Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. А. Кусраева, Однородные ортогонально аддитивные полиномы в векторных решетках, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 5, 704–710

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8790>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 10:59:45

Однородные ортогонально аддитивные полиномы в векторных решетках

З. А. Кусраева

Показано, что ортогонально аддитивный порядково ограниченный однородный полином, действующий между векторными решетками, полными относительно сходимости с регулятором, допускает представление в виде композиции линейного порядково ограниченного оператора и специального однородного полинома, играющего роль отсутствующей в векторной решетке степенной функции. С помощью этого результата установлен критерий интегральной представимости ортогонально аддитивного однородного полинома.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Пусть E и F – векторные пространства и $k \geq 1$ – целое число. Отображение $P: E \rightarrow F$ называется *однородным полиномом степени k* (или *k -однородным полиномом*), если существует k -линейный оператор $\varphi: E^k \rightarrow F$ такой, что $P(x) = \varphi(x, \dots, x)$, $x \in E$. Среди таких φ существует и притом единственный симметричный оператор, который называют *порождающим* для P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть E – векторная решетка. Однородный полином $P: E \rightarrow F$ называют *ортогонально аддитивным*, если $P(x + y) = P(x) + P(y)$ для любых дизъюнктивных $x, y \in E$. (Дизъюнктивность элементов x и y означает, что $|x| \wedge |y| = 0$.)

В работе [1] доказано, что любой k -однородный ортогонально аддитивный непрерывный полином $P: L^p \rightarrow \mathbb{R}$ допускает представление

$$P(f) = \int g f^k d\mu, \quad f \in L^p,$$

где $g \in L^{p/(p-k)}$. Аналогичные результаты были получены в [2] и [3] для полиномов со значениями в банаховом пространстве, определенных на $C(K)$. Наконец, в [4] было установлено, что ортогонально аддитивный k -однородный непрерывный полином, действующий из функциональной банаховой решетки в произвольное банахово пространство, представим в виде композиции степенной функции $f \mapsto f^k$ с линейным непрерывным оператором S : $P(f) = S(f^k)$.

Цель настоящей заметки – показать, что ортогонально аддитивный порядково ограниченный однородный полином, действующий между векторными решетками, полными относительно сходимости с регулятором, допускает аналогичное представление. При этом линейный оператор S в таком представлении порядково ограничен,

а вместо степенной функции $f \mapsto f^k$, отсутствующей в векторной решетке, используется специальный k -однородный полином $x \mapsto x^{k\odot}$, порождающий полилинейный оператор которого $(x_1, \dots, x_k) \mapsto x_1 \odot \dots \odot x_k$ является решеточным гомоморфизмом по каждой переменной.

Используемые сведения из теории векторных решеток и порядково ограниченных операторов можно найти в [5]–[7]. Все рассматриваемые векторные пространства являются вещественными, а векторные решетки – архимедовыми. Положительный конус векторной решетки E обозначается через E_+ . *Равномерно полной* будем называть векторную решетку, полную относительно сходимости с регулятором.

2. Порядково ограниченные полиномы. Пусть $P: E \rightarrow F$ – произвольное отображение, где E и F – векторные пространства. Для $h \in E$ определим отображение $\Delta_h P: E \rightarrow F$ формулой $(\Delta_h P)(x) = P(x+h) - P(x)$. По индукции определяется k -я разность:

$$\Delta_{x_k} \Delta_{x_{k-1}} \dots \Delta_{x_1} P = \Delta_{x_k} (\Delta_{x_{k-1}} \dots \Delta_{x_1} P),$$

которая является симметричной функцией от переменных $x_1, \dots, x_k$. Для фиксированного набора $(x_1, \dots, x_k)$ k -я разность $\Delta_{x_k} \dots \Delta_{x_1} P$ k -однородного полинома P является постоянной функцией из E в F и поэтому может считаться элементом F (что в дальнейшем и предполагается). Если $P(x) = \varphi(x, \dots, x)$, $x \in E$, для некоторого симметричного полилинейного оператора $\varphi: E^k \rightarrow F$, то

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \Delta_{x_k} \Delta_{x_{k-1}} \dots \Delta_{x_1} P.$$

Подробнее об однородных полиномах в векторных пространствах см. в книгах [8], [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть E и F – векторные решетки. Отображение из E в F называется *порядково ограниченным*, если всякое порядково ограниченное множество из E оно переводит в порядково ограниченное множество в F .

