Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Юшков, Исследование разрушения решения одной системы уравнений гидродинамического типа, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 4, 613–629

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8787>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:05:55

Исследование разрушения решения одной системы уравнений гидродинамического типа

Е. В. Юшков

Проведено исследование начально-краевой задачи для трехмерной системы уравнений псевдопараболического типа. Система сходна с системой Осколкова, но отличается наличием источника произвольного порядка и нелинейностью при старшей производной по времени. В слабом обобщенном смысле доказана локальная во времени разрешимость задачи. Получены достаточные условия для глобальной во времени разрешимости. Представлены оценки времени существования решения и начальной функции, при которых имеет место разрушение решения за конечное время.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. В работе рассмотрена трехмерная начально-краевая задача со степенным источником

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \mathbf{u} - |\mathbf{u}|^{q_1} \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} + |\mathbf{u}|^{q_2} \mathbf{u} = \nabla p, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0, \quad (1.3)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, Ω – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in C^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

p – давление в жидкости, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор скорости в жидкости. Данная система имеет сходство с системой уравнений Осколкова, описывающей динамику вязко упругой жидкости Кельвина–Фойгта [1], но со степенной нелинейностью при старшей производной по времени $|\mathbf{u}|^{q_1} \mathbf{u}$ и со степенным источником вида $|\mathbf{u}|^{q_2} \mathbf{u}$. В работе [2] для схожего уравнения, но без нелинейности при старшей производной по времени и без источника, была доказана локальная во времени разрешимость и исследована глобальная разрешимость, а также условия разрушения решения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00376-а), а также Программы Президента РФ поддержки молодых докторов наук (грант № МД-99.2009.1).

Система уравнений с одной стороны является системой уравнений гидродинамического типа, поскольку содержит конвективную нелинейность и градиент давления, с другой стороны представляет систему, не разрешенную относительно старшей производной по времени, другими словами, систему псевдопараболического типа [3]. В работе используется энергетический подход к поставленному вопросу о разрушении решения, развитый в работе [4].

Введем некоторые обозначения и вспомогательные результаты, необходимые нам в дальнейшем. Более подробно они описаны в работе [2].

Обозначим $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная липшицева область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$. Через $\mathbb{L}^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, обозначим пространство определенных на Ω вещественных функций, абсолютно интегрируемых с p -й степенью по лебеговой мере $dx = dx_1 dx_2 dx_3$. Это пространство является банаховым с нормой

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Через $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ будем обозначать пространство функций, существенно ограниченных на Ω . Введем банахово пространство векторнозначных функций:

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^q(\Omega) = \mathbb{L}^q(\Omega) \times \mathbb{L}^q(\Omega) \times \mathbb{L}^q(\Omega), \quad q \in [1, +\infty],$$

где

$$|\mathbf{u}| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

Кроме того, через $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_2$ обозначим скалярное произведение в $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Обозначим через $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ пространство векторнозначных функций $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ таких, что $u_k \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $k = 1, 2, 3$. Пространство $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \sum_{i=1}^3 (D_i \mathbf{u}, D_i \mathbf{v})_2, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{+1} = \left(\sum_{j=1}^3 \|D_j \mathbf{u}\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Норму пространства $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, двойственного к гильбертовому пространству $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, обозначим через $\|\mathbf{u}\|_{-1}$. Кроме того, нам потребуется еще следующее пространство:

$$\mathbf{D}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega),$$

где $\mathcal{D}(\Omega)$ – пространство основных функций с компактным носителем, $\mathbf{u} \in \mathbf{D}(\Omega)$, когда $u_k \in \mathcal{D}(\Omega)$, $k = 1, 2, 3$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Теперь введем следующее пространство:

$$\mathbf{V}(\Omega) = (\mathbf{u} \in \mathbf{D}(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0).$$

Замыкание пространства $\mathbf{V}(\Omega)$ в пространстве $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ обозначим через $\mathbf{H}(\Omega)$, а замыкание пространства $\mathbf{V}(\Omega)$ в пространстве $\mathbf{L}^2(\Omega)$ обозначим через $\mathbf{X}(\Omega)$. Нам потребуются следующие леммы, доказательства которых можно найти в работах [2] и [5].

ЛЕММА 1. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $u_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$. Для того, чтобы

$$\mathbf{u} = \text{grad } p$$

для некоторого p из $\mathcal{D}'(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega),$$

где через $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ – обозначена скобка двойственности между пространствами $\mathbf{D}(\Omega)$ и $\mathbf{D}'(\Omega)$; здесь $\mathbf{D}'(\Omega)$ – пространство, двойственное к $\mathbf{D}(\Omega)$.

ЛЕММА 2. Если у распределения p все первые слабые производные $D_i p$, $i = 1, 2, 3$, принадлежат $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, то $p \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ и

$$\|p\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c(\Omega) \|\text{grad } p\|_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)},$$

где

$$\mathbb{L}^2(\Omega)/\mathbb{R} = \left(p \in \mathbb{L}^2(\Omega), \int_{\Omega} p(x) dx = 0 \right),$$

которое является гильбертовым. Кроме того, $p \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(\Omega)$.

ЛЕММА 3. Предположим, что Ω – липшицева открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ и что $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ и $\langle \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \rangle = 0$ для любого $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$. Тогда $\mathbf{f} = \text{grad } p$, где $p \in \mathbb{L}^2(\Omega)$.

ЛЕММА 4. Пусть Ω – открытое ограниченное липшицево множество. Тогда

$$\mathbf{H}(\Omega) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \text{div } \mathbf{u} = 0 \}.$$

2. Существование слабого обобщенного решения задачи. Отметим, что мы понимаем слабую обобщенную разрешимость задачи в следующем смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Под слабым обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) мы понимаем решение $\mathbf{u}(x)(t)$ из класса

$$\mathbf{u}(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega)), \quad \mathbf{u}'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$$

следующей задачи:

$$\int_0^T dt \phi(t) \langle \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \forall \phi(t) \in \mathbb{L}^2(0, T) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \mathbf{u} - |\mathbf{u}|^{q_1} \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} + |\mathbf{u}|^{q_2} \mathbf{u}, \quad (2.2)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между пространствами $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$.

