Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Аксенов, Задача Коши для некоторых систем дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка в локально выпуклых пространствах, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 2, 183–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8788>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:22:28

Задача Коши для некоторых систем дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка в локально выпуклых пространствах

Н. А. Аксенов

В работе описывается аналог достаточных условий Коши–Ковалевской аналитической разрешимости задачи Коши для систем дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка в локально выпуклых пространствах, сформулированный в терминах порядка и типа линейного оператора.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. В 1842 г. французским математиком Огюстеном Луи Коши была поставлена задача, получившая в дальнейшем его имя. А именно, им рассматривалась система уравнений

$$\frac{\partial^{m_i} u_i}{\partial t^{m_i}} + \sum_{n=0}^{m_i-1} \sum_{j=1}^l A_{ij}^n(t, z, D) \frac{\partial^n u_i}{\partial t^n} = f_i(t, z), \quad t \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}^p, \quad i = 1, \dots, l, \quad (1.1)$$

решение которой должно удовлетворять начальным условиям

$$\frac{\partial^n u_i(t_0, z)}{\partial t^n} = g_{in}(z), \quad i = 1, \dots, l, \quad n = 0, \dots, m_i - 1. \quad (1.2)$$

Фундаментальные результаты Коши о разрешимости задачи (1.1), (1.2) в классе аналитических функций, полученные тремя десятилетиями позже независимо от него С. Ковалевской, вошли в теорию уравнений с частными производными как теорема Коши–Ковалевской: если коэффициенты операторов $A_{ij}^n(t, z, D)$ являются аналитическими в некоторой области $G \subset \mathbb{C}_{t,z}^{p+1}$, а их порядки удовлетворяют неравенствам $\text{ord } A_{ij}^n \leq m_i - n$, то для любых функций $f_i(t, z)$, аналитических в некоторой окрестности $O(t_0, z_0)$ точки $(t_0, z_0) \in G$, и любых функций $g_{in}(z)$, аналитических в окрестности $O(t_0, z_0) \cap \{t = t_0\}$, существует единственное решение задачи (1.1), (1.2).

Тем не менее, за прошедшее с тех пор время внимание математиков к задаче Коши не только не ослабло, а, напротив, становится лишь более пристальным. Так, Лере, Гординг и Котакке [1] обобщили известные результаты Коши–Ковалевской, доказав аналитическую разрешимость задачи Коши для систем уравнений с более широкими условиями – условиями Лере–Волевича: $\text{ord } A_{ij}^n \leq k_i - k_j + m_i - n$, где $k_1, \dots, k_l$ – произвольный набор натуральных чисел. Отметим также, что исследованию задачи Коши в классе аналитических функций посвящены работы Тихонова (в вещественном случае) [2], Петровского [3], Гельфанда, Шилова [4], Дубинского [5], [6] и многих др.

Поставим задачу: найти решение системы дифференциально-операторных уравнений (2.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(a_1, a_2, \dots, a_l) = v_{00}, \quad \frac{\partial^k u(a_1, a_2, \dots, a_l)}{\partial t_i^k} = v_{ik}, \quad (2.2)$$

где $a_i \in \mathbb{C}$, $v_{00}, v_{ik} \in H$, $1 \leq k \leq m_i - 1$, $1 \leq i \leq l$.¹

Приведенную выше задачу (2.1), (2.2) принято называть *задачей Коши*. Отметим также, что производные, стоящие в (2.1), (2.2), понимаются в сильном смысле, т.е. по топологии пространства H .

Решение задачи Коши (2.1), (2.2) описывает

ТЕОРЕМА 1. Пусть операторы A_j имеют порядки $\beta(A_j) \leq m_j$, $j = 1, \dots, l$, а если хотя бы один оператор A_s имеет порядок $\beta(A_s) = m_s$, то его тип $\alpha(A_s)$ конечен. Тогда задача Коши (2.1), (2.2) имеет единственное решение для любых векторов $v_{00}, v_{ik} \in H$, $1 \leq k \leq m_i - 1$, $1 \leq i \leq l$. Оно является векторнозначной функцией l комплексных переменных и задается формулой

$$u(t_1, t_2, \dots, t_l) = u_{00}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{00}) + \sum_{r=1}^l \sum_{\theta=1}^{m_r-1} u_{r\theta}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{r\theta}), \quad (2.3)$$

в которой

$$u_{00}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{00}) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} A_j^{n_j}(v_{00}), \quad (2.4)$$

$$u_{r\theta}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{r\theta}) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{r\theta}), \quad (2.5)$$

где

$$\theta_j = \begin{cases} \theta, & j = r, \\ 0, & j \neq r, \end{cases} \quad 1 \leq r \leq l, \quad 1 \leq \theta \leq m_r - 1, \quad (2.6)$$

$$\prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} A_j^{n_j}(v_{00}) \equiv \frac{(t_1 - a_1)^{m_1 n_1} \dots (t_l - a_l)^{m_l n_l}}{(m_1 n_1)! \dots (m_l n_l)!} A_1^{n_1} \dots A_l^{n_l}(v_{00}),$$

$$\prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{r\theta}) \equiv \frac{(t_1 - a_1)^{m_1 n_1 + \theta_1} \dots (t_l - a_l)^{m_l n_l + \theta_l}}{(m_1 n_1 + \theta_1)! \dots (m_l n_l + \theta_l)!} A_1^{n_1} \dots A_l^{n_l}(v_{r\theta}),$$

причем выполнены следующие утверждения:

- 1) если все операторы A_j имеют порядки $\beta(A_j) < m_j$, $j = 1, \dots, l$, то вектор-функция (2.3) является целой функцией l комплексных переменных;
- 2) если же среди операторов A_j найдется хотя бы один оператор A_s , имеющий порядок $\beta(A_s) = m_s$ и тип $\alpha(A_s)$ такой, что $0 < \alpha(A_s) < \infty$, то вектор-функция (2.3) является аналитической функцией l комплексных переменных в открытом цилиндре

$$C(R, a) = \{t_j : |t_j - a_j| < R_j, 1 \leq j \leq l\},$$

¹Если для некоторого i_0 имеем $m_{i_0} = 1$, то для этого i_0 второе из условий (2.2) не ставится.

$$R = (R_1, R_2, \dots, R_l), \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_l), \quad a$$

$$R_s = \frac{m_s}{e} \left(\frac{1}{\alpha(A_s)} \right)^{1/m_s}, \quad (2.7)$$

все остальные величины $R_j = \infty, j = 1, \dots, l, j \neq s$.

