Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Эфендиев, Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 4, 620–628

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8789>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 09:37:54

Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной

Б. И. Эфендиев

В работе строится фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной. С помощью фундаментального решения определяется функция Грина задачи Дирихле и при соблюдении условия разрешимости выписывается решение задачи Дирихле для исследуемого уравнения.

Библиография: 17 названий.

DOI: 10.4213/mzm8789

1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u''(x) + \lambda D_{0x}^{[\alpha, \beta]} u(x) = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

где $D_{ax}^{[\alpha, \beta]} u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} D_{ax}^{\gamma} u(x) d\gamma$ – оператор интегро-дифференцирования континуального порядка $[\alpha, \beta]$ [1], [2; с. 33],

$$D_{ax}^{\gamma} u(x) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(-\gamma)} \int_a^x \frac{u(t) dt}{|x-t|^{\gamma+1}}, & \gamma < 0, \\ u(x), & \gamma = 0, \\ \text{sign}^n(x-a) \left(\frac{d}{dx} \right)^n D_{ax}^{\gamma-n} u(x), & n-1 < \gamma \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

– оператор интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля дробного порядка γ [1], [2; с. 9]; $\alpha, \beta, \lambda = \text{const}$, $0 \leq \alpha < \beta < 1$.

Уравнение (1) относится к классу непрерывных дифференциальных уравнений [3; с. 100], [4]. Непрерывные дифференциальные уравнения являются основой математических моделей, описывающих широкий класс физических и химических процессов, протекающих в средах с фрактальной структурой [2; гл. 5].

Исследованию задачи Коши для дифференциального уравнения дробного порядка посвящена работа Барретта [5]. Для обыкновенного дифференциального уравнения с обобщенным оператором дробного дифференцирования Джрбашяном и Нерсесяном рассмотрена задача Коши [6]. В работе [7] Псху исследована начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-96510).

с производными Римана–Лиувилля, а в [8] для этого же уравнения Гадзовой решена обобщенная задача Дирихле.

В данной работе строится фундаментальное решение уравнения (1). С помощью фундаментального решения определяется функция Грина задачи Дирихле для уравнения (1) и при соблюдении условия разрешимости выписывается решение задачи Дирихле для уравнения (1). Результаты данной статьи перекликаются с результатами работы [9], в которой был поставлен вопрос о количестве вещественных собственных значений задачи

$$y''(x) + \lambda D_{0x}^\alpha y(x) = 0, \quad 0 < x, \alpha < 1, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (2)$$

и выдвинута гипотеза о наличии вещественных собственных значений задачи (2) при небольших значениях α . Первые результаты по этому вопросу имеются в работах [10] (где показано, что эта задача не имеет вещественных собственных значений при $2/3 \leq \alpha < 1$) и [11] (где доказано, что при $0 < \alpha \leq 1/3$ задача (2) имеет вещественные собственные значения, установлены границы, в которых они лежат, при $0 < \alpha \leq 1/6$ произведена локализация, а также выведена асимптотика количества вещественных собственных значений задачи (2) при $\alpha \rightarrow +0$). Позднее, в работе [12; с. 145] дано усиление результатов из [10] и [11], а именно, доказано, что задача (2) имеет не менее двух вещественных собственных значений при $0 < \alpha \leq 0.36$ и не имеет собственных значений на $\mathbb{R}$ при $\alpha \in [0.45, 1[$. Компьютерные вычисления дают наличие вещественных собственных значений при $0 < \alpha \leq 0.4$ и отсутствие их на $\mathbb{R}$ при $0.41 \leq \alpha < 1$ [12; с. 146].

Одним из итогов этой работы является получение результатов, аналогичных некоторым результатам работы [11].

2. Постановка задачи. *Регулярным решением уравнения (1) в интервале $]0, l[$ назовем функцию $u = u(x)$, принадлежащую классу $C[0, l] \cap C^2]0, l[$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $x \in]0, l[$.*

Сформулируем задачу Дирихле для уравнения (1): *найти регулярное решение $u = u(x)$ уравнения (1) в интервале $]0, l[$, удовлетворяющее следующим условиям:*

$$u(0) = a, \quad u(l) = b, \quad (3)$$

где $a, b = \text{const}$.

