Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Бабенко, Д. С. Скороходов, Задачи Колмогорова и Стечкина для классов функций, вторая производная которых принадлежит пространству Орлича, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 2, 172–183

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8791>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:04:03

Задачи Колмогорова и Стечкина для классов функций, вторая производная которых принадлежит пространству Орлича

Ю. В. Бабенко, Д. С. Скороходов

Для любого $t \in [0, 1]$ нами получено точное значение модуля непрерывности

$$\omega_N(D_t, \delta) := \sup\{|x'(t)| : \|x\|_{L_\infty[0,1]} \leq \delta, \|x''\|_{L_N^*[0,1]} \leq 1\},$$

где L_N^* – сопряженное пространство Орлича с нормой Люксембурга, а D_t – оператор дифференцирования в точке t . Как приложения нами получены необходимые и достаточные условия в задаче Колмогорова для трех чисел. Также нами решена задача Стечкина, т.е. задача о приближении неограниченного оператора дифференцирования D_t ограниченными линейными операторами на классе функций x , для которых $\|x''\|_{L_N^*[0,1]} \leq 1$.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Как обычно, через $L_s := L_s[0, 1]$, $1 \leq s \leq \infty$, будем обозначать пространства функций $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, измеримых и суммируемых в степени s на $[0, 1]$ (существенно ограниченных при $s = \infty$) с соответствующими нормами

$$\|x\|_s := \begin{cases} \left(\int_0^1 |x(t)|^s dt \right)^{1/s}, & 1 \leq s < \infty, \\ \text{esssup}\{|x(t)| : t \in [0, 1]\}, & s = \infty. \end{cases}$$

Наряду с пространствами L_s мы будем рассматривать более общие пространства Орлича (см., например, [1]). Приведем необходимые для этого обозначения.

Пусть $p: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ и $q: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – две непрерывные справа неубывающие функции такие, что

$$q(\rho) := \sup_{p(\tau) \leq \rho} \tau, \quad p(\tau) := \sup_{q(\rho) \leq \tau} \rho, \quad p(0) = q(0) = 0, \quad p(\infty) = q(\infty) = \infty.$$

Выпуклые функции $M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определенные равенствами

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(\tau) d\tau, \quad N(v) = \int_0^{|v|} q(\tau) d\tau,$$

называются *дополнительными друг к другу N -функциями*.

Пусть $M(u)$ и $N(v)$ – дополнительные друг к другу N -функции. Через $L_M := L_M[0, 1]$ будем обозначать класс Орлича, соответствующий N -функции $M(u)$, т.е. класс функций $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, для которых

$$\rho(x, M) := \int_0^1 M(|x(\tau)|) d\tau < \infty.$$

Через $L_M^* := L_M^*[0, 1]$ обозначим класс функций $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что

$$\int_0^1 x(\tau)y(\tau) d\tau < \infty \quad \text{для любой } y \in L_N.$$

Следуя книге [1; § 9], введем на классе L_M^* норму Орлича

$$\|x\|_M := \sup_{\rho(y, N) \leq 1} \left| \int_0^1 x(\tau)y(\tau) d\tau \right|$$

и норму Люксембурга

$$\|x\|_{(M)} := \inf \left\{ k > 0 : \rho\left(\frac{x}{k}, M\right) \leq 1 \right\}.$$

Отметим, что если $M(u) = u^s$, $1 < s < \infty$, то класс L_M^* есть в точности класс L_s , а норма Люксембурга $\|\cdot\|_{(M)}$ совпадает с нормой $\|\cdot\|_s$. В этой связи пространства Орлича являются обобщением классов L_s .

Через $L_M^{*,r}$, $r \in \mathbb{N}$, обозначим пространство функций $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, у которых $x^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна и $x \in L_M^*$. В случае $M(u) = u^s$, $1 < s < \infty$, положим $L_s^r := L_M^{*,r}$.

Пусть $1 \leq k \leq r - 1$. Вопрос о точных аддитивных неравенствах вида

$$|x^{(k)}(t)| \leq A\|x\|_\infty + B\|x^{(r)}\|_s \quad (1.1)$$

для классов функций L_s^r появился уже в работе Ландау [2]. В ней он при $k = 1$, $r = 2$ и $s = \infty$ охарактеризовал все пары положительных чисел (A, B) , для которых неравенство вида (1.1) является неулучшаемым. В дальнейшем неравенства (1.1) изучались в работах многих математиков. Известные результаты в этом направлении, а также обсуждение близких вопросов, можно найти, например, в книгах [3], [4] и статье [5]. Единственным на данное время полным известным результатом по неравенствам вида (1.1) является результат Пинкуса [6]. В остальных случаях ситуация далека от окончательного завершения.

