{|y|^{n+\alpha}} dy, \quad (3.1)$$

где предел понимается в смысле сильной сходимости в $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < \alpha < 1$, функция $c(x, z)$ удовлетворяет условиям (1.2), (1.3), пусть $p \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha p_+ < n$. Тогда справедливо представление (1.5), в котором оператор $\mathbf{A}$ ограничен из пространства $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p^\sharp(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ и компактен в пространстве $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

4. Вспомогательные утверждения

4.1. Об операторе $\mathbf{A}$. Для композиции $\mathbf{R}\mathbf{M}^\alpha$ известно, что оператор $\mathbf{A}$ в представлении (1.1) имеет вид

$$(\mathbf{A}\varphi)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}(x, x - y) \varphi(y) dy, \quad (4.1)$$

где

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{\mu}{c(x, x)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c(x, y) - c(\xi, y)}{|x - \xi|^{n+\alpha} |y - \xi|^{n-\alpha}} dy. \quad (4.2)$$

Очевидно, что в случае, когда функция $c(x, y)$ удовлетворяет условию (1.3), ядро $\mathcal{K}(x, y)$ допускает оценку

$$|\mathcal{K}(x, y)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{|\xi|^{n+\alpha-\lambda} |y - \xi|^{n-\alpha} (1 + |x - \xi|)^\lambda}, \quad (4.3)$$

где интеграл сходится при $0 < \alpha < \lambda$.

4.2. Оценка ядра.

ЛЕММА 1. Пусть $0 < \alpha < n$ и $\alpha < \lambda < n + \alpha$. Тогда интеграл в (4.3) допускает оценку

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{|\xi|^{n+\alpha-\lambda} |y - \xi|^{n-\alpha} (1 + |x - \xi|)^\lambda} \leq \frac{c}{|y|^{n-\alpha}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $I(x, y)$ интеграл в левой части в (4.4). Разбиваем интегрирование в этом интеграле следующим образом:

$$I(x, y) = \int_{|\xi| < |y|/2} \frac{d\xi}{|\xi|^{n+\alpha-\lambda} |y - \xi|^{n-\alpha} (1 + |x - \xi|)^\lambda} + \int_{|\xi| > |y|/2} \frac{d\xi}{|\xi|^{n+\alpha-\lambda} |y - \xi|^{n-\alpha} (1 + |x - \xi|)^\lambda} =: B_1 + B_2.$$

Для B_1 воспользуемся тем, что $|y - \xi| \geq |y| - |\xi| \geq |y|/2$. Тогда

$$B_1 \leq \frac{C}{|y|^{n-\alpha}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{|\xi|^{n+\alpha-\lambda} (1 + |x - \xi|)^\lambda}$$

и остается воспользоваться тем, что последний интеграл ограничен как функция от x ; см., например, [3; лемма 1.38]).

Для оценки B_2 воспользуемся неравенством Гёльдера с показателем $r > 1$, который будет определен ниже. Имеем

$$B_2 \leq \left\{ \int_{|\xi| > |y|/2} \frac{d\xi}{(1 + |x - \xi|)^{\lambda r}} \right\}^{1/r} \left\{ \int_{|\xi| > |y|/2} \frac{d\xi}{|\xi|^{(n+\alpha-\lambda)r'} |y - \xi|^{(n-\alpha)r'}} \right\}^{1/r'} \\ := J_1^{1/r} J_2^{1/r'}, \quad (4.5)$$

где $1/r + 1/r' = 1$. Выберем $r > 1$ так, чтобы сходились оба интеграла J_1 и J_2 :

$$\lambda r > n, \quad (n - \alpha)r' < n, \quad (2n - \lambda)r' > n,$$

что дает

$$\max\left(0, \frac{\lambda - n}{n}\right) < \frac{1}{r} < \min\left(1, \frac{\alpha}{n}\right). \quad (4.6)$$

Этот интервал непуст при $\lambda < n + \alpha$. Считаем r выбранным согласно (4.6).