Доказательство теоремы 1 опирается на несколько вспомогательных утверждений. В частности, имеет место

ЛЕММА 1. Пусть операторы A_j имеют порядки $\beta(A_j) < m_j, j = 1, \dots, l$. Тогда кратные ряды (2.4), (2.5) сходятся по топологии пространства H абсолютно на $\mathbb{C}^l$ и равномерно на любом компактном подмножестве $\mathbb{C}^l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняются условия леммы. Сперва рассмотрим ряд (2.4). Воспользуемся вытекающей из определения порядка оператора оценкой [9]

$$\forall p \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_p(\varepsilon) \quad \exists q(p, \varepsilon) \quad \forall x \in H \quad \forall n \quad \|A^n(x)\|_p < C_p n^{(\beta(A)+\varepsilon)n} \|x\|_q, \quad (2.8)$$

а также формулой Стирлинга

$$(mn)! = \sqrt{2\pi mn} \left(\frac{mn}{e} \right)^{mn} e^{\Theta/(12mn)}, \quad 0 < \Theta < 1. \quad (2.9)$$

Применяя оценку (2.8) l раз, а затем формулу (2.9), видим, что найдется q такое, что

$$\begin{aligned} \|u_{00}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{00})\|_p &= \left\| \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} A_j^{n_j}(v_{00}) \right\|_p \\ &\leq \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{|t_j - a_j|^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} \|A_j^{n_j}(v_{00})\|_p \\ &< \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} C_p \|v_{00}\|_q \prod_{j=1}^l \frac{n_j^{(\beta(A_j)+\varepsilon_j)n_j} |t_j - a_j|^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} \\ &\leq C_p \|v_{00}\|_q \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{n_j^{(\beta(A_j)+\varepsilon_j)n_j} |t_j - a_j|^{m_j n_j}}{(m_j/e)^{m_j n_j} n_j^{m_j n_j}} \\ &= C_p \|v_{00}\|_q \prod_{j=1}^l \sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_j} \right)^{m_j n_j} n_j^{(\beta(A_j)-m_j+\varepsilon_j)n_j} |t_j - a_j|^{m_j n_j}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $C_p = C_p^1 \dots C_p^l$.

Из цепочки неравенств (2.10) следует, что кратный степенной ряд (2.4) мажорируется произведением l однократных степенных рядов

$$\sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_j} \right)^{m_j n_j} n_j^{(\beta(A_j)-m_j+\varepsilon_j)n_j} |t_j - a_j|^{m_j n_j}, \quad j = 1, \dots, l, \quad (2.11)$$

составленных из абсолютных величин. Применяя к каждому из рядов (2.11) формулу Коши–Адамара

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}, \quad (2.12)$$

в силу условий леммы и произвольности малых чисел $\varepsilon_j > 0$ имеем $R_j = \infty$, $j = 1, \dots, l$. Отсюда следует, что каждый из рядов (2.11) сходится абсолютно на $\mathbb{C}$ и равномерно на любом компактном подмножестве $\mathbb{C}$. Тогда кратный степенной ряд (2.4) сходится по топологии пространства H абсолютно на $\mathbb{C}^l$ и равномерно на любом компактном подмножестве $\mathbb{C}^l$.

Далее рассмотрим кратный степенной ряд (2.5). Как и выше, обращаясь l раз к оценке (2.8) и формуле (2.9), видим, что существует q такое, что

$$\begin{aligned} & \|u_{r\theta}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{r\theta})\|_p \\ & \leq \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{|t_j - a_j|^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} \|A_j^{n_j}(v_{r\theta})\|_p \\ & \leq \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{|t_j - a_j|^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j)!} \|A_j^{n_j}(v_{r\theta})\|_p \\ & < C_p \|v_{r\theta}\|_q \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{n_j^{(\beta(A_j) + \varepsilon_j) n_j} |t_j - a_j|^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j/e)^{m_j n_j} n_j^{m_j n_j}} \\ & = C_p \|v_{r\theta}\|_q \prod_{j=1}^l \sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_j}\right)^{m_j n_j} n_j^{(\beta(A_j) - m_j + \varepsilon_j) n_j} |t_j - a_j|^{m_j n_j + \theta_j}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $C_p = C_p^1 \cdots C_p^l$, причем эта оценка справедлива для всех $r = 1, \dots, l$, $\theta = 1, \dots, m_r - 1$.