Наряду с классами L_s^2 представляет интерес изучение и более общих классов функций, например, классов $L_N^{*,2}$. Так, в [7] при любом фиксированном $t \in [0, 1]$ были получены точные неравенства вида

$$|x'(t)| \leq A\|x\|_\infty + B\|x''\|_{(N)}, \quad (1.2)$$

где $x \in L_N^{*,2}$, и $N(v)$ – N -функция.

Чтобы сформулировать соответствующий результат работы [7], введем в рассмотрение следующее семейство функций. Для $t \in [0, 1/2]$ и $h \in [0, 1]$ положим

$$g_{t,h}(\tau) := \begin{cases} 0, & \tau \in \left[0, t - \frac{h}{2}\right], \\ \frac{1}{h} \left(t - \frac{h}{2} - \tau\right), & \tau \in \left[t - \frac{h}{2}, t\right], \\ \frac{1}{h} \left(t + \frac{h}{2} - \tau\right), & \tau \in \left[t, t + \frac{h}{2}\right], \\ 0, & \tau \in \left[t + \frac{h}{2}, 1\right], \end{cases} \quad (1.3)$$

если $0 < h \leq 2t$, и

$$g_{t,h}(\tau) := \begin{cases} -\frac{\tau}{h}, & \tau \in [0, t], \\ \frac{h - \tau}{h}, & \tau \in [t, h], \\ 0, & \tau \in [h, 1], \end{cases} \quad (1.4)$$

если $2t \leq h \leq 1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $t \in [0, 1/2]$ и $h \in (0, 1]$. Пусть также $M(u)$ и $N(v)$ – дополняемые друг к другу N -функции. Тогда для любой функции $x \in L_N^{*,2}$ имеет место следующее неравенство:

$$|x'(t)| \leq \frac{2}{h} \|x\|_\infty + \|g_{t,h}\|_M \|x''\|_{(N)}. \quad (1.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае классов L_s^2 , $1 \leq s < \infty$, теорема 1 была также независимо доказана в работе [8].

Отметим, что неравенство (1.5) неуклучшаемое, если правая производная $p(\tau)$ функции $M(u)$ непрерывна. Действительно, построим экстремальные функции для такого случая. Пусть $0 \leq t \leq 1/2$ и $h \in (0, 1]$. Как доказано в [1; с. 108], непрерывность функции $p(\tau)$ обеспечивает существование такого числа $\alpha_h > 0$, что

$$\int_0^1 N[p(\alpha_h |g_{t,h}(\tau)|)] d\tau = 1. \quad (1.6)$$

Положим

$$x''_{t,h}(\nu) := p(\alpha_h |g_{t,h}(\nu)|) \operatorname{sign} g_{t,h}(\nu), \quad \nu \in [0, 1].$$

Далее,

$$x'_{t,h}(u) := \int_h^u x''_{t,h}(\nu) d\nu, \quad u \in [0, 1].$$

Очевидно, что $x'_{t,h}(u)$ неположительна на $[0, 1]$. Теперь для $h \in (0, 2t]$ возьмем $t_h^* := t$, а для $h \in [2t, 1]$ выберем $t_h^* \in (0, h)$ так, чтобы

$$\int_0^{t_h^*} x'_{t,h}(u) du = \int_{t_h^*}^h x'_{t,h}(u) du.$$

Окончательно, определим функцию $x_{t,h}$ следующим образом:

$$x_{t,h}(\tau) := \int_{t_h^*}^{\tau} x'_{t,h}(u) du, \quad \tau \in [0, 1]. \quad (1.7)$$

Теперь, чтобы убедиться в экстремальности функции $x_{t,h}$, достаточно воспользоваться следующими фактами.