3. Фундаментальное решение. Обозначим через

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) dt$$

свертку Лапласа функций $f(x)$ и $g(x)$.

Рассмотрим функцию

$$G(x) = G(x; \lambda, \alpha, \beta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \nu_n(x), \quad (4)$$

где

$$\nu_0(x) = x, \quad \nu_n(x) = \nu_{n-1} * \left[\frac{\text{Vi}(2 - \beta, 2 - \alpha, x)}{x} \right], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

и (см. [1])

$$\text{Vi}(\gamma, \delta, x) = \int_{\gamma}^{\delta} \frac{x^s}{\Gamma(s)} ds, \quad x \geq 0, \quad 0 \leq \gamma \leq \delta, \quad (6)$$

$\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера.

ЛЕММА 1. Для функций $\nu_n(x)$, $\nu'_n(x)$ и $\nu''_n(x)$ при $x > 0$ справедливы оценки

$$0 \leq \nu_n(x) \leq \frac{2^n(\beta - \alpha)^n \Gamma^n(2 - \sigma)}{\Gamma[2 + n(2 - \sigma)]} x^{n(2 - \sigma) + 1}, \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad (7)$$

$$0 \leq \nu'_n(x) \leq \frac{2^n(\beta - \alpha)^n \Gamma^n(2 - \sigma)}{\Gamma[1 + n(2 - \sigma)]} x^{n(2 - \sigma)}, \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad (8)$$

$$0 \leq \nu''_n(x) \leq \frac{2^n(\beta - \alpha)^n \Gamma^n(2 - \sigma)}{\Gamma[n(2 - \sigma)]} x^{n(2 - \sigma) - 1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

где

$$\sigma = \begin{cases} \beta, & x \in]0, 1[, \\ \alpha, & x \in]1, \infty[. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < \gamma < \delta$. Так как $1/\Gamma(s) < 2$ для любого $s > 0$ [13; с. 543], то из формулы (6) следует неравенство

$$\begin{aligned} 0 \leq \text{Vi}(\gamma, \delta, x) &= \int_{\gamma}^{\delta} \frac{x^s}{\Gamma(s)} ds \leq 2 \int_{\gamma}^{\delta} x^s ds \\ &= 2 \frac{x^{\delta} - x^{\gamma}}{\ln x} = \frac{2}{\ln x} \begin{cases} x^{\gamma}(x^{\delta - \gamma} - 1), & 0 < x < 1, \\ x^{\delta}(1 - x^{\gamma - \delta}), & x > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим

$$y_1(x) = \frac{x^{\delta - \gamma} - 1}{\ln x}, \quad y_2(x) = \frac{1 - x^{\gamma - \delta}}{\ln x}.$$

При $0 < x < 1$ функция $y'_1(x) > 0$, а при $x > 1$ выполнено $y'_2(x) < 0$. Учитывая

$$\lim_{x \rightarrow 0+} y_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} y_1(x) = \delta - \gamma, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} y_2(x) = \delta - \gamma, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y_2(x) = 0,$$

из (10) получаем

$$0 \leq \text{Vi}(\gamma, \delta, x) \leq 2(\delta - \gamma) \begin{cases} x^{\gamma}, & x \in]0, 1[, \\ x^{\delta}, & x \in]1, \infty[. \end{cases} \quad (11)$$

В силу неравенства (11) из (5) имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq \nu_n(x) &\leq 2(\beta - \alpha)(\nu_{n-1} * x^{1 - \sigma}) \leq \frac{2^2(\beta - \alpha)^2 \Gamma^2(2 - \sigma)}{\Gamma[2(2 - \sigma)]} (\nu_{n-2} * x^{2(2 - \sigma) - 1}) \leq \dots \\ &\leq \frac{2^n(\beta - \alpha)^n \Gamma^n(2 - \sigma)}{\Gamma[n(2 - \sigma)]} (\nu_0 * x^{n(2 - \sigma) - 1}) \leq \frac{2^n(\beta - \alpha)^n \Gamma^n(2 - \sigma)}{\Gamma[2 + n(2 - \sigma)]} x^{n(2 - \sigma) + 1}. \end{aligned}$$

Аналогично доказываются неравенства (8) и (9). Лемма 1 доказана.