Неравенства (2.13) показывают, что кратный степенной ряд (2.5) мажорируется произведением l однократных степенных рядов

$$\sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_j}\right)^{m_j n_j} n_j^{(\beta(A_j) - m_j + \varepsilon_j) n_j} |t_j - a_j|^{m_j n_j + \theta_j}, \quad j = 1, \dots, l,$$

сходящихся в силу формулы (2.12) абсолютно на $\mathbb{C}$ и равномерно на любом компактном подмножестве $\mathbb{C}$. Аналогично предыдущему случаю, приходим к утверждению леммы. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Если среди операторов A_j найдется хотя бы один оператор A_s такой, что $\beta(A_s) = m_s$, $0 < \alpha(A_s) < \infty$, то кратные ряды (2.4), (2.5) сходятся по топологии пространства H абсолютно в открытом цилиндре $C(R, a)$, $R = (R_1, R_2, \dots, R_l)$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_l)$, где R_s вычисляется по формуле (2.7), $R_j = \infty$, $j = 1, \dots, l$, $j \neq s$, и равномерно на любом компактном подмножестве $C(R, a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не нарушая общности, будем считать, что существует один оператор A_s : $\beta(A_s) = m_s$, $0 < \alpha(A_s) < \infty$ (в случае, когда таких операторов несколько, доказательство проводится совершенно аналогично). Как и в лемме 1, сначала

исследуем ряд (2.4), а затем ряд (2.5). Пользуясь $l-1$ раз оценкой (2.8), формулой (2.9), а также оценкой [9]

$$\forall p \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_p(\varepsilon) \quad \exists q(p, \varepsilon) \quad \forall x \in H \quad \forall n \quad \|A^n(x)\|_p < C_p(\alpha(A) + \varepsilon)^n n^{\beta(A)n} \|x\|_q, \quad (2.14)$$

легко установить, что найдется q такое, что

$$\begin{aligned} & \|u_{00}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{00})\|_p \\ &= \left\| \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} A_j^{n_j}(v_{00}) \right\|_p \\ &\leq \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{|t_j - a_j|^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} \|A_j^{n_j}(v_{00})\|_p \\ &< \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} C_p \|v_{00}\|_q \frac{(\alpha(A_s) + \varepsilon_s)^{n_s} n_s^{\beta(A_s)n_s} |t_s - a_s|^{m_s n_s}}{(m_s n_s)!} \\ &\quad \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^l \frac{n_j^{(\beta(A_j) + \varepsilon_j)n_j} |t_j - a_j|^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} \\ &\leq C_p \|v_{00}\|_q \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \frac{(\alpha(A_s) + \varepsilon_s)^{n_s} n_s^{m_s n_s} |t_s - a_s|^{m_s n_s}}{(m_s/e)^{m_s n_s} n_s^{m_s n_s}} \\ &\quad \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^l \frac{n_j^{(\beta(A_j) + \varepsilon_j)n_j} |t_j - a_j|^{m_j n_j}}{(m_j/e)^{m_j n_j} n_j^{m_j n_j}} \\ &= C_p \|v_{00}\|_q \sum_{n_s=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_s}\right)^{m_s n_s} (\alpha(A_s) + \varepsilon_s)^{n_s} |t_s - a_s|^{m_s n_s} \\ &\quad \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^l \sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_j}\right)^{m_j n_j} n_j^{(\beta(A_j) - m_j + \varepsilon_j)n_j} |t_j - a_j|^{m_j n_j}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $C_p = C_p^1 \dots C_p^l$.

Оценка (2.15) показывает, что кратный ряд (2.4) мажорируется произведением l однократных рядов, $l-1$ из которых, как показано в лемме 1, сходятся на $\mathbb{C}$. Найдем область сходимости ряда

$$\sum_{n_s=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_s}\right)^{m_s n_s} (\alpha(A_s) + \varepsilon_s)^{n_s} |t_s - a_s|^{m_s n_s}. \quad (2.16)$$

Обращаясь к формуле (2.12) и учитывая, что ε_s – произвольное сколь угодно малое число, нетрудно показать, что ряд (2.16) сходится абсолютно в открытом круге $|t_s - a_s| < R_s$, где R_s вычисляется по формуле (2.7), и равномерно в любом замкнутом круге $|t_s - a_s| \leq R_0$, $0 < R_0 < R_s$. Следовательно, для кратного ряда (2.4) справедливо утверждение леммы. Покажем, что оно имеет место и для кратного ряда (2.5). В самом деле, из оценок (2.8), (2.14) и формулы (2.9) следует, что

найдется q такое, что²

$$\begin{aligned}
 & \|u_{r\theta}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{r\theta})\|_p \\
 &= \left\| \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{r\theta}) \right\|_p \\
 &\leq \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{|t_j - a_j|^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j)!} \|A_j^{n_j}(v_{r\theta})\|_p \\
 &< \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} C_p \|v_{r\theta}\|_q \frac{(\alpha(A_s) + \varepsilon_s)^{n_s} n_s^{\beta(A_s) n_s} |t_s - a_s|^{m_s n_s + \theta_s}}{(m_s n_s)!} \\
 &\quad \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^l \frac{n_j^{(\beta(A_j) + \varepsilon_j) n_j} |t_j - a_j|^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j)!} \\
 &\leq C_p \|v_{r\theta}\|_q \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \frac{(\alpha(A_s) + \varepsilon_s)^{n_s} n_s^{m_s n_s} |t_s - a_s|^{m_s n_s + \theta_s}}{(m_s/e)^{m_s n_s} n_s^{m_s n_s}} \\
 &\quad \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^l \frac{n_j^{(\beta(A_j) + \varepsilon_j) n_j} |t_j - a_j|^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j/e)^{m_j n_j} n_j^{m_j n_j}} \\
 &= C_p \|v_{r\theta}\|_q \sum_{n_s=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_s}\right)^{m_s n_s} (\alpha(A_s) + \varepsilon_s)^{n_s} |t_s - a_s|^{m_s n_s + \theta_s} \\
 &\quad \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^l \sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_j}\right)^{m_j n_j} n_j^{(\beta(A_j) - m_j + \varepsilon_j) n_j} |t_j - a_j|^{m_j n_j + \theta_j}, \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

где $C_p = C_p^1 \dots C_p^l$, причем эта оценка справедлива для всех $r = 1, \dots, l$, $\theta = 1, \dots, m_r - 1$.