Далее мы будем пользоваться следующим определением слабой производной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Слабой производной функции $v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ в смысле скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ называется следующая величина:

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, w \right\rangle_1 \equiv \left\langle v, -\frac{\partial w}{\partial x_i} \right\rangle_1 = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} dx \quad \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad i = 1, 2, 3.$$

Теперь заметим, что исходная задача эквивалентна следующей задаче:

$$\int_0^T dt \langle \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega)), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega), \quad (2.3)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \mathbf{u} - |\mathbf{u}|^{q_1} \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} + |\mathbf{u}|^{q_2} \mathbf{u}. \quad (2.4)$$

Цепочка рассуждений, приводящая к данному выводу, почти дословно повторяет рассуждения, приведенные в работе [2]. Следует упомянуть тот факт, что классическое решение является слабым обобщенным решением, что, в частности, вытекает из следующей теоремы

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbf{f} \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$. Тогда для того, чтобы имело место равенство

$$\int_0^T dt \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega)),$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая функция

$$p(t, x) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)/\mathbb{R}),$$

что $\mathbf{f} = \text{grad}_x p$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$.

Доказательство можно найти в работе [2]. Теперь мы можем доказать единственность решения задачи.

ЛЕММА 5. В классе

$$\mathbf{u} \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega)), \quad \mathbf{u}' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$$

при условиях $q_1, q_2 \in [0, 4)$ и $T > 0$ решение задачи (2.3), (2.4) единственное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ – два решения задачи, соответствующие одной и той же начальной функции $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega)$. Возьмем в качестве $\mathbf{v}$ в (2.3)

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}(t)\phi(s), \quad \phi(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, t], \\ 0, & s \in [t, T], \end{cases} \quad \mathbf{w}(t) = \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t).$$

Получим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T ds \left\langle \frac{\partial}{\partial s} (\Delta \mathbf{u} - |\mathbf{u}|^{q_1} \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u} + F(\mathbf{u})(s), \mathbf{v} \right\rangle \\ &= \int_0^t ds \left\langle \frac{\partial}{\partial s} (\Delta \mathbf{u} - |\mathbf{u}|^{q_1} \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u} + F(\mathbf{u})(s), \mathbf{w}(t) \right\rangle \\ &= \langle \Delta \mathbf{u} - |\mathbf{u}|^{q_1} \mathbf{u}, \mathbf{w}(t) \rangle - \langle \Delta \mathbf{u}_0 - |\mathbf{u}_0|^{q_1} \mathbf{u}_0, \mathbf{w}(t) \rangle \\ &\quad + \int_0^t ds \langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{w}(t) \rangle + \left\langle \int_0^t F(\mathbf{u})(s) ds, \mathbf{w}(t) \right\rangle = I(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $F(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^{q_2} \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}$.

Вычтем уравнение (2.5) для решения $\mathbf{u}_2$ из уравнения для решения $\mathbf{u}_1$, проинтегрируем по частям и введем обозначения $F_1 = F(u_1)$, $F_2 = F(u_2)$. Получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \langle \Delta \mathbf{w}(t), \mathbf{w}(t) \rangle - \langle |\mathbf{u}_1|^{q_1} \mathbf{u}_1(t) - |\mathbf{u}_2|^{q_1} \mathbf{u}_2(t), \mathbf{w}(t) \rangle + \int_0^t ds \langle \Delta \mathbf{w}(s), \mathbf{w}(t) \rangle \\ &= - \left\langle \int_0^t ds (F_1 - F_2)(s), \mathbf{w}(t) \right\rangle, \\ & ((\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(t))) + \langle |\mathbf{u}_1|^{q_1} \mathbf{u}_1(t) - |\mathbf{u}_2|^{q_1} \mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t) \rangle + \int_0^t ds ((\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(s))) \\ &= \left\langle \mathbf{w}(t), \int_0^t ds (F_1 - F_2)(s) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Заметим, что при условиях $N = 3$ и $q_1 \in [0, 4]$ справедлива следующая цепочка плотных и непрерывных вложений:

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbf{L}^{q_1+2}(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbf{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbf{H}^{-1}(\Omega).$$

Тогда для $q_1 \in [0, 4]$

$$\langle |\mathbf{u}_1|^{q_1} \mathbf{u}_1 - |\mathbf{u}_2|^{q_1} \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \rangle = \int_{\Omega} (|\mathbf{u}_1|^{q_1} \mathbf{u}_1 - |\mathbf{u}_2|^{q_1} \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) dx \geq 0.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\int_0^t d((\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(s))) \leq \|\mathbf{w}\|_{+1}(t) \int_0^t \|\mathbf{w}\|_{+1}(s) ds.$$

Тогда из (2.6) получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}(t)\|_{+1}^2 &\leq \|\mathbf{w}(t)\|_{+1} \int_0^t \|\mathbf{w}(s)\|_{+1} ds + \int_0^t ds \langle \mathbf{w}(t), (F_1 - F_2)(s) \rangle \\ &\leq \|\mathbf{w}(t)\|_{+1} \int_0^t \|\mathbf{w}(s)\|_{+1} ds + \|\mathbf{w}(t)\|_{+1} \int_0^t \|(F_1 - F_2)(s)\|_{-1} ds. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Оценим теперь

$$F(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^{q_2} \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}.$$

Сначала оценим $|\mathbf{u}|^{q_2} \mathbf{u}$. Как и ранее, при условии $N = 3$ из цепочки плотных и непрерывных вложений

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbf{L}^{q_2+2}(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbf{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$$

вытекает следующая цепочка неравенств для $q_2 \in [0, 4]$:

$$\begin{aligned} \int_0^t ds \| |\mathbf{u}_1|^{q_2} \mathbf{u}_1 - |\mathbf{u}_2|^{q_2} \mathbf{u}_2 \|_{-1} &\leq c_1 \int_0^t ds \| |\mathbf{u}_1|^{q_2} \mathbf{u}_1 - |\mathbf{u}_2|^{q_2} \mathbf{u}_2 \|_{(q_2+2)/(q_2+1)} \\ &\leq c_1 \int_0^t ds \max(\|\mathbf{u}_1\|_{q_2+2}^{q_2}, \|\mathbf{u}_2\|_{q_2+2}^{q_2}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{q_2+2} \\ &\leq c_2 \int_0^t ds \|\mathbf{w}\|_{q_2+2} \leq c_3 \int_0^t ds \|\mathbf{w}\|_{+1}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Теперь оценим $(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u}$. Для начала докажем $\|(\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b}\|_{-1} \leq C\|\mathbf{a}\|_{+1}\|\mathbf{b}\|_{+1}$. Имеем