Дифференцируя дважды соотношение (4), получим, что

$$G'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \nu'_n(x), \quad G''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \nu''_n(x). \quad (12)$$

Из неравенств (7), (8) и (9) следует, что ряды (4), (12) равномерно сходятся на любом конечном промежутке к непрерывным функциям $G(x)$, $G'(x)$, $G''(x)$ соответственно.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < t < x$ и $g(x, t) = G(x - t)$. Тогда

1) функция $g(x, t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, t) + \lambda D_{tx}^{[\alpha, \beta]} g(x, t) = 0, \quad g(t, t) = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} g(x, t) \right]_{x=t} = 1 \quad (13)$$

при фиксированном значении t ;

2) функция $g(x, t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x, t) - \lambda D_{xt}^{[\alpha-1, \beta-1]} \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) = 0, \quad g(x, x) = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} g(x, t) \right]_{t=x} = -1 \quad (14)$$

по переменной t при фиксированном значении x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из соотношений (4) и (12) получим, что

$$\begin{aligned} g(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \nu_n(x - t), & \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \frac{\partial}{\partial x} \nu_n(x - t), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nu_n(x - t). \end{aligned} \quad (15)$$

В силу равенства $D_{0x}^{[\alpha, \beta]} \nu_n(x) = \nu''_{n+1}(x)$ и сходимости второго ряда (12) имеем

$$D_{tx}^{[\alpha, \beta]} g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n D_{tx}^{[\alpha, \beta]} \nu_n(x - t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nu_{n+1}(x - t). \quad (16)$$

Из равенств (15), (16) следует, что функция $g(x, t)$ является решением задачи (13).

Вторая часть леммы 2 доказывается аналогично.

Функцию $g(x, t) = G(x - t)$, которая удовлетворяет условиям леммы 2, будем называть *фундаментальным решением уравнения (1)*.

ЛЕММА 3. Для функции $G(x; \lambda, \alpha, \beta)$ справедливо следующее интегральное представление:

$$G(x; \lambda, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \omega\pi)} \frac{e^{xp} \ln p}{p^2 \ln p + \lambda[p^\beta - p^\alpha]} dp, \quad \frac{1}{2} < \omega \leq 1, \quad \lambda \geq 0, \quad (17)$$

где

$$\gamma(r, \omega\pi) = \{p : |p| = r, |\arg p| \leq \omega\pi\} \cup \{p : |p| \geq r, \arg p = \pm\omega\pi\}$$

– контур Ханкеля. Направление обхода выбрано в сторону неубывания $\arg p$ [14; с. 11].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к равенству (4) преобразование Лапласа

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\text{Vi}(2-\beta, 2-\alpha, x)}{x}; p\right\} &= \frac{p^{\beta-2} - p^{\alpha-2}}{\ln p}, \quad \mathcal{L}\{\nu_n(x); p\} = \frac{1}{p^2} \left[\frac{p^{\beta-2} - p^{\alpha-2}}{\ln p} \right]^n, \\ \mathcal{L}\{G(x; \lambda, \alpha, \beta); p\} &= \frac{1}{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \left[\frac{p^{\beta-2} - p^{\alpha-2}}{\ln p} \right]^n \\ &= \frac{1}{p^2} \left[\frac{1}{1 + \lambda(p^{\beta-2} - p^{\alpha-2})/\ln p} \right] = \frac{\ln p}{p^2 \ln p + \lambda[p^{\beta} - p^{\alpha}]}. \quad (18)\end{aligned}$$