ЛЕММА 1. *Однородный полином порядково ограничен тогда и только тогда, когда порядково ограничен порождающий его симметричный полилинейный оператор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $P: E \rightarrow F$ – порядково ограниченный k -однородный полином, а $\varphi: E^k \rightarrow F$ – порождающий его k -линейный оператор. Для любого $e \in E_+$ существует $v \in F_+$ такой, что $|P(x)| \leq v$ для всех $x \in [-e, e]$. В указанном выше представлении порождающего симметричного полилинейного оператора φ k -я разность $\Delta_{x_k} \Delta_{x_{k-1}} \dots \Delta_{x_1} P$ есть сумма 2^k слагаемых, каждое из которых имеет вид

$$x \mapsto (-1)^{k-p} P(x + x_{i_1} + \dots + x_{i_p}),$$

где $i_1 < \dots < i_p$ и $i_1, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, k\}$. Если $x_1, \dots, x_k \in 1/k[-e, e]$, то из-за порядковой ограниченности P имеем $P(x_{i_1} + \dots + x_{i_p}) \in [-v, v]$; здесь $x = 0$. Тем самым,

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) \in \frac{2^k}{k!} [-v, v]$$

и φ порядково ограничен.

Обратное утверждение очевидно.

3. Степень векторной решетки. Введем специальный полином, играющий роль степенной функции в наших рассуждениях. При этом ключевым инструментом является конструкция степени векторной решетки, введенная в работе [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $E_1, \dots, E_k$ и F – векторные решетки. Говорят, что k -линейный оператор $\varphi: E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F$ является *решеточным k -морфизмом*, если отображение $x_i \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k)$, $x_i \in E_i$, есть решеточный гомоморфизм для всех $i = 1, \dots, k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $1 < k \in \mathbb{N}$ и E – векторная решетка. Пара $(E^{\odot k}, \odot_k)$ называется *k -й степенью E* , если выполнены следующие три условия:

- (1) $E^{\odot k}$ – векторная решетка;
- (2) $\odot_k: E^k \rightarrow E^{\odot k}$ – симметричный решеточный k -морфизм;
- (3) для любой векторной решетки F и любого симметричного решеточного k -морфизма $\varphi: E^k \rightarrow F$ существует единственный решеточный гомоморфизм $S: E^{\odot k} \rightarrow F$ такой, что $S \circ \odot_k = \varphi$.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $k \in \{2, 3, \dots\}$ и для любой векторной решетки E существует и притом единственная с точностью до решеточного изоморфизма k -я степень $(E^{\odot k}, \odot_k)$.

Этот результат при $k = 2$ установлен в [11; теорема 4], а в общем случае – в [10; теорема 3.2]. В дальнейшем для удобства принимаем следующие обозначения:

$$E^{\odot 1} = E, \quad \odot_1 = I_E, \quad x_1 \odot \dots \odot x_k = \odot_k(x_1, \dots, x_k).$$

Однородный полином, порождаемый симметричным k -морфизмом $\odot_k$, обозначим символом $(\cdot)^{k\odot}$, т.е. полагаем $x^{k\odot} = \odot_k(x, \dots, x)$. Этот полином заменит степенную функцию в нашем основном результате о представлении (см. ниже теорему 3).

Отметим также, что если f -алгебра A с умножением “ $\cdot$ ” точная (т.е. ноль – ее единственный нильпотентный элемент), а E – подрешетка A , то существуют подрешетка $F \subset A$ и изоморфизм ι из $E^{\odot k}$ на F такие, что

$$\iota(x_1 \odot \dots \odot x_k) = x_1 \cdots x_k \quad \text{для всех } x_1, \dots, x_k \in E.$$