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b}\|_{-1} &\leq c_3\|(\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b}\|_{4/3} = c_4\left(\int_{\Omega} |(\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b}|^{4/3}\right)^{3/4} \\ &\leq c_5\left(\sum_{i,j=1}^3\left(\int_{\Omega} |a_i|^{4/3}|\partial_i b_j|^{4/3}\right)^{3/4}\right) \\ &\leq c_5\left(\int_{\Omega} |\mathbf{a}|^4\right)^{1/4}\left(\sum_{i,j=1}^3\int_{\Omega} |\partial_i b_j|^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leq c_6\|\mathbf{a}\|_4\|\mathbf{b}\|_{+1} \leq c_7\|\mathbf{a}\|_{+1}\|\mathbf{b}\|_{+1}. \end{aligned}$$

Теперь, используя это неравенство, мы получим

$$\begin{aligned} &\int_0^t ds \|(\mathbf{u}_1, \nabla)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2, \nabla)\mathbf{u}_2\|_{-1} \\ &\leq \int_0^t ds (\|(\mathbf{u}_1, \nabla)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\|_{-1} + \|(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \nabla)\mathbf{u}_2\|_{-1}) \leq c_8\|\mathbf{w}\|_{+1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляя (2.8) и (2.9) в (2.6), мы получаем, что для любых $t \in (0, T)$

$$\|\mathbf{w}\|_{+1}(t) \leq c \int_0^t \|\mathbf{w}\|_{+1}(s) ds;$$

из данного неравенства в силу леммы Гронуолла–Белмана приходим к выводу, что $\mathbf{w} = 0$ для почти всех $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$, откуда и следует единственность решения задачи.

Лемма доказана.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Для любого $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega)$ при условии $q_1, q_2 \in [0, 4)$ существует единственное слабое обобщенное решение задачи (3.3), (3.4) класса

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0, T_0; \mathbf{H}(\Omega)), \quad u' \in \mathbb{L}^2(0, T_0; \mathbf{H}(\Omega)),$$

причем момент времени $T_0 > 0$ максимален в том смысле, что либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и тогда имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем конечномерную аппроксимацию задачи (2.1), (2.2). Поскольку пространство $\mathbf{H}(\Omega)$ сепарабельно, то существует последовательность линейно независимых элементов $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n, \dots$, тотальная в $\mathbf{H}(\Omega)$. Для каждого m определим приближенное решение $\mathbf{u}_m$ уравнения (2.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_m} \phi(t) \langle \mathbf{D}(\mathbf{u}_m), \mathbf{w}_k \rangle dt &= 0, \quad \forall \phi(t) \in L^2(0, T_m), \quad k = 1, \dots, m, \\ \mathbf{u}_m(0) &= \mathbf{u}_{m0} \in \mathbf{H}(\Omega), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}_m) = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta \mathbf{u}_m - |\mathbf{u}_m|^{q_1} \mathbf{u}_m) + \Delta \mathbf{u}_m + (\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m + |\mathbf{u}_m|^{q_2} \mathbf{u}_m, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{u}_m = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{m0} = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbf{w}_k \rightarrow \mathbf{u}_0 \quad \text{сильно в } \mathbf{H}(\Omega).$$

Мы ищем решение $c_{mk}(t)$ системы уравнений (2.10) в классе $C^{(1)}[0, T_m]$ при некотором $T_m > 0$. В силу основной леммы вариационного исчисления и того, что $\langle \mathbf{D}(\mathbf{u}_m), \mathbf{w}_k \rangle \in C[0, T_m]$ и $\phi(t) \in C_0^{(\infty)}[0, T_m] \subset L^2(0, T_m)$, имеем $\langle \mathbf{D}(\mathbf{u}_m), \mathbf{w}_k \rangle = 0$, откуда получаем для $c_{mk}(t)$ следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m [((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)) + (q_1 + 1)(|\mathbf{u}_m|^{q_1} \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)] c'_{mi} \\ & + \sum_{i=1}^m ((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)) c_{mi} + \sum_{i,l=1}^{m,m} b(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_j) c_{mi}(t) c_{ml}(t) \\ & = \sum_{i=1}^m \left(\left| \sum_{k=1}^m c_{mk} \mathbf{w}_k \right|^{q_2} \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \right)_2 c_{mi}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx. \quad (2.13)$$

Введя обозначение

$$a_{ij} = ((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)) + (q_1 + 1)(|\mathbf{u}_m|^{q_1} \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j),$$

в силу критерия Сильвестра получаем $\|a_{ij}\|_{i,j=1,1}^{m,m} > 0$. Из общих результатов теории нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [6] получаем, что решение задачи (2.12) существует на некотором интервале $[0, T_m]$ в классе $c_{mk}(t) \in C^{(1)}[0, T_m]$.

Теперь приступим к выводу априорных оценок. Умножая уравнение (2.12) сначала на $c_{mk}(t)$, а затем на $c'_{mk}(t)$ и суммируя по $k = 1, \dots, m$, получаем два энергетических равенства:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{2(q_1 + 1)}{q_1 + 2} \|\mathbf{u}_m\|_{q_1+2}^{q_1+2} \right] + ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) = \|\mathbf{u}_m\|_{q_2+2}^{q_2+2}, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} & ((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (q + 1)(|\mathbf{u}_m|^{q_1} \mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)_2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) \\ & = \frac{1}{q_2 + 2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m\|_{q_2+2}^{q_2+2} + ((\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)_2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В трехмерном пространстве имеет место неравенство

$$\|\mathbf{u}_m\|_{q_2+2} \leq C_2 ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))^{1/2},$$

которое вытекает из непрерывности вложения $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^{q_2+2}(\Omega)$. Введем теперь обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \frac{1}{2} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{q_1 + 1}{q_1 + 2} \|\mathbf{u}_m\|_{q_1+2}^{q_1+2}, \\ \Phi_{m0} &= \Phi_m(0). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Тогда из первого энергетического равенства вытекает неравенство

$$\Phi'_m \leq C_2^{q_2+2} 2^{(q_2+2)/2} \Phi_m^{(q_2+2)/2}, \quad (2.17)$$

из которого получаем, что

$$\Phi_m(t) \leq \frac{\Phi_{m0}}{(1 - q_2 2^{q_2/2} C_2^{q_2+2} \Phi_{m0}^{q_2/2} t)^{2/q_2}}. \quad (2.18)$$

Учитывая, что $\mathbf{u}_{m0} \rightarrow \mathbf{u}_0$ сильно в $\mathbf{H}(\Omega)$, получаем, что $\Phi_{m0} \leq C_0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Далее рассмотрим два случая: $\Phi_{m0} \downarrow \Phi_0$ и $\Phi_{m0} \uparrow \Phi_0$.