Сделав обратное преобразование Лапласа, функцию $G(x; \lambda, \alpha, \beta)$ запишем в виде

$$G(x; \lambda, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{xp} \ln p}{p^2 \ln p + \lambda[p^{\beta} - p^{\alpha}]} dp, \quad c > 0. \quad (19)$$

Покажем, что подынтегральное выражение в (19) не имеет особенности в области $|\arg p| < \pi/2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $|p| > 0$. Преобразуем подынтегральное выражение равенства (19):

$$\frac{e^{xp} \ln p}{p^2 \ln p + \lambda[p^{\beta} - p^{\alpha}]} = e^{xp} \left[p^2 \left(1 + \lambda \int_{\alpha}^{\beta} p^{s-2} ds \right) \right]^{-1}.$$

Из равенств $\text{Re}(p^2) = |p|^2 \cos(2 \arg p)$, $\text{Im}(p^2) = |p|^2 \sin(2 \arg p)$ в силу того, что функции синус и косинус для любых значений аргумента одновременно в нуль не обращаются, следует, что $p^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $|p| = 0$. А так как $|p| > 0$, то $p^2 \neq 0$. Из

$$\begin{aligned}\text{Re} \int_{\alpha}^{\beta} p^{s-2} ds &= \int_{\alpha}^{\beta} |p|^{s-2} \cos((s-2) \arg p) ds, \\ \text{Im} \int_{\alpha}^{\beta} p^{s-2} ds &= \int_{\alpha}^{\beta} |p|^{s-2} \sin((s-2) \arg p) ds\end{aligned}$$

следует, что $\text{Im} \int_{\alpha}^{\beta} p^{s-2} ds = 0$ тогда и только тогда, когда $\arg p = 0$. Но, если $\arg p = 0$, то $\text{Re} \int_{\alpha}^{\beta} p^{s-2} ds = \int_{\alpha}^{\beta} |p|^{s-2} ds > 0$. Отсюда следует, что выражение $1 + \lambda \int_{\alpha}^{\beta} p^{s-2} ds$ не обращается в нуль при $\lambda \geq 0$, $|\arg p| < \pi/2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Значит, подынтегральное выражение не имеет особенности при $|\arg p| < \pi/2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $|p| > 0$. При этом функция

$$\frac{\ln p}{p^2 \ln p + \lambda[p^{\beta} - p^{\alpha}]} \rightarrow 0$$

при $|p| \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\arg p$. Поэтому значение интеграла в (19) не изменится, если контур $(c - i\infty, c + i\infty)$ деформировать в контур Ханкеля $\gamma(r, \omega\pi)$, $1/2 < \omega \leq 1$, в результате которого получим интегральное представление (17). Лемма 3 доказана.

4. Функция Грина. Рассмотрим функцию

$$\mathcal{G}(x, t) = \begin{cases} G(x-t; \lambda, \alpha, \beta) - \frac{G(x; \lambda, \alpha, \beta)G(l-t; \lambda, \alpha, \beta)}{G(l; \lambda, \alpha, \beta)}, & x > t, \\ -\frac{G(x; \lambda, \alpha, \beta)G(l-t; \lambda, \alpha, \beta)}{G(l; \lambda, \alpha, \beta)}, & x < t. \end{cases} \quad (20)$$

ЛЕММА 4. Функция $\mathcal{G}(x, t)$ обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{G}(x, t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{G}(x, t) - \lambda D_{lt}^{[\alpha-1, \beta-1]} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, t) = 0, \quad (21)$$

$$\mathcal{G}(x, 0) = 0, \quad \mathcal{G}(x, l) = 0; \quad (22)$$

2) $\mathcal{G}(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, x + \delta) - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, x - \delta) \right] = 1. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 имеем, что при $x > t$ и $x < t$ функция $\mathcal{G}(x, t)$ является решением уравнения (21). Подставляя непосредственно в представление (20) 0 и l вместо t , получаем (22).

