Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Оревков, Когда цепочка раздутий задает автоморфизм $\mathbb{C}^2$, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 4, 638–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm879>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:34:44

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

КОГДА ЦЕПОЧКА РАЗДУТИЙ ЗАДАЕТ АВТОМОРФИЗМ $\mathbb{C}^2$

С. Ю. Оревков

1. Введение. В этой заметке мы приводим новое доказательство одной теоремы А. Г. Витушкина [1]. Оно основано на формуле для канонического класса алгебраической компактификации $\mathbb{C}^2$ (формула (5) ниже). Эта формула ранее использовалась в работах автора (см., например, формулу (3) в [2]), однако ее подробное доказательство публикуется впервые. Похожие формулы, записанные в других терминах, встречались в работах различных авторов.

Пусть L – прямая на $\mathbb{C}P^2$, которую мы будем считать бесконечно удаленной прямой аффинной плоскости $\mathbb{C}^2$, т.е. $L = \mathbb{C}P^2 \setminus \mathbb{C}^2$. Пусть $\sigma_1: V \rightarrow \mathbb{C}P^2$ – бирациональный морфизм, ограничение которого на $\sigma_1^{-1}(\mathbb{C}^2)$ – изоморфизм, т.е. σ_1 является композицией (цепочкой) раздутий “на бесконечности”. Пусть $E_1, \dots, E_n$ – неприводимые компоненты кривой $E = \sigma_1^{-1}(L)$, причем E_1 – собственный прообраз прямой L . Будем говорить, что цепочка раздутий σ_1 *определяет автоморфизм* $\mathbb{C}^2$, если для последней вклеенной кривой (пусть это будет E_2) существует бирациональный морфизм $\sigma_2: V \rightarrow \mathbb{C}P^2$ такой, что $\sigma_2|_{\sigma_1^{-1}(\mathbb{C}^2)}$ – изоморфизм, $\sigma_2^{-1}(L) = E$ и E_2 – собственный прообраз прямой L (в этом случае $\sigma_2^{-1}\sigma_1$ является автоморфизмом $\mathbb{C}^2$).

Следуя [1], *пробной поверхностью* для цепочки раздутий σ_1 назовем гомологический класс $S \in H_2(V; \mathbb{Z})$, такой, что

$$S \cdot E_2 = 1, \quad S \cdot E_i = 0, \quad i \neq 2 \quad (1)$$

(как и выше, E_2 – последняя вклеенная кривая). Поскольку $E_1, \dots, E_n$ – базис в $H_2(V; \mathbb{Z})$, условия (1) однозначно определяют класс S . Если цепочка раздутий σ_1 определяет автоморфизм $\mathbb{C}^2$, то $S = \sigma_2^{-1}(l)$, где l – прямая на $\mathbb{C}P^2$ в общем положении. Следовательно, по формуле присоединения имеем

$$S^2 = 1, \quad S \cdot K_V = -3, \quad (2)$$

где $K_V = -c_1(V)$ – канонический класс поверхности V . Витушкин доказал, что (2) является не только необходимым, но и достаточным условием того, чтобы цепочка раздутий σ_1 определяла автоморфизм $\mathbb{C}^2$:

ТЕОРЕМА ВИТУШКИНА (см. [1]). *Цепочка раздутий σ_1 определяет автоморфизм $\mathbb{C}^2$ тогда и только тогда, когда для пробной поверхности S имеет место (2).*

2. Дискриминант формы пересечения. Пусть $D = D_1 + \dots + D_n$ – кривая на гладкой проективной поверхности V ($D_1, \dots, D_n$ – ее неприводимые компоненты). Пусть $A_D = (D_i \cdot D_j)_{ij}$ – матрица пересечений. Определим *дискриминант* $d(D)$ кривой D как $\det(-A_D)$. Знак минус выбран для того, чтобы при раздутии $\sigma: \tilde{V} \rightarrow V$ имело место равенство $d(\sigma^{-1}(D)) = d(D)$. Если $D_i \cdot D_j \leq 1$ при $i \neq j$, то *графом кривой D* назовем граф Γ_D с вершинами $D_1, \dots, D_n$ и ребрами, отвечающими парам (D_i, D_j) с $D_i \cdot D_j = 1$.

ЛЕММА 1 (Мамфорд [3]). *Предположим, что граф Γ_D имеет вид линейной цепочки $-\circ-\cdots-\circ-$. Тогда выполнены следующие утверждения:*

- а) *если $D_i^2 \leq -2$ при всех i , то $d(D) \geq 2$;*
- б) *если A_D отрицательно определена, $D_i^2 \leq -1$ при всех i и $d(D) = 1$, то кривую D можно стянуть в гладкую точку.*

3. Доказательство теоремы Витушкина. Пусть $\sigma_1: V \rightarrow \mathbb{CP}^2$ – бирациональный морфизм и $E = E_1 + \cdots + E_n = \sigma_1^{-1}(L)$. Тогда $E_1, \dots, E_n$ – базис пространства $H_2(V, \mathbb{Q})$. Пусть $A = (E_i \cdot E_j)$ – матрица пересечений и $B = A^{-1}$. Граф кривой E – дерево. Поскольку $d(E) = -1$, из правила Крамера легко следует