Сначала рассмотрим $\Phi_{m0} \uparrow \Phi_0$. Введем замены

$$B_{m0} = q_2 2^{q_2/2} C_2^{q_2+2} \Phi_{m0}^{q_2/2} \quad \text{и} \quad B_0 = q_2 2^{q_2/2} C_2^{q_2+2} \Phi_0^{q_2/2}.$$

Справедливы следующие неравенства:

$$1 - B_{m0}t \geq 1 - B_0t \quad \forall t \in (0, T_1), \quad T_1 = B_0^{-1},$$

$$\Phi_m \leq C_1(T) \quad (2.19)$$

для всех $t \in [0, T]$, $T \in (0, T_1)$, $T_1 = B_0^{-1}$, причем константа C_1 не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Теперь рассмотрим случай $\Phi_{m0} \downarrow \Phi_0$. В этом случае для любого $\bar{m} < m$ справедливо

$$\Phi_{\bar{m}0} > \Phi_{m0}, \quad 1 - B_{m0}t \geq 1 - B_{\bar{m}0}t,$$

и для $t \in [0, B_{\bar{m}0}^{-1})$ получим

$$\Phi_m \leq \frac{C_0}{[1 - B_{\bar{m}0}t]^{2/q_2}}. \quad (2.20)$$

Из (2.19) и (2.20) следует, что для любого T из интервала $(0, T_1)$ имеет место неравенство $\Phi_m \leq C_1(T)$.

Теперь из второго энергетического равенства мы получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^t ds \left[((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (q_1 + 1) \int_{\Omega} dx |\mathbf{u}_m|^{q_1} (\mathbf{u}'_m)^2 \right] \\ & \leq \frac{1}{q_2 + 2} \|\mathbf{u}_m\|_{q_2+2}^{q_2+2} + \frac{1}{2} ((\mathbf{u}_{m0}, \mathbf{u}_{m0})) + \left| \int_0^t ds ((\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)_2 \right|. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Рассмотрим отдельно подынтегральное слагаемое $((\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)_2$. Положим $h_i = u'_{mi}$, тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |((\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 h_i (\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m \right| = \left| \sum_{i,j=1,1}^{3,3} \int_{\Omega} h_i (u_{mj}, \partial_j) u_{mi} \right| \\ &= \left| \sum_{i,j=1,1}^{3,3} \int_{\Omega} u_{mi} u_{mj} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right| = \left| \sum_{i,j=1,1}^{3,3} \int_{\Omega} u_{mi} u_{mj} \frac{\partial u'_{mi}}{\partial x_j} \right| \\ &\leq \int_{\Omega} \sum_{i,j=1,1}^{3,3} \left| u_{mi} u_{mj} \frac{\partial u'_{mi}}{\partial x_j} \right| \leq \int_{\Omega} |\mathbf{u}_m|^2 \sum_{i,j=1,1}^{3,3} \left| \frac{\partial u'_{mi}}{\partial x_j} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 3 \int_{\Omega} |\mathbf{u}_m|^2 \left(\sum_{i=1}^3 \left[\left| \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u'_i}{\partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u'_i}{\partial x_3} \right|^2 \right] \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{3\epsilon}{2} ((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + \frac{3}{2\epsilon} \|\mathbf{u}_m\|_4^4
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Из (2.21) и (2.22) вытекает следующая оценка:

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{3\epsilon}{2}\right) \int_0^t ds \left[((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (q+1) \int_{\Omega} dx |\mathbf{u}_m|^q (\mathbf{u}'_m)^2 \right] \\
&\leq \frac{1}{2} ((\mathbf{u}_{m0}, \mathbf{u}_{m0})) + \frac{1}{q_2+2} \|\mathbf{u}_m\|_{q_2+2}^{q_2+2} + \frac{3}{2\epsilon} \int_0^t \|\mathbf{u}_m\|_4^4 ds.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Из (2.19) и (2.23) получаем, что при некотором $T > 0$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_m \text{ равномерно по } m \text{ ограничено в } L^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega)), \\
&\mathbf{u}'_m \text{ равномерно по } m \text{ ограничено в } L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega)).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Тогда из (2.23) вытекает, что найдется такая подпоследовательность последовательности $\mathbf{u}_m$ (мы обозначим ее также через $\mathbf{u}_m$), для которой справедливы следующие утверждения:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{*}-слабо в } L^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega)), \\
&\mathbf{u}'_m \rightarrow \mathbf{u}' \quad \text{слабо в } L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega)).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Нам потребуются леммы, доказанные в работе [2].

ЛЕММА 6. Для некоторой подпоследовательности последовательности $\mathbf{u}_m = (u_{1m}, u_{2m}, u_{3m})$ имеем

$$u_{im} u_{jm} \rightharpoonup u_i u_j \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(Q_T), \quad Q_T = (0, T) \times \Omega \quad \text{для всех } i, j = 1, 2, 3.$$

ЛЕММА 7. Пусть $N = 3$ и последовательность $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^{+\infty}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\|\mathbf{u}_m\|_{+1} \leq C \quad \forall t \in (0, T), \quad \int_0^T dt \|\mathbf{u}'_m\|_{+1}^2 \leq c,$$

где $0 < T < +\infty$ и постоянная c зависит от T . Тогда для всех $r \in (1, 6)$ существует функция $\mathbf{u}(s) \in \mathbf{L}^r(\Omega)$ для почти всех $s \in [0, T]$ и имеет место предельное равенство

$$\mathbf{u}_{m_k}(s) \rightarrow \mathbf{u}(s) \quad \text{сильно в } \mathbf{L}^r(\Omega) \quad \text{для почти всех } s \in [0, T],$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей.

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 8. Пусть последовательность $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^{+\infty}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\|\mathbf{u}_m\|_{+1} \leq C \quad \forall t \in (0, T), \quad \int_0^T dt \|\mathbf{u}'_m\|_{+1}^2 \leq c,$$

где $0 < T < +\infty$ и постоянная c зависит от T . Тогда для $q \in [0, 4)$ существует функция $\mathbf{u}(s) \in \mathbf{L}^{q+2}(\Omega)$ для почти всех $s \in [0, T]$ и имеет место предельное равенство

$$|\mathbf{u}_{m_k}|^q \mathbf{u}_{m_k} \rightarrow |\mathbf{u}|^q \mathbf{u}$$

сильно в $\mathbf{L}^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$ для почти всех $t \in [0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 7 вытекает, что для некоторой подпоследовательности $\mathbf{u}_{m_k}$ последовательности $\mathbf{u}_m$ имеет место следующее свойство $\mathbf{u}_{m_k} \rightarrow \mathbf{u}$ сильно в $\mathbf{L}^{q+2}(\Omega)$ для $q \in [0, 4)$ для почти всех $t \in [0, T]$.