Теперь докажем равенство (23). Продифференцируем (20) по t . Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, t) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} G(x - t; \lambda, \alpha, \beta) - G(x; \lambda, \alpha, \beta) \frac{\partial}{\partial t} \frac{G(l - t; \lambda, \alpha, \beta)}{G(l; \lambda, \alpha, \beta)}, & x > t, \\ -G(x; \lambda, \alpha, \beta) \frac{\partial}{\partial t} \frac{G(l - t; \lambda, \alpha, \beta)}{G(l; \lambda, \alpha, \beta)}, & x < t. \end{cases}$$

Тогда в силу равенства $(\partial/\partial t)G(0; \lambda, \alpha, \beta) = -1$ получим

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, x + \delta) - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, x - \delta) \right] \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[-G(x; \lambda, \alpha, \beta) \frac{\partial}{\partial t} \frac{G(l - x - \delta; \lambda, \alpha, \beta)}{G(l; \lambda, \alpha, \beta)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial t} G(\delta; \lambda, \alpha, \beta) + G(x; \lambda, \alpha, \beta) \frac{\partial}{\partial t} \frac{G(l - x + \delta; \lambda, \alpha, \beta)}{G(l; \lambda, \alpha, \beta)} \right] = 1. \end{aligned}$$

Функцию $\mathcal{G}(x, t)$, удовлетворяющую условию леммы 4, будем называть *функцией Грина задачи Дирихле для уравнения (1)*.

5. Представление решения. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x) \in L[0, l] \cap C]0, l[$ и выполнено условие $G(l; \lambda, \alpha, \beta) \neq 0$. Тогда задача Дирихле (3) для уравнения (1) однозначно разрешима и решение имеет вид

$$u(x) = -a \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, 0) + b \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, l) + \int_0^l \mathcal{G}(x, t) f(t) dt. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (1). Проинтегрируем выражение $\mathcal{G}(x, t) Lu(t)$ по переменной t от ε до $l - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < l$:

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \mathcal{G}(x, t) u''(t) dt + \lambda \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \mathcal{G}(x, t) D_{0t}^{[\alpha, \beta]} u(t) dt = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \mathcal{G}(x, t) f(t) dt. \quad (25)$$

Интегрируя по частям выражение (25) с учетом (23) и равенства

$$D_{0x}^{[\alpha-1, \beta-1]} u(x) = \int_0^x \frac{1}{x-t} \text{Vi}(1-\beta, 1-\alpha, x-t) u(t) dt,$$

имеем

$$\begin{aligned}
 u(x) + \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{G}(x, t) dt \\
 - \mathcal{G}(x, \varepsilon) u'(\varepsilon) + \mathcal{G}(x, l - \varepsilon) u'(l - \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, \varepsilon) u(\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, l - \varepsilon) u(l - \varepsilon) \\
 - \lambda \mathcal{G}(x, \varepsilon) \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon - t} \text{Vi}(1 - \beta, 1 - \alpha, \varepsilon - t) u(t) dt \\
 + \lambda \mathcal{G}(x, l - \varepsilon) \int_0^{l-\varepsilon} \frac{1}{l - \varepsilon - t} \text{Vi}(1 - \beta, 1 - \alpha, l - \varepsilon - t) u(t) dt \\
 - \lambda \int_0^{\varepsilon} u(s) \int_{\varepsilon}^x \frac{1}{t - s} \text{Vi}(1 - \beta, 1 - \alpha, t - s) \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, t) dt ds \\
 - \lambda \int_{\varepsilon}^x u(s) \int_s^x \frac{1}{t - s} \text{Vi}(1 - \beta, 1 - \alpha, t - s) \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, t) dt ds \\
 - \lambda \int_0^x u(s) \int_x^{l-\varepsilon} \frac{1}{t - s} \text{Vi}(1 - \beta, 1 - \alpha, t - s) \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, t) dt ds \\
 - \lambda \int_x^{l-\varepsilon} u(s) \int_s^{l-\varepsilon} \frac{1}{t - s} \text{Vi}(1 - \beta, 1 - \alpha, t - s) \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, t) dt ds \\
 = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \mathcal{G}(x, t) f(t) dt.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ в (26), получаем, что интегралы