Рассуждая аналогично предыдущему случаю (так же, как и для ряда (2.4)), легко убедиться в справедливости утверждения леммы для ряда (2.5). Лемма 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если оператор A_s обладает характеристиками $\beta(A_s) = m_s$ и $\alpha(A_s) = 0$, то открытый полицилиндр $C(R, a)$, очевидно, вырождается в l -мерное векторное комплексное пространство $\mathbb{C}^l$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть все операторы A_j таковы, что $\beta(A_j) = m_j$, $0 < \alpha(A_j) < \infty$, $j = 1, \dots, l$. Тогда кратные ряды (2.4), (2.5) сходятся по топологии пространства H абсолютно в открытом полицилиндре

$$C(R, a) = \{t_j : |t_j - a_j| < R_j, 1 \leq j \leq l\}$$

и равномерно на любом компактном подмножестве $C(R, a)$, где

$$R_j = \frac{m_j}{e} \left(\frac{1}{\alpha(A_j)} \right)^{1/m_j}, \quad j = 1, \dots, l,$$

²Если $s \neq r$, то $\theta_s = 0$; если же $s = r$, то $\theta_s = \theta$.

причем на остове цилиндра $\{t_j : |t_j - a_j| = R_j, 1 \leq j \leq l\}$ может иметь место как сходимость, так и расходимость кратных рядов (2.4), (2.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. В силу лемм 1, 2 кратные ряды (2.4), (2.5) сходятся абсолютно и равномерно в некоторых областях l -мерного векторного комплексного пространства $\mathbb{C}^l$, поэтому допускают почленное дифференцирование по переменным $t_i, i = 1, \dots, l$, любое число раз. Поскольку

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{m_i} u_{00}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{00})}{\partial t_i^{m_i}} \\ &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_l=0 \\ n_i=1}}^{\infty} \frac{(t_i - a_i)^{m_i n_i - m_i}}{(m_i n_i - m_i)!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} A_j^{n_j} A_i^{n_i}(v_{00}) \\ &= A_i \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} A_j^{n_j}(v_{00}) = A_i u_{00}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{00}), \\ & \frac{\partial^{m_i} u_{r\theta}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{r\theta})}{\partial t_i^{m_i}} \\ &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_l=0 \\ n_i=1}}^{\infty} \frac{(t_i - a_i)^{m_i n_i - m_i + \theta_i}}{(m_i n_i - m_i + \theta_i)!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j} A_i^{n_i}(v_{r\theta}) \\ &= A_i \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{r\theta}) = A_i u_{r\theta}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{r\theta}), \end{aligned}$$

где $i = 1, \dots, l$, то из (2.3) следует, что для любого $i = 1, \dots, l$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m_i} u(t_1, t_2, \dots, t_l)}{\partial t_i^{m_i}} &= \frac{\partial^{m_i} u_{00}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{00})}{\partial t_i^{m_i}} + \sum_{r=1}^l \sum_{\theta=1}^{m_r-1} \frac{\partial^{m_i} u_{r\theta}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{r\theta})}{\partial t_i^{m_i}} \\ &= A_i \left(u_{00}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{00}) + \sum_{r=1}^l \sum_{\theta=1}^{m_r-1} u_{r\theta}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{r\theta}) \right) \\ &= A_i u(t_1, t_2, \dots, t_l), \end{aligned}$$

т.е. функция (2.3) является решением системы (2.1). Докажем, что функция (2.3) удовлетворяет также начальным условиям (2.2).

Легко видеть, что $u(a_1, a_2, \dots, a_l) = u_{00}(a_1, a_2, \dots, a_l, v_{00}) = v_{00}$. Кроме того,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^k u(a_1, a_2, \dots, a_l)}{\partial t_i^k} \\ &= \frac{\partial^k u_{00}(a_1, a_2, \dots, a_l, v_{00})}{\partial t_i^k} + \sum_{r=1}^l \sum_{\theta=1}^{m_r-1} \frac{\partial^k u_{r\theta}(a_1, a_2, \dots, a_l, v_{r\theta})}{\partial t_i^k} = v_{ik}, \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, l, k = 1, \dots, m_i - 1$.

Действительно, так как

$$\frac{\partial^k u_{00}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{00})}{\partial t_i^k} = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_l=0 \\ n_i=1}}^{\infty} \frac{(t_i - a_i)^{m_i n_i - k}}{(m_i n_i - k)!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} A_j^{n_j} A_i^{n_i}(v_{00}),$$

то для всех $k = 1, \dots, m_i - 1$, $i = 1, \dots, l$

$$\frac{\partial^k u_{00}(a_1, a_2, \dots, a_l, v_{00})}{\partial t_i^k} = 0.$$

Покажем, что

$$\sum_{r=1}^l \sum_{\theta=1}^{m_r-1} \frac{\partial^k u_{r\theta}(a_1, a_2, \dots, a_l, v_{r\theta})}{\partial t_i^k} = v_{ik}, \quad i = 1, \dots, l, \quad k = 1, \dots, m_i - 1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^l \sum_{\theta=1}^{m_r-1} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{r\theta}) \\ &= \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^l \sum_{\theta=1}^{m_r-1} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{r\theta}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$+ \sum_{\theta=1}^{m_i-1} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{i\theta}). \quad (2.19)$$