Заметим, что справедливо следующее неравенство:

$$\| |\mathbf{u}_{m_k}|^q \mathbf{u}_{m_k} - |\mathbf{u}|^q \mathbf{u} \| \leq C \max(|\mathbf{u}|^q, |\mathbf{u}_{m_k}|^q) |\mathbf{u}_{m_k} - \mathbf{u}|.$$

Теперь, используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\| |\mathbf{u}_{m_k}|^q \mathbf{u}_{m_k} - |\mathbf{u}|^q \mathbf{u} \|_{(q+2)/(q+1)} \leq C \max(\|\mathbf{u}\|_{q+2}^q, \|\mathbf{u}_{m_k}\|_{q+2}^q) \|\mathbf{u}_{m_k} - \mathbf{u}\|_{q+2}.$$

Лемма доказана.

Теперь перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в уравнении (2.10). Действительно из лемм 1 и 3 и из равенств (2.25) следует, что это возможно. Пусть $T_0 > 0$ — максимальный момент времени, т.е. либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < \infty$, и имеет место предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow T_0} \sup ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) = +\infty.$$

Предположим противное: $T_0 < +\infty$, но при этом

$$((\mathbf{u}, \mathbf{u}))(t) \leq C < +\infty \quad \forall t \in [0, T_0].$$

Пусть теперь $T' \in (0, T_0)$, тогда имеем

$$\int_0^{T'} ds \langle \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in L^2([0, T']; \mathbf{H}(\Omega)), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega).$$

Сделав замену переменных $\sigma = s - T'$ и $\mathbf{w}(\sigma) = \mathbf{u}(\sigma + T')$, рассмотрим следующую задачу:

$$\int_0^t d\sigma \langle \mathbf{D}(\mathbf{w})(\sigma), \mathbf{v}(\sigma + T') \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v}(\sigma + T') \in L^2([0, t]; \mathbf{H}(\Omega)), \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{u}_{T'} \in \mathbf{H}(\Omega).$$

Сравнивая данную задачу с (2.1), получаем, что существует такое $t = T^* = T^*(T') > 0$, что решение задачи единственно и, следовательно,

$$\sup_{T' \in [0, T_0]} ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) < +\infty$$

и существует точная нижняя грань функции $T^* = T^*(T') > 0$ (обозначаем ее $T^* > 0$). Если мы положим $T' = T_0 - T^*/2$, то получим

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= (\mathbf{u}(t), t \in [0, T']; \mathbf{w}(t - T'), t \in [T', T' + T^*]), \\ \hat{\mathbf{u}} &= \left(\mathbf{u}(t), t \in [0, T']; \mathbf{w}(t - T'), t \in \left[T', T_0 + \frac{T^*}{2} \right] \right). \end{aligned}$$

Итак, мы пришли к выводу, что решение задачи (2.1) можно продолжить за момент $T_0 > 0$, откуда приходим к противоречию, связанному с конечностью времени $T_0 > 0$.

Теорема доказана.

3. Разрушение решения и глобальная разрешимость. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \frac{1}{2}((\mathbf{u}, \mathbf{u})) + \frac{q_1 + 1}{q_1 + 2} \|\mathbf{u}\|_{q_1+2}^{q_1+2}, \\ \Phi_m(t) &= \frac{1}{2}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{q_1 + 1}{q_1 + 2} \|\mathbf{u}_m\|_{q_1+2}^{q_1+2}, \\ \Phi_0 &= \Phi(0), \quad B = C_1^{q_2+2} \left(\frac{q_1 + 2}{q_1 + 1} \right)^{(q_2+2)/(q_1+2)}, \quad \gamma = \frac{q_2 + 2}{q_1 + 2},\end{aligned}\tag{3.1}$$

здесь C_1 – это наилучшая постоянная вложения $\|u\|_{q_2+2} \leq C_1 \|u\|_{q_1+2}$ при $q_1 \geq q_2 > 0$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда при условии $q_1 \geq q_2 > 0$ задача (2.1), (2.2) разрешима в классе $u(x, t) \in C([0, T], \mathbf{H}(\Omega))$, причем справедливы следующие оценки сверху:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &\leq \exp(Bt), & q_1 &= q_2, \\ \Phi(t) &\leq (\Phi_0 + (1 - \gamma)Bt)^{1/(1-\gamma)}, & q_1 &> q_2.\end{aligned}$$

Если $0 < q_1 < q_2$ и выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned}q_1 &> 2, \quad \|\mathbf{u}_0\|_{q_2+2}^{q_2+2} \geq ((\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)), \\ \Phi'_0 &> \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1 - 1} \Phi_0^2 + \frac{2\gamma_1}{2\alpha_1 - (q_1 + 6)/(q_1 + 2)} \Phi_0^{(q_1+6)/(q_1+2)} \right)^{1/2} > 0,\end{aligned}$$

то решение задачи разрушается за конечное время $T_0 > 0$, т.е. имеет место предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow T_0} \sup ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) = +\infty,$$

причем выполнены двусторонние оценки на время разрушения решения $T_0 \in [T_1, T_2]$. Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}T_1 &= B_0^{-1}, \quad B_0 = q_2 2^{q_2/2} C_2^{q_2+2} \Phi_0^{q_2/2}, \quad T_2 = A_1^{-1} \Phi_0^{1-\alpha_1}, \\ A_1^2 &= (\alpha_1 - 1)^2 \Phi_0^{-2\alpha_1} \left((\Phi'_0)^2 - \frac{\beta_1}{\alpha_1 - 1} \Phi_0^2 - \frac{2\gamma_1}{2\alpha_1 - (q_1 + 6)/(q_1 + 2)} \Phi_0^{(q_1+6)/(q_1+2)} \right), \\ \alpha_1 &= \frac{q_2 + 2}{q_1 + 2} \left(1 - \epsilon \frac{2q_2 + 3}{q_2 + 2} \right), \quad \beta_1 = \frac{q_2}{\epsilon}, \quad \gamma_1 = \frac{3}{2\epsilon} C_3^4 \left(\frac{q_1 + 2}{q_1 + 1} \right)^{4/(q_1+2)} (q_2 + 2),\end{aligned}$$

здесь $\epsilon \in (0, (q_2 - q_1)/(2q_2 + 3))$, C_2, C_3 – наилучшие константы вложения соответственно $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^{q_2+2}(\Omega)$, $\mathbf{L}^{q_1+2}(\Omega) \subset \mathbf{L}^4(\Omega)$.