ЛЕММА 1 [1; с. 106]. Пусть $x(\tau) \in L_M^*$ и существует такое k , что

$$\int_0^1 N[p(k|x(\tau))|] d\tau = 1, \quad (1.8)$$

где $p(\tau)$ – правая производная функции $M(u)$. Тогда

$$\|x\|_M = \int_0^1 p(k|x(\tau)|)|x(\tau)| d\tau.$$

ЛЕММА 2 [1; с. 96]. Пусть $x(\tau) \in L_N^*$ и

$$\int_0^1 N\left[\frac{x(\tau)}{k_0}\right] d\tau = 1.$$

Тогда $\|x\|_{(N)} = k_0$.

В качестве следствия из теоремы 1 получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Для любой функции $x \in L_N^{*,2}$ и любого $h \in (0, 1]$ имеет место неравенство

$$\|x'\|_{\infty} \leq \frac{2}{h} \|x\|_{\infty} + \|g_{0,h}\|_M \|x''\|_{(N)}. \quad (1.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для доказательства неравенства (1.9) будем использовать понятие перестановки функции (см., например, [9; гл. 1]). Напомним необходимые определения.

Суммируемой на отрезке $[0, 1]$ функции $x(u)$ и числу $y \geq 0$ поставим в соответствие число

$$m(x, y) := \mu\{u \in [0, 1] : |x(u)| > y\},$$

где $\mu(E)$ – лебегова мера на отрезке $[0, 1]$. Это равенство определяет невозрастающую на $[0, \infty)$, непрерывную справа функцию $m(x, y)$, называемую функцией распределения для $x(u)$.

Убывающая перестановка функции $f(u)$ определяется равенством

$$r(x, u) := \inf\{y \in [0, \infty) : m(x, y) \leq u\}.$$

Детальное описание свойств перестановок приведено, например, в [9; гл. 1]. Здесь же нам понадобится тот простой факт, что для любой N -функции $\Phi(v)$

$$\int_0^1 \Phi(|x(u)|) du = \int_0^1 \Phi(r(x, u)) du. \quad (1.10)$$

Чтобы применить свойство (1.10), заметим для начала, что при $0 < h \leq 2t$

$$r(g_{t,h}, \tau) = \begin{cases} \frac{h-\tau}{2h}, & \tau \in [0, h], \\ 0, & \tau \in [h, 1], \end{cases}$$

а при $2t \leq h \leq 1$

$$r(g_{t,h}, \tau) = \begin{cases} \frac{h-t-\tau}{h}, & \tau \in [0, h-2t], \\ \frac{h-\tau}{2h}, & \tau \in [h-2t, h], \\ 0, & \tau \in [h, 1]. \end{cases}$$

Поэтому для любого $\tau \in [0, 1]$

$$r(g_{t,h}, \tau) \leq r(g_{0,h}, \tau).$$

В силу монотонности нормы Орлича из последнего неравенства получим, что

$$\|r(g_{t,h}, \cdot)\|_M \leq \|r(g_{0,h}, \cdot)\|_M.$$

А это в силу свойства (1.10) значит, что

$$\|g_{t,h}\|_M \leq \|g_{0,h}\|_M. \quad (1.11)$$

Следовательно,

$$\|x'\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x'(t)| \leq \frac{2}{h} \|x\|_\infty + \sup_{t \in [0,1]} \|g_{t,h}\|_M \|x''\|_{(N)} = \frac{2}{h} \|x\|_\infty + \|g_{0,h}\|_M \|x''\|_{(N)}.$$

2. Постановки задач и основные результаты. Пусть $M(u)$ и $N(v)$ – дополнительные друг к другу N -функции. Через $W_N^{*,2}$ обозначим класс функций $x \in L_N^{*,2}$, для которых $\|x''\|_{(N)} \leq 1$, а через D и D_t , $0 \leq t \leq 1$, обозначим операторы дифференцирования и дифференцирования в точке t соответственно.

Данная работа является продолжением работ [7] и [10]. Здесь мы рассмотрим более общую задачу о вычислении модулей непрерывности операторов D и D_t на классах $W_N^{*,2}$. Эта задача состоит в нахождении для всех $\delta > 0$ величин

$$\begin{aligned} \omega_N(D, \delta) &:= \sup\{\|x'\|_\infty : x \in W_N^{*,2}, \|x\|_\infty \leq \delta\}, \\ \omega_N(D_t, \delta) &:= \sup\{|x'(t)| : x \in W_N^{*,2}, \|x\|_\infty \leq \delta\}. \end{aligned}$$

Чтобы сформулировать полученные результаты, для всех $h \geq 1$ положим

$$x_{t,h}(\tau) := x_{t,1}(\tau) + \|x_{t,1}\|_\infty (h-1) \left(\frac{1}{2} - \tau \right), \quad \tau \in [0, 1], \quad (2.1)$$

где функция $x_{t,1}(\tau)$ определена равенством (1.7).