В частности, $\iota(x^{k\odot}) = x^k$ и, следовательно, получаем обычную степенную функцию, действующую из E в F . В случае равномерно полной решетки E имеем также

$$F = E_{(k)} := \{x_1 \cdots x_k : x_i \in E\} = \{x|x|^{k-1} : x \in E\}, \\ F_+ = (E_{(k)})_+ := \{|x|^k : x \in E\},$$

см. [10; теорема 4.1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Полилинейный оператор $\varphi: E^k \rightarrow F$ называют: *ортосимметричным*, если $\varphi(x_1, \dots, x_k) = 0$, как только $|x_i| \wedge |x_j| = 0$ для некоторых $1 \leq i, j \leq k$; *положительным*, если $\varphi(x_1, \dots, x_k) \geq 0$ для любых $x_1, \dots, x_k \in E_+$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть E – равномерно полная векторная решетка, F – произвольная векторная решетка и $\varphi: E^k \rightarrow F$ – порядково ограниченный k -линейный ортосимметричный оператор. Тогда существует и притом единственный линейный порядково ограниченный оператор $T_\varphi: E^{\odot k} \rightarrow F$ такой, что $\varphi = T_\varphi \circ \odot_k$. Оператор φ положителен тогда и только тогда, когда положителен T_φ .

Эта теорема доказана в [10; теорема 5.1] только для положительных ортосимметричных k -линейных операторов, но она верна, как нетрудно доказать, и для любых порядково ограниченных ортосимметричных операторов.

4. Основной результат. Для доказательства основного результата нам потребуется еще один вспомогательный факт.

ЛЕММА 2. Пусть F – банахово пространство, а Q – компактное топологическое пространство и $k \in \mathbb{N}$. Для любого порядково ограниченного k -однородного ортогонально аддитивного полинома $P: C(Q) \rightarrow F$ существует единственный линейный ограниченный оператор $S: C(Q) \rightarrow F$ такой, что

$$P(x) = S(x^k), \quad x \in C(Q).$$

Этот факт, полученный в [2] и [3], является частным случаем теоремы 2.3 из [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Говорят, что однородный полином $P: E \rightarrow F$ степени k *положителен*, если положительным является порождающий его k -линейный симметричный оператор $\varphi: E^k \rightarrow F$, см. определение 5.

Введем некоторые обозначения. Пусть $L^\sim(E, F)$ и $\mathcal{P}_{\text{об}}({}^kE, F)$ обозначают соответственно пространства линейных порядково ограниченных операторов и k -однородных ортогонально аддитивных порядково ограниченных полиномов из E в F . Пространство $\mathcal{P}_{\text{об}}({}^kE, F)$ будем рассматривать с упорядочением, определяемым конусом положительных полиномов. Теперь мы можем сформулировать и доказать основной результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть E, F – равномерно полные векторные решетки. Тогда для любого ортогонально аддитивного порядково ограниченного k -однородного полинома $P: E \rightarrow F$ существует и притом единственный порядково ограниченный линейный оператор $S := S_P: E^{\odot k} \rightarrow F$ такой, что

$$P(x) = S(x^{k^\odot}), \quad x \in E.$$

Соответствие $P \mapsto S_P$ является изоморфизмом упорядоченных векторных пространств $\mathcal{P}_{\text{об}}({}^kE, F)$ и $L^\sim(E^{\odot k}, F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P: E \rightarrow F$ – полином, удовлетворяющий условиям теоремы, а $\varphi: E^k \rightarrow F$ – порождающий его полилинейный симметричный оператор. Как показано в лемме 1, φ порядково ограничен. Покажем, что φ ортосимметричен.

Обозначим $e := |x_1| + \dots + |x_k|$, и пусть $J(e)$ – порядковый идеал в E , порожденный элементом e , с нормой $\|x\|_e := \inf\{\lambda > 0 : |x| \leq \lambda e\}$. В силу порядковой ограниченности P существует $f \in F_+$ такой, что $P([-e, e]) \subset [-f, f]$. Отсюда следует, что для любых $x, x_1, \dots, x_k \in J(e)$ имеем

$$P(x) \in J(f), \quad \varphi(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \Delta_{x_k} \dots \Delta_{x_1} P \in J(f).$$