Если же выполнены условия

$$q_2 > \frac{2q_1^2 - 4q_1 - 4}{q_1 - 4}, \quad \|\mathbf{u}_0\|_{q_2+2}^{q_2+2} \geq ((\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)),$$

$$\Phi'_0 > \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2 - 1} \Phi_0^2 + \frac{\gamma_2}{\alpha_2 - (6 - 2q_1)/(4 - q_1)} \Phi_0^{(12-4q_1)/(4-q_1)} \right)^{1/2} > 0,$$

то решение задачи также разрушается за конечное время $T_0 > 0$, и двусторонние оценки на время разрушения решения имеют вид $T_0 \in [T'_1, T'_2]$,

$$T'_2 = A_2^{-1} \Phi_0^{1-\alpha_2}, \quad T'_1 = B_0^{-1},$$

$$A_2^2 = (\alpha_2 - 1)^2 \Phi_0^{-2\alpha_2} \left((\Phi'_0)^2 - \frac{\beta_2}{\alpha_2 - 1} \Phi_0^2 - \frac{\gamma_2}{\alpha_2 - (6 - 2q_1)/(4 - q_1)} \Phi_0^{(12-4q_1)/(4-q_1)} \right),$$

$$\alpha_2 = \frac{q_2 + 2}{q_1 + 1} - \epsilon = \frac{2q_2 + 3}{q_1 + 2}, \quad \beta_2 = \frac{q_2}{q_1 + 2} \frac{1}{\epsilon}, \quad \gamma_2 = \frac{3K}{2\epsilon} \frac{q_2 + 2}{q_1 + 2},$$

где

$$\epsilon \in \left(0, \frac{2q_1^2 - 4q_1 - q_1q_2 + 4q_2 - 4}{(2q_2 + 3)(4 - q_1)} \right),$$

$$K = \left(\frac{q_1 + 2}{q_1 + 1} \right)^{2/(4-q_1)} 8^{(2-q_1)/(4-q_1)} C_4^{6(2-q_1)/(4-q_1)},$$

здесь C_4 – наилучшая постоянная вложения $\mathbf{L}^6(\Omega) \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напишем первое и второе энергетические равенства (2.12), (2.13):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{2(q_1 + 1)}{q_1 + 2} \|\mathbf{u}_m\|_{q_1+2}^{q_1+2} \right] + ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) = \|\mathbf{u}_m\|_{q_2+2}^{q_2+2}, \\ & ((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (q_1 + 1) (\|\mathbf{u}_m\|^{q_1} \mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)_2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) \\ & = \frac{1}{q_2 + 2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m\|_{q_2+2}^{q_2+2} + ((\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)_2. \end{aligned}$$

При условии $q_1 \geq q_2 > 0$ из (2.12) вытекает, что

$$\begin{aligned} \Phi_m(t) & \leq \Phi_0 + \int_0^t \|\mathbf{u}_m\|_{q_2+2}^{q_2+2} ds \\ & \leq \Phi_0 + \int_0^t C_1^{q_2+2} \left(\frac{q_1 + 2}{q_1 + 1} \right)^{(q_2+2)/(q_1+2)} \Phi_m(s)^{(q_2+2)(q_1+2)} ds, \end{aligned} \quad (3.2)$$

так как при $q_1 \geq q_2 > 0$ и $q_1, q_2 \in (0, 4]$ для $N > 3$ $\|\mathbf{u}\|_{q_2+2} \leq C_1 \|\mathbf{u}\|_{q_1+2}$.

Принимая в расчет теорему Гронуолла–Беллмана–Бихари [7], получаем

$$\Phi_m(t) \leq \exp(Bt), \quad q_1 = q_2, \quad (3.3)$$

$$\Phi_m(t) \leq (\Phi_0 + (1 - \gamma)Bt)^{1/(1-\gamma)}, \quad q_1 > q_2. \quad (3.4)$$

Заметим, что первое энергетическое равенство (2.12) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\Phi_m(t) = \Phi_m(0) + \int_0^t ds e^{-(t-s)} \left[\frac{2(q_1 + 1)}{q_1 + 2} \|\mathbf{u}_m\|_{q_1+2}^{q_1+2} + \|\mathbf{u}_m\|_{q_2+2}^{q_2+2} \right] (s).$$

Как мы ранее доказали, существует некоторая подпоследовательность $\mathbf{u}_{m_k}$ последовательности $\mathbf{u}_m$, для которой справедливо следующее свойство: $\mathbf{u}_{m_k} \rightarrow \mathbf{u}$ сильно в $L^{q+2}(\Omega)$ для $q \in [0, 4)$ для почти всех $t \in [0, T]$ (подпоследовательность $\mathbf{u}_{m_k}$ перенормируем снова через $\mathbf{u}_m$). Откуда получаем

$$\Phi_m(t) \rightarrow \Phi(0) + \int_0^t ds e^{-(t-s)} \left[\frac{2(q_1 + 1)}{q_1 + 2} \|\mathbf{u}\|_{q_1+2}^{q_1+2} + \|\mathbf{u}\|_{q_2+2}^{q_2+2} \right](s)$$

для почти всех $t \in (0, T)$, поскольку $\mathbf{u}_m(0) \rightarrow \mathbf{u}(0)$ сильно в $\mathbf{H}(\Omega)$ при $m \rightarrow +\infty$. Возьмем в (2.3) $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ — решение задачи (2.3), (2.4), которое в силу теоремы 2 существует. Получаем

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \int_0^t ds e^{-(t-s)} \left[\frac{2(q_1 + 1)}{q_1 + 2} \|\mathbf{u}\|_{q_1+2}^{q_1+2} + \|\mathbf{u}\|_{q_2+2}^{q_2+2} \right](s).$$

Отсюда приходим к выводу, что $\Phi_m(t) \rightarrow \Phi(t)$ для почти всех $t \in (0, T)$.