При $|y| \leq 1$ имеем $J_1 \leq \text{const}$, $x \in \mathbb{R}^n$. При $|y| > 1$ получаем

$$J_1 \leq c \int_{|\xi| > |y|/2} \frac{d\xi}{|\xi|^{\lambda r}} = c|y|^{n-\lambda r},$$

так что

$$J_1 \leq c \begin{cases} 1, & |y| \leq 1, \\ |y|^{n-\lambda r}, & |y| > 1. \end{cases} \quad (4.7)$$

В интеграле J_2 , совершив преобразование подобия $\xi = |y|\tau$, получаем

$$J_2 = c|y|^{n-(2n-\lambda)r'} \int_{|\tau| > 1/2} \frac{d\tau}{|\tau|^{(n+\alpha-\lambda)r'} |y/|y| - \tau|^{(n-\alpha)r'}}.$$

Отсюда

$$J_2 = c|y|^{n-(2n-\lambda)r'}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (4.8)$$

Тогда из (4.5) в силу оценок (4.7) и (4.8) для $x, y \in \mathbb{R}^n$ получаем

$$B_2 \leq C \begin{cases} |y|^{-n-n/r+\lambda}, & |y| \leq 1, \\ |y|^{-n}, & |y| > 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

Требуемое неравенство $B_2 \leq c|y|^{\alpha-n}$ выполнится при выборе r из условия $-n - n/r + \lambda \geq \alpha - n$, т.е. $1/r \leq (\lambda - \alpha)/n$. Такой выбор совместим с условием (4.6) при $\alpha < n$, что и доказывает лемму.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $0 < \alpha < 1$ и функция $c(x, y)$ удовлетворяет условию (1.3) с $\alpha < \lambda \leq 1$. Тогда ядро $\mathcal{K}(x, x - y)$ оператора (4.1) допускает оценку

$$|\mathcal{K}(x, x - y)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\lambda |x - y|^{n-\alpha}}. \quad (4.10)$$

Для доказательства достаточно сослаться на неравенство (4.3) и оценку (4.4).

4.3. Неравенство Харди–Стейна–Вейса с переменным $p(x)$. В [23] было доказано следующее неравенство Харди–Стейна–Вейса с переменным $p(x)$ (см. теорему А в [23]):

$$\left\| |x|^{\beta-\alpha} \int_{\Omega} \frac{f(y) dy}{|y|^\beta |x - y|^{n-\alpha}} \right\|_{p(\cdot)} \leq c \|f\|_{p(\cdot)}, \quad 0 \in \overline{\Omega}, \quad (4.11)$$

в предположении, что Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{P}(\Omega)$ и

$$0 < \alpha < n, \quad \alpha - \frac{n}{p(0)} < \beta < \frac{n}{p'(0)}.$$

В следующей лемме мы обосновываем справедливость подобного неравенства для случая $\Omega = \mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 2. Неравенство (4.11) справедливо и в случае неограниченной области Ω , если $p \in \mathbb{P}(\Omega)$ и

$$0 < \alpha < n, \quad \alpha - \frac{n}{p(0)} < \beta < \frac{n}{p'(0)}, \quad \alpha - \frac{n}{p(\infty)} < \beta < \frac{n}{p'(\infty)}. \quad (4.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что функция f неотрицательна и продолжена нулем за пределы Ω . Следуя рассуждениям в [23], имеем

$$\begin{aligned} & |x|^{\beta-\alpha} \int_{\Omega} \frac{f(y) dy}{|y|^\beta |x - y|^{n-\alpha}} \\ &= |x|^{\beta-\alpha} \int_{|y-x| \leq 2|x|} \frac{f(y) dy}{|x - y|^{n-\alpha}} + |x|^{\beta-\alpha} \int_{|y-x| \geq 2|x|} \frac{f(y) dy}{|y|^\beta |x - y|^{n-\alpha}} \\ &:= \mathcal{A}_{\alpha, \beta} f(x) + \mathcal{B}_{\alpha, \beta} f(x). \end{aligned}$$

Как показано в [23], для $\mathcal{A}_{\alpha, \beta} f(x)$ справедлива поточечная оценка

$$\mathcal{A}_{\alpha, \beta} f(x) \leq c M^\beta f(x), \quad (4.13)$$

где

$$M^\beta f = \sup_{r>0} \frac{|x|^\beta}{r^n} \int_{|y-x|<r} \frac{|f(y)|}{|y|^\beta} dy,$$

– весовая максимальная функция Харди–Литтлвуда (доказательство этого факта в [23] не использовало того факта, что Ω – ограниченное множество). Поэтому

ограниченность оператора $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ в $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ при условиях (4.12) следует из известных результатов о весовой ограниченности максимального оператора в пространствах $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, см. [24; теорема С].