Так как в выражении (2.18) $r \neq i$, то в силу (2.6) имеем в (2.18) $\theta_i = 0$, поэтому для всех $k = 1, \dots, m_i - 1$, $i = 1, \dots, l$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^k}{\partial t_i^k} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^l \sum_{\theta=1}^{m_r-1} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{r\theta}) \Big|_{(a_1, a_2, \dots, a_l)} \\ &= \frac{\partial^k}{\partial t_i^k} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^l \sum_{\theta=1}^{m_r-1} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \frac{(t_i - a_i)^{m_i n_i}}{(m_i n_i)!} \\ & \quad \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j} A_i^{n_i}(v_{r\theta}) \Big|_{(a_1, a_2, \dots, a_l)} \\ &= \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^l \sum_{\theta=1}^{m_r-1} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_l=0 \\ n_i=1}}^{\infty} \frac{(t_i - a_i)^{m_i n_i - k}}{(m_i n_i - k)!} \\ & \quad \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j} A_i^{n_i}(v_{r\theta}) \Big|_{(a_1, a_2, \dots, a_l)} = 0. \end{aligned}$$

Учитывая (2.6), а также то, что в выражении (2.19) $r = i$, получаем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\theta=1}^{m_i-1} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{i\theta}) \\
 &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{ik}) \\
 & \quad + \sum_{\theta=1}^{k-1} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{i\theta}) \\
 & \quad + \sum_{\theta=k+1}^{m_i-1} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{i\theta}) \\
 &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \frac{(t_i - a_i)^{m_i n_i + k}}{(m_i n_i + k)!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} A_j^{n_j} A_i^{n_i}(v_{ik}) \\
 & \quad + \sum_{\theta=1}^{k-1} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \frac{(t_i - a_i)^{m_i n_i + \theta}}{(m_i n_i + \theta)!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} A_j^{n_j} A_i^{n_i}(v_{i\theta}) \\
 & \quad + \sum_{\theta=k+1}^{m_i-1} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \frac{(t_i - a_i)^{m_i n_i + \theta}}{(m_i n_i + \theta)!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} A_j^{n_j} A_i^{n_i}(v_{i\theta}).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для всех $k = 1, \dots, m_i - 1$, для всех $i = 1, \dots, l$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^k}{\partial t_i^k} \sum_{\theta=1}^{m_i-1} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{i\theta}) \Big|_{(a_1, a_2, \dots, a_l)} \\
 &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} A_j^{n_j}(v_{ik}) \Big|_{(a_1, a_2, \dots, a_l)} \\
 & \quad + \sum_{\theta=1}^{k-1} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_l=0 \\ n_i=1}}^{\infty} \frac{(t_i - a_i)^{m_i n_i + \theta - k}}{(m_i n_i + \theta - k)!} \\
 & \quad \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} A_j^{n_j} A_i^{n_i}(v_{i\theta}) \Big|_{(a_1, a_2, \dots, a_l)} \\
 & \quad + \sum_{\theta=k+1}^{m_i-1} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \frac{(t_i - a_i)^{m_i n_i + \theta - k}}{(m_i n_i + \theta - k)!} \\
 & \quad \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} A_j^{n_j} A_i^{n_i}(v_{i\theta}) \Big|_{(a_1, a_2, \dots, a_l)} = v_{ik}.
 \end{aligned}$$

Приведенные рассуждения доказывают, что функция (2.3) удовлетворяет начальным условиям (2.2).

Единственность решения задачи является следствием голоморфности функции (2.3). Теорема 1 доказана.

3. Теорема устойчивости. Во многих практических задачах большое значение имеет проблема непрерывной зависимости решения от заданных начальных условий. Ответ на этот вопрос дает

ТЕОРЕМА 2. Пусть операторы A_j имеют порядки $\beta(A_j) \leq m_j$, $j = 1, \dots, l$, а если хотя бы один оператор A_s имеет порядок $\beta(A_s) = m_s$, то его тип $\alpha(A_s) < \infty$. Тогда решение задачи Коши (2.1), (2.2) непрерывно зависит от начальных данных $v_{00}, v_{r\theta}$, для всех $r = 1, \dots, l$, $\theta = 1, \dots, m_r - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$K = \{t_j : |t_j - a_j| \leq \tilde{R}_j\}, \quad 0 < \tilde{R}_j < R_j, \quad j = 1, \dots, l,$$

— компактное подмножество полицилиндра $C(R, a)$.

Если $\beta(A_j) < m_j$, $j = 1, \dots, l$, то из оценок (2.10) и (2.13) на компакте K соответственно имеем

$$\begin{aligned} \max_K \|u_{00}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{00})\|_p &= \max_K \left\| \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} A_j^{n_j}(v_{00}) \right\|_p \\ &< C_p \|v_{00}\|_q \prod_{j=1}^l \sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_j} \right)^{m_j n_j} n_j^{(\beta(A_j) - m_j + \varepsilon_j) n_j} \max_{|t_j - a_j| \leq \tilde{R}_j} |t_j - a_j|^{m_j n_j} \\ &\leq C_p \|v_{00}\|_q \prod_{j=1}^l \sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_j} \right)^{m_j n_j} n_j^{(\beta(A_j) - m_j + \varepsilon_j) n_j} \tilde{R}_j^{m_j n_j}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \max_K \|u_{r\theta}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{r\theta})\|_p &= \max_K \left\| \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{r\theta}) \right\|_p \\ &< C_p \|v_{r\theta}\|_q \prod_{j=1}^l \sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_j} \right)^{m_j n_j} n_j^{(\beta(A_j) - m_j + \varepsilon_j) n_j} \max_{|t_j - a_j| \leq \tilde{R}_j} |t_j - a_j|^{m_j n_j + \theta_j} \\ &\leq C_p \|v_{r\theta}\|_q \prod_{j=1}^l \sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_j} \right)^{m_j n_j} n_j^{(\beta(A_j) - m_j + \varepsilon_j) n_j} \tilde{R}_j^{m_j n_j + \theta_j}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Если же существует оператор A_s : $\beta(A_s) = m_s$, $\alpha(A_s) < \infty$, то из оценок (2.15) и (2.17) аналогично предыдущему случаю следует, что