Имеют место следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $M(u)$ и $N(v)$ – дополнительные друг к другу N -функции и правая производная $p(\tau)$ функции $M(u)$ непрерывна на своей области определения. Пусть также $0 \leq t \leq 1/2$. Тогда для любого $\delta \in (0, \infty)$ существует единственное число $h = h(\delta, t)$, для которого $\|x_{t,h}\|_\infty = \delta$, и для любого $h > 0$

$$\omega_N(D_t, \|x_{t,h}\|_\infty) = |x'_{t,h}(t)|. \quad (2.2)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $M(u)$ и $N(v)$ – дополнительные друг к другу N -функции и правая производная $p(\tau)$ функции $M(u)$ непрерывна на своей области определения. Тогда для любого $\delta \in (0, \infty)$ существует единственное число $h = h(\delta, t)$, для которого $\|x_{t,h}\|_\infty = \delta$, и для любого $h > 0$

$$\omega_N(D, \|x_{t,h}\|_\infty) = \|x'_{t,h}\|_\infty. \quad (2.3)$$

В случае $N(u) = u^s$, $1 < s < \infty$, положим $\omega_s(D, \delta) := \omega_N(D, \delta)$. Отметим, что функцию $\omega_s(D, \delta)$ можно выразить в явных терминах относительно δ :

$$\omega_s(D, \delta) = \begin{cases} \left(\frac{s'+1}{s'}\right)^{s'/(s'+1)} (2\delta)^{1/(s'+1)}, & \delta \in \left(0, \frac{1}{2s'(s'+1)^{1/s'}}\right], \\ 2\delta + \frac{1}{(s'+1)^{1/s'}}, & \delta \in \left[\frac{1}{2s'(s'+1)^{1/s'}}, \infty\right), \end{cases}$$

где $s' = s/(s-1)$.

3. Приложения. В качестве приложения полученных результатов решим задачу Стечкина о приближении неограниченных операторов D и D_t , $t \in [0, 1]$, линейными ограниченными операторами, а также задачу Колмогорова для трех чисел. Приведем постановки этих задач.

Задача Стечкина. Классическую постановку задачи Стечкина можно найти, например, в книге [4]. Пусть X, Y – банаховы пространства и $T: X \rightarrow Y$ – линейный неограниченный оператор с областью определения $D(T) \subset X$. Пусть также $Q \subset D(T)$. Через $\mathcal{L}(K)$, $K > 0$, обозначим множество всех линейных ограниченных операторов $A: X \rightarrow Y$, норма которых не превосходит K . Тогда величина

$$U(T; A, Q) := \sup_{x \in Q} \|Tx - Ax\|_Y$$

является *уклонением оператора A от оператора T на классе Q* , а

$$E_K(T; Q) := \inf_{A \in \mathcal{L}(K)} U(T; A, Q)$$

есть *наилучшее приближение оператора T множеством ограниченных операторов $\mathcal{L}(K)$ на классе Q* .

В работе [11] была получена следующая часто используемая оценка снизу:

$$E_K(T; Q) \geq \sup_{\delta > 0} (\omega(T, \delta) - K\delta), \quad K > 0, \quad (3.1)$$

величины наилучшего приближения $E_K(T; Q)$ через модуль непрерывности

$$\omega(T, \delta) := \sup\{\|Tx\|_Y : x \in Q, \|x\|_X \leq \delta\}$$

оператора T на классе Q . Обзор известных случаев решения задачи Стечкина и также дальнейшие ссылки можно найти, например, в статье [12].