Что касается оператора $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$, заметим, что из неравенства $|x - y| \geq 2|x|$ следует, что

$$|y| \geq |x - y| - |x| \geq |x - y| - \frac{|x - y|}{2} = \frac{|x - y|}{2},$$

т.е.

$$\{y : |x - y| > 2|x|\} \subset \{y : |x - y| < 2|y|\}, \quad (4.14)$$

и тогда

$$\mathcal{B}_{\alpha,\beta} f(x) \leq |x|^{\beta-\alpha} \int_{|y-x| \leq 2|y|} \frac{f(y) dy}{|y|^\beta |x - y|^{n-\alpha}} := \mathcal{B}_{\alpha,\beta} f(x),$$

так что достаточно располагать ограниченностью оператора $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$. Для последнего остается заметить, что сопряженный к $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}$ оператор есть

$$\mathcal{B}_{\alpha,\beta}^* = \mathcal{A}_{\alpha,\alpha-\beta}.$$

В силу оценки (4.13) условия ограниченности оператора $\mathcal{B}_{\alpha,\beta}^*$ в сопряженном пространстве $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ совпадают с условиями (4.12), что и доказывает лемму 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Другой вариант весового неравенства Стейна–Вейса с переменным $p(x)$ из $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в $L^{p_\alpha(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ см. в [25; теорема А].

5. Доказательство теоремы 3

Мы докажем следующую теорему, из которой утверждение теоремы 3 будет немедленно следовать.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $0 < \alpha < n$, $\lambda \geq \alpha$ и $p \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$. При условии $\alpha p_+ < n$ оператор

$$(K\varphi)(x) := \frac{1}{(1 + |x|)^\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(y) dy}{|x - y|^{n-\alpha}}$$

ограничен как оператор из $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p^\sharp(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \varrho), \quad \varrho(x) = (1 + |x|)^\lambda, \quad p^\sharp(x) = \frac{np(x)}{n - \alpha p(x)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограниченность оператора K из $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в $L^{p_\alpha(\cdot)}(\mathbb{R}^n, \varrho)$ есть тривиальное следствие из теоремы Соболева для потенциала Рисса

$$g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(y) dy}{|x - y|^{n-\alpha}}$$

для переменных показателей $p \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ и всего пространства $\mathbb{R}^n$, доказанной в [26] при условии $\alpha p_+ < n$ (см. следствие 2.12 в [26]).

Ограниченность оператора K в $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в предположениях (4.12) вытекает из леммы 2 (с $\beta = 0$). Заметим, что в случае $\lambda > \alpha$ ограниченность в $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ при условии $\alpha p_+ < n$ может быть легко получена с помощью неравенства Гёльдера,

без использования такого средства, как неравенство Харди–Стейна–Вейса. Действительно, в силу линейности оператора K и соотношений (2.3) и (2.4) достаточно показать, что

$$|I^p(K\varphi)| \leq c \quad \text{для всех } \varphi(x), \quad \|\varphi\|_{p(\cdot)} \leq 1.$$

Имеем

$$I^p(K\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [a(x)g(x)]^{p(x)} dx,$$

где $a(x) = (1 + |x|)^{-\lambda}$. Применяя неравенство Гёльдера (2.2) с переменным показателем $r(x) = p^\sharp(x)/p(x)$, $1 < r_- \leq r_+ < \infty$, получаем

$$I^p(K\varphi) \leq k \| |g(\cdot)|^{p(\cdot)} \|_{r(\cdot)} \| [a(\cdot)]^{p(\cdot)} \|_{r'(\cdot)}.$$

Ввиду соотношений (2.4) и уже упомянутой теоремы Соболева для переменных показателей имеем

$$\| |g(\cdot)|^{p(\cdot)} \|_{r(\cdot)} \leq C \quad \text{для } \|\varphi\|_{p(\cdot)} \leq 1,$$