$$\begin{aligned} \max_K \|u_{00}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{00})\|_p &= \max_K \left\| \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j}}{(m_j n_j)!} A_j^{n_j}(v_{00}) \right\|_p \\ &< C_p \|v_{00}\|_q \sum_{n_s=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_s} \right)^{m_s n_s} (\alpha(A_s) + \varepsilon_s)^{n_s} \tilde{R}_s^{m_s n_s} \\ &\quad \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^l \sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_j} \right)^{m_j n_j} n_j^{(\beta(A_j) - m_j + \varepsilon_j) n_j} \tilde{R}_j^{m_j n_j}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
\max_K \|u_{r\theta}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{r\theta})\|_p &= \max_K \left\| \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=0}^{\infty} \prod_{j=1}^l \frac{(t_j - a_j)^{m_j n_j + \theta_j}}{(m_j n_j + \theta_j)!} A_j^{n_j}(v_{r\theta}) \right\|_p \\
&< C_p \|v_{r\theta}\|_q \sum_{n_s=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_s} \right)^{m_s n_s} (\alpha(A_s) + \varepsilon_s)^{n_s} \tilde{R}_s^{m_s n_s + \theta_s} \\
&\quad \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^l \sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\frac{e}{m_j} \right)^{m_j n_j} n_j^{(\beta(A_j) - m_j + \varepsilon_j) n_j} \tilde{R}_j^{m_j n_j + \theta_j}, \quad (3.4)
\end{aligned}$$

$\tilde{R}_s < R_s$, где R_s определяется по формуле (2.7).

Из оценок (3.1)–(3.4) следует, что при указанных условиях кратные ряды (2.4), (2.5) сходятся абсолютно и равномерно по топологии пространства H и представляют собой функции, аналитические в некоторой (в зависимости от значений $\beta(A_j)$) области l -мерного векторного пространства $\mathbb{C}^l$. А так как при этом каждая из функций $u_{00}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{00})$ и $u_{r\theta}(t_1, t_2, \dots, t_l, v_{r\theta})$ непрерывно зависит от v_{00} и $v_{r\theta}$ соответственно, то и функция $u(t_1, t_2, \dots, t_l)$ непрерывно зависит от начальных данных. Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $l = 1$. Тогда задача Коши (2.1), (2.2) принимает вид

$$u^{(m)}(t) = Au(t), \quad u^{(k)}(a) = v_k, \quad 0 \leq k \leq m-1. \quad (3.5)$$

Из равенств (2.3)–(2.6) следует, что решение задачи (3.5) задается формулой

$$u(t) = \sum_{\theta=0}^{m-1} u_{\theta}(t, v_{\theta}), \quad u_{\theta}(t, v_{\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(v_{\theta})}{(mn + \theta)!} (t - a)^{mn + \theta}.$$

При $a = 0$ сформулированный для задачи Коши (3.5) результат был получен ранее Громовым [12].

Особенность этого частного случая (задачи Коши (3.5)) состоит в том, что требования, предъявляемые к его аналитической разрешимости, могут быть ослаблены: в отличие от ситуации $l \geq 2$ здесь для существования аналитического решения достаточно, чтобы начальные значения v_k принадлежали множеству

$$M_a = \{x \in D_{\infty}(A) : \beta_p(x) \leq m \forall p; \text{ при } \beta_p(x) = m \forall p \quad \alpha(x) < \infty\},$$

в котором $D_{\infty}(A) = \bigcap_{i \geq 0} D(A^i)$, где $D(A^i)$ – область определения оператора A^i ; $\beta_p(x)$ и $\alpha(x)$ – соответственно операторный p -порядок вектора x относительно оператора A и операторный тип вектора x относительно оператора A [9]. Что же касается самого оператора A , то в данном случае достаточно его замкнутости (требование существования порядка оператора A (из которого автоматически следует его непрерывность) сохраняет свою силу лишь при исследовании устойчивости решения). Так, если мы зададимся целью найти решение задачи Коши (2.1), (2.2) при $l = 2$ (т.е. рассмотрим систему двух дифференциально-операторных уравнений) в пространстве $H(\mathbb{C})$ всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах, а в качестве операторов, стоящих в правой части системы (2.1), возьмем операторы дифференцирования $A_1(f)(z) = df(z)/dz$ и сдвига $A_2(f)(z) = f(z+1)$ (легко видеть, что они перестановочны), то окажется, что эта цель невыполнима

в рамках рассмотренного метода. Дело в том, что оператор сдвига A_2 не имеет порядка в $H(\mathbb{C})$ [9]. Однако задача Коши (3.5) в том же пространстве, где в качестве A взят оператор сдвига, может иметь решение, поскольку на конкретных векторах оператор сдвига может иметь вполне определенные характеристики, и тогда решение существует, если эти векторы принадлежат множеству M_a .

4. Примеры. Приведем несколько примеров, наглядно иллюстрирующих применение теорем 1, 2.

ПРИМЕР 1. Пусть $H = s$ – пространство всех числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с топологией покоординатной сходимости, задаваемой мультинормой $\|x\|_p = \max_{k \leq p} |x_k|$. Найдем в s решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t_1, t_2)}{\partial t_1} = A_1 u(t_1, t_2), \\ \frac{\partial u(t_1, t_2)}{\partial t_2} = A_2 u(t_1, t_2), \end{cases} \quad u(0, 1) = x^0, \quad x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots). \quad (4.1)$$

Здесь A_1 и A_2 – линейные непрерывные операторы, действующие по правилам

$$A_1(x) = A_1(x_1, x_2, \dots) = (\gamma x_1, \gamma x_2, \dots),$$

$\gamma > 0$ – фиксированное число;

$$A_2(x) = A_2(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Легко видеть, что A_1 и A_2 – коммутирующие операторы.