Рассмотрим случай $0 < q_1 < q_2$. Для начала при $q_1 > 2$. Справедливо следующее плотное вложение: $\mathbf{L}^{q_1+2}(\Omega) \subset \mathbf{L}^4(\Omega)$, следовательно, существует такая константа C_3 , что справедливо неравенство

$$\|\mathbf{u}\|_4^4 \leq C_3^4 (\|\mathbf{u}\|_{q_1+2}^{q_1+2})^{4/(q_1+2)}.$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} (\Phi'_m)^2 &= \left(\int_{\Omega} \mathbf{u}_m (-\Delta \mathbf{u}_m + |\mathbf{u}_m|^{q_1} \mathbf{u}_m)_t dx \right)^2 \\ &\leq |((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m))|^2 + (q_1 + 1)^2 |(|\mathbf{u}_m|^{q_1} \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)|^2 \\ &\quad + 2(q_1 + 1) |((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m))| |(|\mathbf{u}_m|^{q_1} \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)| \\ &\leq ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) ((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (q_1 + 1)^2 (|\mathbf{u}_m|^{q_1}, \mathbf{u}_m'^2) \|\mathbf{u}_m\|_{q_1+2}^{q_1+2} \\ &\quad + 2(q_1 + 1) \sqrt{((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) ((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m))} (|\mathbf{u}_m|^{q_1}, \mathbf{u}_m'^2) \|\mathbf{u}_m\|_{q_1+2}^{q_1+2} \\ &\leq \left(((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (q_1 + 1) \int_{\Omega} |\mathbf{u}_m|^{q_1} \mathbf{u}_m'^2 dx \right) ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + (q_1 + 1) \|\mathbf{u}_m\|_{q_1+2}^{q_1+2} \\ &\leq (q_1 + 2) \left(((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (q_1 + 1) \int_{\Omega} |\mathbf{u}_m|^{q_1} \mathbf{u}_m'^2 dx \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{(q_1 + 1)}{q_1 + 2} \|\mathbf{u}_m\|_{q_1+2}^{q_1+2} \right) \\ &= (q_1 + 2) \Phi_m(t) \left[((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (q_1 + 1) \int_{\Omega} |\mathbf{u}_m|^{q_1} |\mathbf{u}'_m|^2 dx \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из первого энергетического равенства получаем

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \|\mathbf{u}_m\|_{q_2+2}^{q_2+2} - ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)), \quad (3.6)$$

тогда из (2.14) следует цепочка неравенств

$$((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (q_1 + 1) \int_{\Omega} |\mathbf{u}_m|^{q_1} \mathbf{u}_m'^2 dx$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{q_2+2} \Phi_m'' + \left(\frac{1}{q_2+2} - \frac{1}{2} \right) \frac{d}{dt} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m' dx \\ &\leq \frac{1}{q_2+2} \Phi_m'' - \frac{q_2}{2(q_2+2)} \frac{d}{dt} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{3\epsilon}{2} ((\mathbf{u}_m', \mathbf{u}_m')) + \frac{3}{2\epsilon} \|\mathbf{u}\|_4^4. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством (2.21). Продолжим цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{q_2+2} \Phi_m'' + \frac{q_2}{q_2+2} \left(\frac{\epsilon}{2} ((\mathbf{u}_m', \mathbf{u}_m')) + \frac{1}{2\epsilon} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) \right) + \frac{3\epsilon}{2} ((\mathbf{u}_m', \mathbf{u}_m')) + \frac{3}{2\epsilon} \|\mathbf{u}\|_4^4 \\ &\leq \frac{1}{q_2+2} \Phi_m'' + \left(\frac{q_2}{q_2+2} \frac{\epsilon}{2} + \frac{3\epsilon}{2} \right) ((\mathbf{u}_m', \mathbf{u}_m')) \\ &\quad + \frac{q_2}{q_2+2} \frac{1}{2\epsilon} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{3}{2\epsilon} C_3^4 \left(\frac{q_1+2}{q_1+1} \right)^{4/(q_1+2)} \Phi_m^{4/(q_1+2)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

И наконец получаем неравенство

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{q_2}{q_2+2} \frac{\epsilon}{2} - \frac{3\epsilon}{2} \right) \left(((\mathbf{u}_m', \mathbf{u}_m')) + (q_1+1) \int_{\Omega} |\mathbf{u}_m|^{q_1} \mathbf{u}_m'^2 dx \right) \\ &\leq \frac{1}{q_2+2} \Phi_m'' + \frac{q_2}{q_2+2} \frac{1}{\epsilon} \Phi_m + \frac{3}{2\epsilon} C_3^4 \left(\frac{q_1+2}{q_1+1} \right)^{4/(q_1+2)} \Phi_m^{4/(q_1+2)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в (3.5), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{q_1+2} \left(1 - \epsilon \frac{2q_2+3}{q_2+2} \right) (\Phi_m')^2 \\ &\leq \frac{1}{q_2+2} \Phi_m'' \Phi_m + \frac{q_2}{q_2+2} \frac{1}{\epsilon} \Phi_m^2 + \frac{3}{2\epsilon} C_3^4 \left(\frac{q_1+2}{q_1+1} \right)^{4/(q_1+2)} \Phi_m^{4/(q_1+2)+1}, \\ &\Phi_m'' \Phi_m - \alpha_1 (\Phi_m')^2 + \beta_1 \Phi_m^2 + \gamma_1 \Phi_m^{4/(q_1+2)+1} \geq 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{q_2+2}{q_1+2} \left(1 - \epsilon \frac{2q_2+3}{q_2+2} \right), \quad \beta_1 = \frac{q_2}{\epsilon}, \quad \gamma_1 = \frac{3}{2\epsilon} C_3^4 \left(\frac{q_1+2}{q_1+1} \right)^{4/(q_1+2)} (q_2+2).$$

Потребуем, чтобы $\epsilon \in (0, (q_2 - q_1)/(2q_2 + 3))$, тогда $\alpha_1 > 1$. Сделаем замену $Z_m = \Phi_m^{1-\alpha_1}$, неравенство примет вид

$$\frac{1}{1-\alpha_1} Z_m'' + \beta_1 Z_m + \gamma_1 Z^{\lambda_1} \geq 0, \quad (3.10)$$

здесь

$$\lambda_1 = \frac{4/(q_1+2) - \alpha_1}{1 - \alpha_1}.$$

Потребуем, чтобы было выполнено неравенство $\lambda_1 > -1$, что, как можно заметить, выполнено при $\alpha_1 > 1$ и $q_1 > 2$. Кроме того, мы потребуем условие на начальные данные $\Phi_0' > 0$, тогда в силу непрерывной дифференцируемости Z_m приходим

к выводу, что существует такой интервал $[0, T_m]$, принадлежащий области определения Φ_m , что $Z'_m = (1 - \alpha_1)\Phi_m^{-\alpha_1}\Phi'_m \leq 0$. Умножив обе части на Z'_m и проинтегрировав, получаем

$$(Z'_m)^2 \geq (\alpha_1 - 1)\beta_1 Z_m^2 + \frac{2(\alpha_1 - 1)\gamma_1}{1 + \lambda_1} Z_m^{\lambda_1 + 1} + A_{1,m}^2; \quad (3.11)$$