Решение задачи Стечкина для операторов D и D_t , $0 \leq t \leq 1$, на классе $W_M^{*,2}$ содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $M(u)$ и $N(v)$ – дополнительные друг к другу N -функции и правая производная $p(\tau)$ функции $M(u)$ непрерывна на своей области определения. Тогда для любого $0 \leq t \leq 1/2$

$$\begin{aligned} E_K(D_t; W_N^{*,2}) &= \begin{cases} +\infty, & 0 < K < 2, \\ \|g_{t,2/K}\|_M, & 2 \leq K < \infty, \end{cases} \\ E_K(D; W_N^{*,2}) &= \begin{cases} +\infty, & 0 < K < 2, \\ \|g_{0,2/K}\|_M, & 2 \leq K < \infty, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

где функция $g_{t,h}(\tau)$ была определена равенствами (1.3) и (1.4).

Задача Колмогорова. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Задача Колмогорова [13], [14] для n чисел состоит в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия того, что для заданных положительных чисел

$$M_{\nu_i, p_i}, \quad 1 \leq p_i \leq \infty, \quad 1 \leq \nu_i \leq r, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и заданного класса X гладких функций, существует функция $f \in X$, для которой

$$\|f^{(\nu_i)}\|_{p_i} = M_{\nu_i, p_i}.$$

Известные случаи решения этой задачи и дальнейшие ссылки можно найти, например, в книге [4].

ТЕОРЕМА 6. Пусть $M(u)$ и $N(v)$ – дополнительные друг к другу N -функции и правая производная $p(\tau)$ функции $M(u)$ непрерывна на своей области определения. Пусть также $0 \leq t \leq 1/2$. Тогда для положительных чисел M_0 , M_1 и M_2 найдется функция $x \in L_N^{*,2}$ для которой

$$\|x\|_\infty = M_0, \quad \|x'\| = M_1, \quad \|x''\|_{(N)} = M_2$$

в том и только том случае, когда

$$\frac{M_1}{M_2} \leq \omega_N\left(D, \frac{M_0}{M_1}\right). \quad (3.3)$$

Некоторое обобщение теоремы 6 содержится в следующем результате.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $M(u)$ и $N(v)$ – дополнительные друг к другу N -функции и правая производная $p(\tau)$ функции $M(u)$ непрерывна на своей области определения. Пусть также $0 \leq t \leq 1/2$. Тогда для положительных чисел M_0 , M_1 и M_2 найдется функция $x \in L_N^{*,2}$, для которой

$$\|x\|_\infty = M_0, \quad |x'(t)| = M_1, \quad \|x''\|_{(N)} = M_2$$

в том и только том случае, когда

$$\frac{M_1}{M_2} \leq \omega_N\left(D_t, \frac{M_0}{M_1}\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае классов L_s , $1 \leq s < \infty$, теоремы 6 и 7 были получены в работе [8].

4. Доказательства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из леммы 1 и определений (1.7) и (2.1) функций $x_{t,h}$ несложно видеть, что для любого $0 < h < \infty$

$$\omega_N(D_t, \|x_{t,h}\|_\infty) = |x'_{t,h}(t)|.$$

Чтобы завершить доказательство теоремы, нам остается убедиться в том, что функция $\|x_{t,h}\|_\infty$ строго возрастает по h и принимает все положительные значения. Для этого заметим, что функция $\omega_N(D_t, \delta)$ строго возрастает. Действительно, пусть $0 < \delta_1 < \delta_2$. Тогда для $\varepsilon = \delta_2 - \delta_1$ существует функция $x \in W_N^{*,2}$, $\|x\|_\infty \leq \delta_1$, такая, что

$$|x'(t)| \geq \omega_N(D_t, \delta_1) - \varepsilon.$$

Рассмотрим функцию

$$\bar{x}(u) := x(u) + 2(\delta_2 - \delta_1) \left(t - \frac{1}{2}\right) \text{sign } x'(t).$$

Очевидно, что $\bar{x} \in W_N^{*,2}$, $\|\bar{x}\|_\infty \leq \delta_2$ и

$$\omega_N(D_t, \delta_2) \geq |\bar{x}'(t)| = |x'(t)| + 2(\delta_2 - \delta_1) \geq \omega_N(D_t, \delta_1) + \delta_2 - \delta_1 > \omega_N(D_t, \delta_1),$$

что и требовалось доказать. Поэтому ввиду соотношения (2.2), чтобы проверить строгую монотонность функции $\|x_{t,h}\|_\infty$, необходимо и достаточно убедиться в строгий монотонности функции $|x'_{t,h}(t)|$.