второй же множитель $\| [a(\cdot)]^{p(\cdot)} \|_{r'(\cdot)}$ в силу тех же соотношений (2.4) есть конечная константа, так как $\lambda p(x)r'(x) = \lambda n/\alpha > n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Для справедливости самого представления (1.5) с оператором $\mathbf{A}$ вида (4.1) на функциях $\varphi \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ и при толковании оператора $\mathbf{R}$ в виде (3.1) достаточно ввиду доказываемой ниже ограниченности оператора $\mathbf{A}$ отметить, что композиция $\mathbf{RM}$ с оператором $\mathbf{R}$, интерпретируемым в виде (4.6), ограничена в $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Последнее следует из того, что оператор $\mathbf{M}$ ограничен из $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в пространство риссовых потенциалов $I^\alpha[L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)]$, что показывается точно так же, как для постоянного p в [3; гл. 10], с учетом оценок усеченных гиперсингулярных интегралов, полученных в случае пространства $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ в работах [27], [28], после чего остается воспользоваться ограниченностью $\mathbf{R}: L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \rightarrow I^\alpha[L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)]$, доказанной в [27].

Ограниченность оператора $\mathbf{A}$ следует из теоремы 4 в силу леммы 1.

Для доказательства компактности оператора $\mathbf{A}$ в пространстве $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ поступим следующим образом. Воспользовавшись теоремой 2, для рассматриваемого пространства $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ построим интерполяционную пару пространств $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ и $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, первое с постоянным показателем $p_0 = p_+$, а второе с показателем

$$q(x) = \frac{p_+(1 - \theta)p(x)}{p_+ - \theta p(x)}.$$

Так как $p_+ < n/\alpha$, то в силу результатов [2] оператор $\mathbf{A}$ компактен в $L^{p_+}(\mathbb{R}^n)$. Ограниченность оператора $\mathbf{A}$ в пространстве $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ можно получить из первой части теоремы 3. Для этого необходимо проверить выполнимость условий $q \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ и $q_+ < n/\alpha$.

- 1) Неравенства $1 < q_- \leq q(x) \leq q_+ < \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$, выполняются в силу теоремы 2.
- 2) Докажем неравенство

$$|q(x) - q(y)| \leq \frac{A}{\ln(1/|x - y|)} \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |x - y| \leq \frac{1}{2}.$$

Имеем

$$|q(x) - q(y)| = (1 - \theta) \frac{|p(x) - p(y)|}{|1 - \theta p(x)/p_+| |1 - \theta p(y)/p_+|} \leq \frac{A}{\ln(1/|x - y|)}. \quad (5.1)$$

3) Неравенство

$$|q(x) - q_\infty| \leq \frac{A}{\ln(2 + |x|)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

доказывается аналогично предыдущему.

4) Неравенство $q_+ < n/\alpha$ также проверяется непосредственно:

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{1 - \theta} \left(\frac{1}{p(x)} - \frac{\theta}{p_+} \right) \geq \frac{1}{1 - \theta} \left(\frac{1}{p_+} - \frac{\theta}{p_+} \right) = \frac{1}{p_+}.$$

Таким образом, оператор $\mathbf{A}$ компактен в пространстве $L^{p_+}(\mathbb{R}^n)$ и ограничен в пространстве $L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, по теореме 1 он компактен в интерполяционном пространстве $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. М. Умархаджиев, *Многомерные интегральные уравнения первого рода с ядром типа потенциала*, Деп. в ВИНТИ №1743-81, Ростовский гос. ун-т, 1981.
- [2] С. М. Умархаджиев, *Исследование многомерных операторов типа потенциала с непрерывными и разрывными характеристиками*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Ростовский гос. ун-т, 1982.
- [3] S. G. Samko, *Hypersingular Integrals and their Applications*, Anal. Methods Spec. Funct., **5**, Taylor & Francis, London, 2002.
- [4] И. И. Шарапудинов, "О топологии пространства $\mathcal{L}^{p(t)}([0, 1])$ ", *Матем. заметки*, **26**:4 (1979), 613–632.
- [5] O. Kováčik, J. Rákosník, "On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ ", *Czechoslovak Math. J.*, **41(116)**:4 (1991), 592–618.
- [6] L. Diening, M. Ružička, "Calderón–Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ and problems related to fluid dynamics", *J. Reine Angew. Math.*, **563** (2003), 197–220.
- [7] M. Ružička, *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*, Lecture Notes in Math., **1748**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [8] В. В. Жиков, "Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:4 (1986), 675–710.
- [9] L. Diening, P. Hästö, A. Nekvinda, "Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces", *Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis* (Bohemian-Moravian Uplands, May 28–June 2, 2004), Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republic, Prague, 2005, 38–58.
- [10] V. Kokilashvili, "On a progress in the theory of integral operators in weighted Banach function spaces", *Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis* (Bohemian-Moravian Uplands, May 28–June 2, 2004), Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republic, Prague, 2005, 152–175.
- [11] V. Kokilashvili, S. Samko, "Weighted boundedness of the maximal, singular and potential operators in variable exponent spaces", *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations*, Cambridge Sci. Publ., Cambridge, 2008, 139–164.