Привлекая формулы (2.3)–(2.6), получаем единственное решение задачи в виде

$$u(t_1, t_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{A_1^{n_1} A_2^{n_2}(x^0)}{n_1! n_2!} t_1^{n_1} (t_2 - 1)^{n_2}. \quad (4.2)$$

В силу очевидных равенств

$$\begin{aligned} A_2^{n_2}(x^0) &= (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n_2}, x_1^0, x_2^0, \dots) \quad \forall n_2 \geq 0, \\ A_1^{n_1} A_2^{n_2}(x^0) &= (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n_2}, \gamma^{n_1} x_1^0, \gamma^{n_1} x_2^0, \dots) \quad \forall n_1, n_2 \geq 0 \end{aligned}$$

решению (4.2) можно дать представление

$$u(t_1, t_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n_2}, \gamma^{n_1} x_1^0, \gamma^{n_1} x_2^0, \dots) \frac{t_1^{n_1} (t_2 - 1)^{n_2}}{n_1! n_2!}.$$

Поскольку операторы A_1 и A_2 имеют порядки $\beta(A_1) = 0 < m_1 = 1$ и $\beta(A_2) = -\infty < m_2 = 1$ [9], то по теореме 1 вектор-функция $u(t_1, t_2)$ является целой, а по теореме 2 решение задачи (4.1) является устойчивым относительно любого начального вектора x^0 .

ПРИМЕР 2. Пусть $H = H(\mathbb{C})$ – пространство всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах: $\|f(z)\|_p = \max_{|z| \leq p} |f(z)|$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t_1, t_2, z)}{\partial t_1^2} = \frac{\partial^2 u(t_1, t_2, z)}{\partial z^2} + u(t_1, t_2, z), \\ \frac{\partial^3 u(t_1, t_2, z)}{\partial t_2^3} = \frac{\partial^3 u(t_1, t_2, z)}{\partial z^3} + \frac{\partial u(t_1, t_2, z)}{\partial z} \end{cases} \quad (4.3)$$

и найдем ее решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(i, 2, z) = \sin z, \quad \frac{\partial u(i, 2, z)}{\partial t_1} = \cos z, \quad \frac{\partial u(i, 2, z)}{\partial t_2} = e^{2z}, \quad \frac{\partial^2 u(i, 2, z)}{\partial t_2^2} = e^{z+1}. \quad (4.4)$$

В данном случае $A_1 = \partial^2/\partial z^2 + E$, $A_2 = \partial^3/\partial z^3 + \partial/\partial z$, где E – тождественный оператор. Очевидно, $A_1 A_2 = A_2 A_1$.

Обращаясь к формулам (2.3)–(2.6), находим решение задачи Коши (4.3), (4.4):

$$\begin{aligned} u(t_1, t_2, z) = & \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{A_1^{n_1}}{(2n_1)!} \left\{ \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{A_2^{n_2}(\sin z)}{(3n_2)!} (t_2 - 2)^{3n_2} \right\} (t_1 - i)^{2n_1} \\ & + \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{A_1^{n_1}}{(2n_1 + 1)!} \left\{ \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{A_2^{n_2}(\cos z)}{(3n_2)!} (t_2 - 2)^{3n_2} \right\} (t_1 - i)^{2n_1 + 1} \\ & + \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{A_1^{n_1}}{(2n_1)!} \left\{ \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{A_2^{n_2}(e^{2z})}{(3n_2 + 1)!} (t_2 - 2)^{3n_2 + 1} \right\} (t_1 - i)^{2n_1} \\ & + \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{A_1^{n_1}}{(2n_1)!} \left\{ \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{A_2^{n_2}(e^{z+1})}{(3n_2 + 2)!} (t_2 - 2)^{3n_2 + 2} \right\} (t_1 - i)^{2n_1}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Учитывая равенства

$$\begin{aligned} A_2^{n_2}(\sin z) &= A_2^{n_2}(\cos z) = 0 & \forall n_2 \geq 1, \\ A_1^{n_1}(\sin z) &= A_1^{n_1}(\cos z) = 0 & \forall n_1 \geq 1, \\ A_2^{n_2}(e^{2z}) &= 10^{n_2} e^{2z}, \quad A_2^{n_2}(e^{z+1}) = 2^{n_2} e^{z+1} & \forall n_2 \geq 0, \\ A_1^{n_1}(e^{2z}) &= 5^{n_1} e^{2z}, \quad A_1^{n_1}(e^{z+1}) = 2^{n_1} e^{z+1} & \forall n_1 \geq 0, \end{aligned}$$

а также формулу [16]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+\varepsilon}}{(3k+\varepsilon)!} = \frac{1}{3} e^x - \frac{2}{3} e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{(-1)^\varepsilon \pi}{3}\right), \quad \varepsilon = 1 \quad \text{или} \quad \varepsilon = 2,$$

равенству (4.5) можно придать вид

$$\begin{aligned} u(t_1, t_2, z) &= \sin z + (t_1 - i) \cos z \\ &+ \frac{e^{2z}}{\sqrt[3]{10}} \operatorname{ch}(\sqrt{5}(t_1 - i)) \left(\frac{1}{3} e^{\sqrt[3]{10}(t_2-2)} - \frac{2}{3} e^{-\sqrt[3]{10}(t_2-2)/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{10}}{2}(t_2 - 2) + \frac{\pi}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{e^{z+1}}{\sqrt[3]{4}} \operatorname{ch}(\sqrt{2}(t_1 - i)) \left(\frac{1}{3} e^{\sqrt[3]{2}(t_2-2)} - \frac{2}{3} e^{-\sqrt[3]{2}(t_2-2)/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2}(t_2 - 2) - \frac{\pi}{3}\right) \right). \quad (4.6)$$