Рассмотрим вначале случай $h \in (0, 2t]$. Ясно, что соотношение (1.6) можно переписать в следующем виде:

$$2h \int_0^{1/2} N[p(\alpha_h u)] du = 1. \quad (4.1)$$

Несложно также проверить, что

$$|x'_{t,h}(t)| = h \int_0^{1/2} p(\alpha_h u) du.$$

Из соотношения (4.1) для α_h видно, что α_h убывает с ростом h в силу того, что функции p и N возрастают на $[0, \infty)$. Следовательно, тот факт, что $|x'_{t,h}(t)|$ строго возрастает по h , будет доказан, как только мы докажем, что функция

$$\mu(a) := \frac{\int_0^{1/2} p(au) du}{\int_0^{1/2} N[p(au)] du}$$

убывает при $a > 0$. Последнее очевидно, ведь в силу выпуклости функции $N(v)$ и того, что $N(0) = 0$, имеем неравенство

$$\frac{N(u)}{u} \leq \frac{N(v)}{v} \quad (4.2)$$

для всех $0 < u \leq v$, и поэтому

$$\mu'(a) = \frac{p(a/2) \int_0^{1/2} N[p(au)] du - N[p(a/2)] \int_0^{1/2} p(au) du}{\left(\int_0^{1/2} N[p(au)] du\right)^2} \leq 0.$$

Проверим теперь, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|x_{t,h}\|_\infty = 0. \quad (4.3)$$

Заметим, что $\alpha_h \rightarrow +\infty$, когда $h \rightarrow 0$. Следовательно, для доказательства (4.3) ввиду равенства (4.1) достаточно доказать, что $\mu(a) \rightarrow 0$, когда $a \rightarrow +\infty$. По правилу Лопиталя

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \mu(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{p(a/2)}{N[p(a/2)]} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b}{N(b)},$$

ведь $p(a) \rightarrow +\infty$, когда $a \rightarrow +\infty$. Однако для любого $b > 0$ справедливо неравенство

$$N(b) \geq \int_{b/2}^b q(u) du \geq \frac{b}{2} q\left(\frac{b}{2}\right).$$

Следовательно,

$$0 \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \mu(a) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b}{N(b)} \leq \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{2}{N(b/2)} = 0,$$

так как $q(b) \rightarrow +\infty$ при $b \rightarrow +\infty$. Последнее соотношение влечет предельное равенство (4.3).

Таким образом, функция $\|x_{t,h}\|_\infty$ строго возрастает и принимает все значения от нуля до $\|x_{t,2t}\|_\infty$, когда h пробегает полуинтервал $(0, 2t]$.

Рассмотрим теперь случай $h \in [2t, 1]$. Теперь соотношение (1.6) перепишется в следующем виде:

$$\frac{h}{\alpha_h} \int_0^{\alpha_h t/h} N[p(u)] du + \frac{h}{\alpha_h} \int_0^{\alpha_h(1-t/h)} N[p(u)] du = 1. \quad (4.4)$$

Кроме того,

$$|x'_{t,h}(t)| = \frac{h}{\alpha_h} \int_0^{\alpha_h(1-t/h)} p(u) du.$$

Чтобы доказать, что $|x'_{t,h}(t)|$ строго возрастает по h , продифференцируем функцию $F(h) := |x'_{t,h}(t)|$ по h :

$$\begin{aligned} F'(h) &= \frac{1}{\alpha_h} \int_0^{\alpha_h(1-t/h)} p(u) du - \frac{h\alpha'_h}{\alpha_h^2} \int_0^{\alpha_h(1-t/h)} p(u) du \\ &\quad + \left[\frac{h\alpha'_h}{\alpha_h} \left(1 - \frac{t}{h}\right) + \frac{t}{h} \right] p\left(\alpha_h \left(1 - \frac{t}{h}\right)\right). \end{aligned}$$

Дифференцируя соотношение (4.4), получим

$$\begin{aligned} & \frac{h\alpha'_h}{\alpha_h} \left(1 - tN \left[p \left(\alpha_h \frac{t}{h} \right) \right] - (h-t)N \left[p \left(\alpha_h \left(1 - \frac{t}{h} \right) \right) \right] \right) \\ & = 1 - tN \left[p \left(\alpha_h \frac{t}{h} \right) \right] + tN \left[p \left(\alpha_h \left(1 - \frac{t}{h} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя в выражение для производной $F'(h)$ только что найденное соотношение для α'_h , получим, что положительность производной $F'(h)$ равносильна выполнению неравенства

$$\frac{N[p(\alpha_h(1-t/h))]}{p(\alpha_h(1-t/h))} \int_0^{\alpha_h(1-t/h)} p(u) du \geq \frac{\alpha_h}{h} - \frac{t\alpha_h}{h} N \left[p \left(\alpha_h \left(1 - \frac{t}{h} \right) \right) \right]. \quad (4.5)$$