- [12] S. Samko, “On a progress in the theory of Lebesgue spaces with variable exponent: maximal and singular operators”, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **16**:5-6 (2005), 461–482.
- [13] X. Fan, D. Zhao, “On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$ ”, *J. Math. Anal. Appl.*, **263**:2 (2001), 424–446.
- [14] S. G. Samko, “Differentiation and integration of variable order and the spaces $L^{p(x)}$ ”, *Operator Theory and Complex and Hypercomplex Analysis* (Mexico City, December 12–17, 1994), Contemp. Math., **212**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 203–219.
- [15] М. А. Красносельский, “О теореме М. Рисса”, *ДАН СССР*, **131** (1960), 246–248.
- [16] F. Cobos, T. Kühn, T. Schonbek, “One-sided compactness results for Aronsjain–Gagliardo functors”, *J. Funct. Anal.*, **106**:2 (1992), 274–313.
- [17] M. Cwikel, “Real and complex interpolation and extrapolation of compact operators”, *Duke Math. J.*, **65**:2 (1992), 333–343.
- [18] K. Hayakawa, “Interpolation by the real method preserves compactness of operators”, *J. Math. Soc. Japan*, **21** (1969), 189–199.
- [19] J.-L. Lions, J. Peetre, “Sur une classe d’espaces d’interpolation”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **19** (1964), 5–66.
- [20] A. Persson, “Compact linear mappings between interpolation spaces”, *Ark. Mat.*, **5** (1964), 215–219.
- [21] V. Rabinovich, S. Samko, “Boundedness and Fredholmness of pseudodifferential operators in variable exponent spaces”, *Integral Equations Operator Theory*, **60**:4 (2008), 507–537.
- [22] S. Samko, “On compactness of operators in variable exponent Lebesgue spaces”, *Topics in Operator Theory*, Vol. 1, Oper. Theory Adv. Appl., **202**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010, 497–507.
- [23] S. G. Samko, “Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces”, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **6**:4 (2003), 355–362.
- [24] V. Kokilashvili, S. Samko, “The maximal operator in weighted variable exponent spaces on metric spaces”, *Georgian Math. J.*, **15**:4 (2008), 683–712.
- [25] S. Samko, E. Shargorodsky, B. Vakulov, “Weighted Sobolev theorem with variable exponent for spatial and spherical potential operators. II”, *J. Math. Anal. Appl.*, **325**:1 (2007), 745–751.
- [26] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, J. M. Martell, C. Perez, “The boundedness of classical operators on variable L^p spaces”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **31**:1 (2006), 239–264.
- [27] A. Almeida, “Inversion of the Riesz potential operator on Lebesgue spaces with variable exponent”, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **6**:3 (2003), 311–327.
- [28] A. Almeida, S. Samko, “Characterization of Riesz and Bessel potentials on variable Lebesgue spaces”, *J. Funct. Spaces Appl.*, **4**:2 (2006), 113–144.

С. Г. Самко

University of Algarve, Португалия

E-mail: ssamko@ualg.pt

Поступило

27.05.2010

Исправленный вариант

15.12.2012

С. М. Умархаджиев

Чеченский государственный университет, г. Грозный

E-mail: usmu@mail.ru