ЛЕММА 2. *Элементы матрицы B находятся из равенств $b_{ij} = d(E - [ij])$, где $[ij]$ – минимальное связанное множество вида $E_{i_1} \cup \cdots \cup E_{i_k}$, содержащее $E_i \cup E_j$.*

ЛЕММА 3. *Для $C_1, C_2 \in H_2(V, \mathbb{Q})$ выполнено равенство $C_1 \cdot C_2 = \sum_{i,j} b_{ij} (C_1 \cdot E_i)(C_2 \cdot E_j)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $k = 1, 2$ положим $X_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$, $Y_k = (y_k^1, \dots, y_k^n)$, где $C_k = \sum x_k^i E_i$ и $y_k^i = C_k \cdot E_i$. Тогда $Y_k = AX_k$; следовательно, $X_k = BY_k$ и $C_1 \cdot C_2 = \langle X_1, AX_2 \rangle = \langle BY_1, Y_2 \rangle$.

Пусть, как и в п. 1, E_2 – последняя вклеенная кривая и S – пробная поверхность. Из лемм 2, 3 и (1) вытекает

$$S^2 = b_{22} = d(E - E_2). \quad (3)$$

Обозначим $\nu_i = E_i \cdot (E - E_i)$. Формула присоединения для E_i дает $(K_V + E) \cdot E_i = \nu_i - 2$, поэтому из (1) и леммы 3 следует

$$(K_V + E) \cdot S = \sum_{i=1}^n b_{i2}(\nu_i - 2). \quad (4)$$

Рис. 1

Рис. 2

Предположим, что (2) выполнено. Без ограничения общности можно считать, что кривая E минимальна в том смысле, что не существует $j \geq 3$ такого, что $E_j^2 = -1$ и $\nu_j \leq 2$. Это значит, что каждый раз раздувается точка исключительной кривой предыдущего раздутия. Поэтому индукцией по числу раздутий легко доказать, что Γ_E имеет вид либо как на рис. 1, либо как на рис. 2, где пунктиром изображены линейные цепочки вершин. Для кривых E_j таких, что $\nu_j = 3$, обозначим дискриминанты компонент связности кривой $E - E_j$ в соответствии с рис. 1, 2. Из леммы 1 а) и минимальности E следует, что $q_j \geq 2$ при всех j . Поэтому из (2) и (3) следует, что рис. 2 невозможен. Применяя (4) и лемму 2 к рис. 1 и учитывая, что $ES = 1$, получаем

$$K_V \cdot S + 1 = \sum_{\nu_i=3} b_{i2} - \sum_{\nu_i=1} b_{i2} = \sum_{j=1}^m p_j q_j r_j - r_0 - \sum_{j=1}^m p_j r_j - b_{22} = -b_{22} - 1 + s, \quad (5)$$

где $r_j = q_{j+1} \cdots q_m$ и $s = \sum (p_j - 1)(q_j - 1)r_j$. Подставляя (2) и (3) в (5), получаем $s = 0$.

ЛЕММА 4. Пусть q – ограничение невырожденной квадратичной формы сигнатуры $(-, +, \dots, +)$ на подпространство. Если дискриминант q положителен, то q положительно определена.

По (2) и (3) имеем $d(E - E_2) = S^2 = 1 > 0$, значит, по лемме 4 минус форма пересечения на $E - E_2$ положительно определена. В частности, все q_j и p_j положительны, а значит, все слагаемые в сумме s (см. (5)) неотрицательны. Учитывая, что все $q_j > 1$, условие $s = 0$ влечет равенство $p_1 = \dots = p_m = 1$. Значит, по лемме 1б) крайнюю левую линейную ветвь графа Γ_E можно стянуть. При этом получится граф того же вида с $m - 1$ тройными вершинами, и его крайняя левая линейная ветвь будет иметь дискриминант p_2 . Продолжая этот процесс, мы стянем все компоненты кривой E кроме E_2 . Теорема доказана.

4. Замечание. В [1] доказано, что условия (2) необходимы и достаточны для разложения цепочки раздутий в композицию так называемых треугольных цепочек (см. определение в [1]). Явно расписывая раздутия в координатах, несложно убедиться, что треугольные цепочки и только они задают с точностью до аффинной замены координат треугольные (т.е. имеющие вид $(x, y) \mapsto (x + f(y), y)$) преобразования $\mathbb{C}^2$. Поэтому рассуждения из [1] не только доказывают сформулированную выше теорему, но дают попутно доказательство теоремы Юнга о разложимости автоморфизма $\mathbb{C}^2$ в композицию аффинных и треугольных преобразований.

Автор признателен А. Г. Витушкину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Витушкин А. Г. Критерий представимости цепочки σ -процессов композицией треугольных цепочек // Матем. заметки. (в печати). 2. Домрина А. В., Оревков С. Ю. // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 6. С. 847–862. 3. Mumford D. // Publ. Math. IHES. 1961. V. 9. P. 229–246.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
15.11.1999