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon - t} \text{Vi}(1 - \beta, 1 - \alpha, \varepsilon - t) u(t) dt, \\
 \int_0^{\varepsilon} u(s) \int_{\varepsilon}^x \frac{1}{t - s} \text{Vi}(1 - \beta, 1 - \alpha, t - s) \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, t) dt ds
 \end{aligned}$$

обращаются в нуль в силу оценки (11). Тогда после элементарных преобразований формула (26) примет вид

$$\begin{aligned}
 u(x) + \int_0^l u(t) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{G}(x, t) - \lambda D_{lt}^{[\alpha-1, \beta-1]} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, t) \right] dt \\
 = \int_0^l \mathcal{G}(x, t) f(t) dt + u(l) \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, l) - u(0) \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x, 0) \\
 - [u'(l) - \lambda D_{0l}^{[\alpha-1, \beta-1]} u(t)] \mathcal{G}(x, l) + u'(0) \mathcal{G}(x, 0).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Из соотношения (27) следует, что если $\mathcal{G}(x, t)$ есть функция Грина, то решение задачи Дирихле (3) для уравнения (1) определяется формулой (24).

6. О спектре задачи Дирихле для уравнения (1). Вопрос об однозначной разрешимости задачи Дирихле для уравнения (1) сводится к вопросу существования вещественных нулей у $G(l; \lambda, \alpha, \beta)$ (как функции переменной λ).

ЛЕММА 5. Пусть $\alpha, \beta \in [0, 1/3]$ и $\beta - \alpha$ достаточно мало. Тогда функция $\varphi(\lambda) = G(l; \lambda, \alpha, \beta)$ имеет вещественные нули.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ – вещественное положительное число. Обозначим $\lambda_\beta = \lambda/(\beta - \alpha)$. Так как интеграл (17) сходится равномерно для любых $0 < \alpha, \beta < 1$ и

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{p^\beta - p^\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{dp^\alpha}{d\alpha} = p^\alpha \ln p,$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \alpha} G(l; \lambda_\beta, \alpha, \beta) &= \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \omega\pi)} \frac{e^{lp} \ln p \, dp}{p^2 \ln p + \lambda_\beta [p^\beta - p^\alpha]} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \omega\pi)} \frac{e^{lp} \ln p \, dp}{p^2 \ln p + \lambda \lim_{\beta \rightarrow \alpha} (p^\beta - p^\alpha)/(\beta - \alpha)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \omega\pi)} \frac{e^{lp} p^{-\alpha} dp}{p^{2-\alpha} + \lambda} = l E_{1/(2-\alpha)}(-\lambda l^{2-\alpha}; 2), \end{aligned} \quad (28)$$

где $E_\rho(z; \mu)$ – функция типа Миттаг-Леффлера [15; с. 117].

Функция $E_{1/(2-\alpha)}(z; 2)$ при значениях $0 < \alpha \leq 1/3$ имеет вещественные отрицательные нули [7] (при $z < 0$ принимает как положительные, так и отрицательные значения). Из соотношения (28) следует, что найдутся такие β_0 и λ_{β_0} , что функция $G(l; \lambda_{\beta_0}, \alpha, \beta_0)$ принимает отрицательные значения. С другой стороны, при этом же значении β_0 $G(l; 0, \alpha, \beta_0) = l > 0$. Отсюда следует, что функция $\varphi(\lambda) = G(l; \lambda, \alpha, \beta_0)$ имеет вещественные нули.