Теперь рассмотрим отображения $P_0: J(e) \rightarrow J(f)$ и $\varphi_0: J(e)^k \rightarrow J(f)$ – ограничения P и φ на $J(e)$ и $J(e)^k$ соответственно. Оба отображения ограничены относительно норм $\|\cdot\|_e$ и $\|\cdot\|_f$. По теореме Крейнов–Какутани банахова решетка $(J(e), \|\cdot\|_e)$

линейно изометрична $C(Q)$ для компакта Q . Тем самым, можем считать, что P_0 и φ_0 определены на $C(Q)$ и $C(Q)^k$ соответственно. Согласно лемме 2 существует линейный ограниченный оператор S_0 из $C(Q)$ в банахово пространство $(J(f), \|\cdot\|_f)$ такой, что $P_0(x) = \varphi_0(x, \dots, x) = S_0(x^k)$, $x \in C(Q)$.

Заметим, что

$$\frac{1}{k!} \Delta_{x_k} (\Delta_{x_{k-1}} \dots \Delta_{x_1} \pi) = x_1 \dots x_k,$$

где $\pi: C(Q) \rightarrow C(Q)$ имеет вид $\pi(x) = x^k$. Учитывая, что S_0 перестановочен с оператором Δ_h , мы заключаем

$$\varphi_0(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \Delta_{x_k} \dots \Delta_{x_1} P_0 = \frac{1}{k!} \Delta_{x_k} \dots \Delta_{x_1} (S_0 \circ \pi) = S_0(x_1 \dots x_k).$$

Теперь, если какая-то пара элементов $x_i, x_j \in C(Q)$ дизъюнктна, то $x_i \cdot x_j = 0$ и

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) = \varphi_0(x_1, \dots, x_k) = S_0(x_1 \dots x_k) = 0.$$

Таким образом, оператор φ ортосимметричен.

Согласно теореме 2 существует порядково ограниченный оператор $S: E^{\odot k} \rightarrow F$ такой, что

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) = S(x_1 \odot \dots \odot x_k) \quad \text{для любых } x_1, \dots, x_k \in E.$$

Ограничение этого равенства на диагональ и есть требуемое представление. Единственность оператора S_P следует из единственности представляющего P полилинейного оператора и утверждения об единственности в теореме 2. Легко видеть, что отображение $P \mapsto S_P$ линейно и инъективно. Оно положительно по теореме 2. Обратное отображение $S \mapsto P_S$, где $P_S(x) = S(x^{k\odot})$, также линейно и положительно.

5. Интегральное представление. В качестве приложения рассмотрим вопрос об интегральной представимости однородных полиномов в функциональных пространствах. Пусть $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ и $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ – пространства с σ -конечными мерами, а $(\Omega, \Sigma, \mu) := (\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ – их произведение. Рассмотрим идеальные пространства E и F над $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ и $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ соответственно. Необходимые сведения об идеальных пространствах имеются в [6].

Пространство (классов эквивалентности) всех измеримых функций $L^0(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ с поточечным умножением представляет собой точную f -алгебру, поэтому $E^{\odot k}$ можно отождествить с векторной решеткой $E_{(k)}$; см. замечания перед определением 5.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Говорят, что однородный полином $P: E \rightarrow F$ степени k допускает интегральное представление, если существует μ -измеримая функция двух переменных $K: \Omega_2 \times \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для каждой функции $x \in E$ для μ_1 -почти всех $s \in \Omega_2$ функция $t \mapsto K(s, t)x^k(t)$ μ_1 -интегрируема на Ω_1 и

$$(Px)(s) = \int_{\Omega_1} K(s, t) x^k(t) d\mu_1(t), \quad x \in E,$$

см. [6; гл. XI, § 1], [12; § 2.1]. Можно показать, что оператор, допускающий указанное представление, порядково ограничен как оператор из E в $L^0(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ [12].