здесь

$$A_{1,m}^2 = (\alpha_1 - 1)^2 \Phi_{0,m}^{-2\alpha_1} \times \left((\Phi'_{0,m})^2 - \frac{\beta_1}{\alpha_1 - 1} \Phi_{0,m}^2 - \frac{2\gamma_1}{2\alpha_1 - (q_1 + 6)/(q_1 + 2)} \Phi_{0,m}^{(q_1 + 6)/(q_1 + 2)} \right) > 0.$$

Из (3.11) с учетом того, что $Z'_m \leq 0$, следует неравенство

$$Z_m(t) \leq Z_m(0) - A_{1,m}t. \quad (3.12)$$

Стало быть, найдется такой момент времени $T_{0,m} \in (0, A_{1,m}^{-1} \Phi_{0,m}^{1-\alpha_1}]$, что

$$\lim_{t \uparrow T_{0,m}} \sup \Phi_m(t) = +\infty.$$

Теперь переходим к пределу при $m \rightarrow +\infty$, из (2.24) следует, что это возможно.

Пусть теперь $q_1 < 2$. Справедливо следующее неравенство:

$$\|\mathbf{u}_m\|_4^4 \leq \left(\int_{\Omega} |\mathbf{u}_m|^{q_1+2} dx \right)^{2/(4-q_1)} \left(\int_{\Omega} |\mathbf{u}_m|^6 dx \right)^{(2-q_1)/(4-q_1)}. \quad (3.13)$$

Используя вложение пространства $\mathbf{L}^6(\Omega) \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ и (3.1), получаем

$$\|\mathbf{u}_m\|_{q_1+2}^{q_1+2} \leq \frac{q_1+2}{q_1+1} \Phi_m(t), \quad \|\mathbf{u}_m\|_6^6 \leq 8C_4^6 \Phi_m^3(t). \quad (3.14)$$

Подставляя (3.14) в (3.13), получаем неравенство

$$\|\mathbf{u}_m\|_4^4 \leq K \Phi_m^{(8-3q_1)/(4-q_1)}, \quad (3.15)$$

где

$$K = \left(\frac{q_1+2}{q_1+1} \right)^{2/(4-q_1)} 8^{(2-q_1)/(4-q_1)} C_4^{6(2-q_1)/(4-q_1)}.$$

Из выражения (3.5) аналогично предыдущему случаю получаем

$$\Phi_m \Phi'' - \alpha_2 (\Phi_m)^2 + \beta_2 \Phi_m^2 + \gamma_2 \Phi_m^{(12-4q_1)/(4-q_1)} \geq 0, \quad (3.16)$$

где

$$\alpha_2 = \frac{q_2+2}{q_1+2} \left(1 - \epsilon \frac{2q_2+3}{q_2+2} \right), \quad \beta_2 = \frac{q_2}{q_1+2} \frac{1}{\epsilon}, \quad \gamma_2 = \frac{3K}{2\epsilon} \frac{q_2+2}{q_1+2}.$$

Опять потребуем, чтобы $\epsilon \in (0, (q_2 - q_1)/(2q_2 + 3))$, тогда $\alpha_2 > 1$. Делаем замену $Z_m = \Phi_m^{1-\alpha_2}$, и неравенство (3.16) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{1-\alpha_2} Z_m'' + \beta_2 Z_m + \gamma_2 Z_m^{\lambda_2} \geq 0, \quad \lambda_2 = \frac{(8-3q_1)/(4-q_1) - \alpha_2}{1-\alpha_2} \geq -1, \quad (3.17)$$

что, как можно заметить, выполнено при

$$\epsilon \in \left(0, \frac{2q_1^2 - q_1(q_2 + 4) + 4(q_2 - 1)}{(4 - q_1)(2q_2 + 3)}\right) \quad \text{и} \quad q_2 > \frac{2q_1^2 - 4q_1 - 4}{q_1 - 4}.$$

Кроме того, мы наложим условие на начальные данные $\Phi'_0 > 0$. Тогда в силу непрерывной дифференцируемости Z_m приходим к выводу, что существует такой интервал $[0, T_m]$, принадлежащий области определения Φ_m , что

$$Z'_m = (1 - \alpha_2)\Phi_m^{-\alpha_2}\Phi'_m \leq 0.$$

Из (3.14) получаем

$$(Z'_m)^2 \geq (\alpha_2 - 1)\beta_2 Z_m^2 + \frac{2(\alpha_2 - 1)\gamma_2}{1 + \lambda_2} Z^{\lambda_2+1} + A_{2,m}^2; \quad (3.18)$$

здесь

$$A_{2,m}^2 = (\alpha_2 - 1)^2 \Phi_{0,m}^{-2\alpha_2} \times \left((\Phi'_{0,m})^2 - \frac{\beta_2}{\alpha_2 - 1} \Phi_{0,m}^2 - \frac{\gamma_2}{\alpha_2 - (6 - 2q_1)/(4 - q_1)} \Phi_{0,m}^{(12-4q_1)/(4-q_1)} \right) > 0.$$

Из (3.18) с учетом того, что $Z'_m \leq 0$, следует неравенство

$$Z_m(t) \leq Z_m(0) - A_{2,m}t. \quad (3.19)$$

Стало быть, найдется такой момент времени $T_{0,m} \in (0, A_{2,m}^{-1}\Phi_{0,m}^{1-\alpha_2}]$, что

$$\lim_{t \uparrow T_{0,m}} \sup \Phi_m(t) = +\infty.$$

Теперь переходим к пределу при $m \rightarrow +\infty$, из (2.24) следует, что это возможно. Наконец, оценка снизу на время разрушения решения задачи следует из (2.18):

$$T \geq B_0^{-1}, \quad \text{где} \quad B_0 = q_2 2^{q_2/2} C_2^{q_2+2} \Phi_0^{q_2/2}.$$

Теорема доказана.

В заключение автор выражает искреннюю признательность М. О. Корпусову за помощь в работе и полезное обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. П. Осолков, “О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 9, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **59**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1976, 133–177.
- [2] М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, “О разрушении решения системы уравнений Осолкова”, *Матем. сб.*, **200**:4 (2009), 83–108.
- [3] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Математика и прикладная математика, Физматлит, М., 2007.

- [4] H. A. Levine, “Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathfrak{F}(u)$ ”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51** (1973), 371–386.
- [5] Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ*, Мир, М., 1981.
- [6] И. Г. Петровский, *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1970.
- [7] В. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967.

Е. В. Юшков

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: yushkov.msu@mail.ru

Поступило

07.04.2010

Исправленный вариант

14.09.2010