Как известно, оператор дифференцирования d/dz имеет в $H(\mathbb{C})$ p -порядки

$$\beta_p\left(\frac{d}{dz}\right) = \beta\left(\frac{d}{dz}\right) = 1$$

и p -типы

$$\alpha_p\left(\frac{d}{dz}\right) = \alpha\left(\frac{d}{dz}\right) = 0$$

при всех p [9]. Тогда по свойству p -порядков и p -типов оператора [9] имеем

$$\begin{aligned} \beta_p\left(\frac{d^3}{dz^3}\right) &= \beta\left(\frac{d^3}{dz^3}\right) = 3, & \beta_p\left(\frac{d^2}{dz^2}\right) &= \beta\left(\frac{d^2}{dz^2}\right) = 2 & \forall p, \\ \alpha_p\left(\frac{d^3}{dz^3}\right) &= \alpha\left(\frac{d^3}{dz^3}\right) = 0, & \alpha_p\left(\frac{d^2}{dz^2}\right) &= \alpha\left(\frac{d^2}{dz^2}\right) = 0 & \forall p. \end{aligned}$$

Кроме того, из очевидного равенства $\|E^n(F)\|_p = \|F\|_p$ вытекает, что тождественный оператор имеет в $H(\mathbb{C})$ порядок $\beta(E) = 0$ и тип $\alpha(E) = 1$. Так как $\beta(d^2/dz^2) > \beta(E)$, $\beta(d^3/dz^3) > \beta(d/dz)$, то из теоремы о порядке и типе суммы операторов [9] следует, что

$$\begin{aligned} \beta(A_1) &= \beta\left(\frac{d^2}{dz^2} + E\right) = \beta\left(\frac{d^2}{dz^2}\right) = 2 = m_1, \\ \beta(A_2) &= \beta\left(\frac{d^3}{dz^3} + \frac{d}{dz}\right) = \beta\left(\frac{d^3}{dz^3}\right) = 3 = m_2, \end{aligned}$$

а поскольку $\beta(d^2/dz^2) \geq 1$, $\beta(d^3/dz^3) \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \alpha(A_1) &= \alpha\left(\frac{d^2}{dz^2} + E\right) = \alpha\left(\frac{d^2}{dz^2}\right) = 0, \\ \alpha(A_2) &= \alpha\left(\frac{d^3}{dz^3} + \frac{d}{dz}\right) = \alpha\left(\frac{d^3}{dz^3}\right) = 0. \end{aligned}$$

Тогда по теореме 1 вектор-функция (4.6) является аналитической в открытом полицилиндре, который в силу замечания 1 вырождается в двумерное векторное комплексное пространство $\mathbb{C}^2$, т.е. вектор-функция (4.6) является целой. А по теореме 2 решение задачи Коши (4.3), (4.4) является устойчивым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж. Лере, Л. Гординг, Т. Котакке, *Задача Коши. Униформизация и асимптотическое разложение решения линейной задачи Коши с голоморфными данными. Аналогия с теорией асимптотических и приближенных волн*, Мир, М., 1967.
- [2] А. Tychonoff, “Théorèmes d’unicité pour l’équation de la chaleur”, *Матем. сб.*, **42:2** (1935), 199–216.
- [3] И. Г. Петровский, *Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия*, Наука, М., 1986.

- [4] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Обобщенные функции, **3**, Физматгиз, М., 1958.
- [5] Ю. А. Дубинский, “Задача Коши и псевдодифференциальные операторы в комплексной области”, *УМН*, **45:2** (1990), 115–142.
- [6] Ю. А. Дубинский, *Задача Коши в комплексной области*, МЭИ, М., 1996.
- [7] В. П. Громов, “Порядок и тип линейного оператора и разложение в ряд по собственным функциям”, *Докл. АН СССР*, **288:1** (1986), 27–31.
- [8] В. П. Громов, “Порядок и тип оператора и целые векторнозначные функции”, *Ученые записки лаборатории теории функций и функционального анализа ОГУ*, 1999, № 1, 6–23.
- [9] В. П. Громов, С. Н. Мишин, С. В. Панюшкин, *Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения*, ОГУ, Орел, 2009.
- [10] С. Н. Мишин, “О порядке и типе оператора”, *Докл. РАН*, **381:3** (2001), 309–312.
- [11] С. Н. Мишин, *Операторы конечного порядка в локально выпуклых пространствах и их применение*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, ОГУ, Орел, 2002.
- [12] В. П. Громов, “Аналитические решения дифференциально-операторных уравнений в локально-выпуклых пространствах”, *Докл. РАН*, **394:3** (2004), 305–308.
- [13] Н. А. Аксенов, “Об одном обобщении задачи Коши для линейного дифференциально-операторного уравнения первого порядка”, *Современная математика и проблемы математического образования*, Материалы всероссийской заочной научно-практической конференции, Изд-во ОГУ, Орел, 2009, 29–35.
- [14] Н. А. Аксенов, “Абстрактная задача Коши для дифференциально-операторного уравнения произвольного порядка с начальными условиями, имеющими однозначное соотношение с порядком уравнения”, *Ученые записки ОГУ. Сер. естеств., техн. и мед. науки*, **2(32)** (2009), 5–11.
- [15] Н. А. Аксенов, “Об одном аналоге задачи Дирихле для линейного дифференциально-операторного уравнения второго порядка”, *Современные проблемы математики, механики и их приложений*, Материалы международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовниченко (30 марта–2 апреля 2009 г.), Изд-во “Университетская книга”, М., 2009, 15.
- [16] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. В 3 т., т. 1: Элементарные функции*, Физматлит, М., 2003.

Н. А. Аксенов

Орловский государственный университет
E-mail: aksenovna@inbox.ru

Поступило

25.11.2009