ТЕОРЕМА 4. Пусть $P: E \rightarrow F$ – ортогонально аддитивный k -однородный полином. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) P допускает интегральное представление;
- (2) если $0 \leq x_n \leq x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, и $x_n \rightarrow 0$ по мере μ_1 , то $Px_n \rightarrow 0$ μ_2 -почти всюду;
- (3) оператор P удовлетворяет условиям:
 - (a) если $\mu_1(B_n) \rightarrow 0$, $B_n \in \Sigma_1$, и $\chi_{B_n} \leq x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, то $P(\chi_{B_n}) \rightarrow 0$ μ_2 -почти всюду;
 - (b) если $0 \leq x_n \leq x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, и $x_n \rightarrow 0$ μ_1 -почти всюду, то $Px_n \rightarrow 0$ μ_2 -почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим вначале, что полином P можно считать порядково ограниченным из E в $L^0(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$, так как каждое из условий (1)–(3) влечет за собой порядковую ограниченность $P(B)$ в $L^0(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ для всякого порядково ограниченного в E множества B . Последнее следует из замечания после определения 7 и критерия порядковой ограниченности множества в расширенном регулярном K -пространстве, см. [5; теорема VI.6.2]. По условию полином P ортогонально аддитивен и k -однороден; следовательно, в силу теоремы 3 существует единственный порядково ограниченный линейный оператор $S: E_{(k)} \rightarrow L^0(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ такой, что $P(x) = S(x^k)$, $x \in E$. Отсюда видно, что операторы P и S одновременно допускают или нет интегральное представление, причем $P(E) \subset F$ тогда и только тогда, когда $S(E_{(k)}) \subset F$.

Рассмотрим степенное отображение $x \mapsto \pi(x) = x^k$, которое является биекцией конусов положительных элементов E_+ и $(E_{(k)})_+$. При этом как π , так и π^{-1} , сохраняют сходимость по мере и сходимость почти всюду последовательностей. Так как на E_+ и $(E_{(k)})_+$ имеем $P = S \circ \pi$ и $S = P \circ \pi^{-1}$ соответственно, то условия (2) и (3) для P и S справедливы или нет одновременно. Теперь достаточно сослаться на критерий Бухвалова интегральной представимости линейного оператора [6; гл. XI, § 1, теорема 1] (он был установлен в [13], см. также [12]).

В заключение автор выражает глубокую благодарность рецензенту за многочисленные полезные замечания, способствовавшие существенному улучшению статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Sundaresan, “Geometry of spaces of homogeneous polynomials on Banach lattices”, *Applied Geometry and Discrete Mathematics*, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., **4**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 571–586.
- [2] D. Pérez-García and I. Villanueva, “Orthogonally additive polynomials on spaces of continuous functions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **306**:1 (2005), 97–105.
- [3] D. Carando, S. Lassalle, I. Zalduendo, “Orthogonally additive polynomials over $C(K)$ are measures – a short proof”, *Integral Equations Operator Theory*, **56**:4 (2006), 597–602.
- [4] Y. Benyamini, S. Lassalle, J. G. Llavona, “Homogeneous orthogonally additive polynomials on Banach lattices”, *Bull. London Math. Soc.*, **38**:3 (2006), 459–469.
- [5] Б. З. Вулих, *Введение в теорию полупорядоченных пространств*, ГИФМЛ, М., 1961.
- [6] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Невский диалект, СПб., 2004.
- [7] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Pure Appl. Math., **119**, Academic Press, New York, 1985.

- [8] А. Картан, *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы*, Едиториал УРСС, М., 2004.
- [9] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [10] K. Boulabiar, G. Buskes, “Vector lattice powers: f -algebras and functional calculus”, *Comm. Algebra*, **34**:4 (2006), 1435–1442.
- [11] G. Buskes, A. van Rooij, “Squares of Riesz spaces”, *Rocky Mountain J. Math.*, **31**:1 (2001), 45–56.
- [12] А. В. Бухвалов, “Приложения методов теории порядково ограниченных операторов к теории операторов в пространствах L^p ”, *УМН*, **38**:6 (1983), 37–83.
- [13] А. В. Бухвалов, “Об интегральном представлении линейных операторов”, *Исследования по линейным операторам и теории функций. V*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **47**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1974, 5–14.

З. А. Кусраева

Южный математический институт

Владикавказского научного центра РАН

и Правительства Республики Северная Осетия-Алания,

г. Владикавказ

E-mail: zali13@mail.ru

Поступило

15.12.2009

Исправленный вариант

30.03.2011