ЛЕММА 6. *Функция $\varphi(\lambda) = G(l; \lambda, \alpha, \beta)$ может иметь лишь конечное число вещественных нулей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем предел при $\lambda \rightarrow \infty$ от функции $\lambda G(l; \lambda, \alpha, \beta)$. В силу равномерной сходимости интеграла (17) при $\lambda > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda G(l; \lambda, \alpha, \beta) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\gamma(r, \omega\pi)} \frac{e^{lp} \ln p}{\lambda^{-1} p^2 \ln p + [p^\beta - p^\alpha]} dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \omega\pi)} \frac{e^{lp} \ln p}{\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-1} p^2 \ln p + [p^\beta - p^\alpha]} dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \omega\pi)} \frac{e^{lp} \ln p}{p^\beta - p^\alpha} dp = w_{\alpha, \beta}(l, 0), \end{aligned} \quad (29)$$

где $w_{\alpha, \beta}(x, \lambda)$ – фундаментальное решение уравнения [16]

$$D_{0x}^{[\alpha, \beta]} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad \alpha < \beta, \quad 0 < \beta \leq 1.$$

В работе [16] доказано, что при $x > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ функция $w_{\alpha, \beta}(x, \lambda) > 0$.

Из равенства (29) следует, что начиная с некоторого λ функция $G(l; \lambda, \alpha, \beta) > 0$. В силу леммы 1 заключаем, что $G(l; \lambda, \alpha, \beta)$ является целой функцией параметра λ . Поэтому она в ограниченной области может иметь лишь конечное число вещественных нулей [17; с. 77].

Из лемм 2, 5 и 6 вытекает такое следствие.

ТЕОРЕМА 2. 1) При $\alpha, \beta \in [0, 1/3]$ и достаточно малом $\beta - \alpha$ существуют $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых однородная задача Дирихле для однородного уравнения (1) имеет нетривиальное решение.

2) Задача Дирихле для уравнения (1) однозначно разрешима для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, за исключением конечного числа значений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Нахушев, “О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа”, *Дифференц. уравнения*, **34**:1 (1998), 101–109.
- [2] А. М. Нахушев, *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003.
- [3] В. Вольтерра, *Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений*, Наука, М., 1982.
- [4] А. М. Нахушев, “О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах”, *Докл. АН СССР*, **300**:4 (1988), 796–799.
- [5] J. H. Barrett, “Differential equations of non-integer order”, *Canad. J. Math.*, **6**:4 (1954), 529–541.
- [6] М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсисян, “Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка”, *Изв. АН Армянской ССР*, **3**:1 (1968), 3–29.
- [7] А. В. Псху, “Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка”, *Матем. сб.*, **202**:4 (2011), 111–122.
- [8] Л. Х. Гадзова, “Обобщенная задача Дирихле для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами”, *Дифференц. уравнения*, **50**:1 (2014), 121–125.
- [9] А. М. Нахушев, “Задача Штурма–Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах”, *ДАН СССР*, **234**:2 (1977), 308–311.
- [10] А. В. Псху, “О вещественных нулях функции типа Миттаг-Леффлера”, *Матем. заметки*, **77**:4 (2005), 592–599.
- [11] А. Ю. Попов, “О количестве вещественных собственных значений одной краевой задачи для уравнения второго порядка с дробной производной”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:6 (2006), 137–155.
- [12] А. Ю. Попов, А. М. Седлецкий, “Распределение корней функций Миттаг-Леффлера”, *Теория функций*, СМФН, **40**, РУДН, М., 2011, 3–171.
- [13] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, ГИТТЛ, М., 1950.
- [14] А. В. Псху, *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005.
- [15] М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966.
- [16] А. В. Псху, “Фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения континуального порядка”, *Докл. Адыгской (Черкесской) Международной АН*, **9**:1 (2007), 30–36.
- [17] А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов, *Теория функций комплексной переменной*, Курс высшей математики и математической физики, **4**, Наука, М., 1967.

Б. И. Эфендиев

Научно-исследовательский институт прикладной
математики и автоматизации КБНЦ РАН,
г. Нальчик
E-mail: beslan_efendiev@mail.ru

Поступило

10.12.2009

Исправленный вариант

20.01.2014