В силу (4.2) и (4.4) неравенство (4.5) является следствием неравенства

$$\frac{t\alpha_h}{h} N \left[p \left(\alpha_h \left(1 - \frac{t}{h} \right) \right) \right] \geq \int_0^{\alpha_h t/h} N[p(u)] du.$$

Последнее неравенство всегда имеет место, так как $N(v)$ – возрастающая функция, и в рассматриваемом случае $t/h \leq 1 - t/h$. Таким образом, функция $\|x_{t,h}\|_\infty$ возрастает по h на $[h, 1]$ и, будучи непрерывной по h , принимает все значения от $\|x_{t,2t}\|_\infty$ до $\|x_{t,1}\|_\infty$.

Наконец, рассмотрим случай, когда $h \geq 1$. Очевидно, что тогда

$$\|x_{t,h}\|_\infty = \frac{h+1}{2} \|x_{t,1}\|_\infty.$$

Следовательно, $\|x_{t,h}\|_\infty$ возрастает и принимает все значения от $\|x_{t,1}\|_\infty$ до $+\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Очевидно, что в силу теоремы 2

$$\omega_N(D, \delta) = \omega_N(D_0, \delta)$$

для любого $\delta > 0$, что завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Для оценки снизу величины $E_K(D_t; W_N^{*,2})$ используем неравенство (3.1):

$$E_K(D_t; W_N^{*,2}) \geq \sup_{\delta > 0} (\omega_N(D_t, \delta) - K\delta).$$

Ввиду теоремы 3 последнее неравенство перепишется в виде

$$E_K(D_t; W_N^{*,2}) \geq \sup_{h > 0} (|x'_{t,h}(t)| - K\|x_{t,h}\|_\infty). \quad (4.6)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $K \geq 2$. Из неравенства (4.6) и построения функций $x_{t,h}(u)$ при $h \in [0, 1]$ (см. (1.7)) получим

$$E_K(D_t; W_N^{*,2}) \geq \sup_{h \in [0,1]} \left(\left(\frac{2}{h} - K \right) \|x_{t,h}\|_\infty + \|g_{t,h}\|_M \right) \geq \|g_{t, \frac{2}{K}}\|_M. \quad (4.7)$$

Зададим оператор $S_{t,K}: L_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ согласно следующему правилу:

$$S_{t,K}(x) := \begin{cases} \frac{K[x(2/K) - x(0)]}{2}, & K \in \left[2, \frac{1}{t}\right], \\ \frac{K[x(t + 1/K) - x(t - 1/K)]}{2}, & K \in \left[\frac{1}{t}, +\infty\right). \end{cases} \quad (4.8)$$

Ясно, что

$$|S_{t,K}(x)| \leq K\|x\|_\infty,$$

откуда норма оператора $S_{t,K}$ не превосходит K . Поэтому

$$\begin{aligned} E_K(D_t; W_N^{*,2}) &\leq U(D_t; S_{t,K}, W_N^{*,2}) = \sup_{\|x''\|_{(N)} \leq 1} |x'(t) - S_{t,K}(x)| \\ &= \sup_{\|x''\|_{(N)} \leq 1} \left| \int_0^1 g_{t,2/K}(\tau) x''(\tau) d\tau \right| = \|g_{t,2/K}\|_M. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Сопоставляя неравенства (4.7) и (4.9), придем к искомому равенству (3.2) для $K \geq 2$.

Остается рассмотреть случай, когда $K \in (0, 2)$. В этом случае из неравенства (4.6) будем иметь

$$E_K(D_t; W_N^{*,2}) \geq \sup_{h \geq 1} (|x'_{t,h}(t)| - K\|x_{t,h}\|_\infty). \quad (4.10)$$

По построению функций $\varphi_{t,h}$ при $h \geq 1$ (см. (2.1)) справедливы равенства

$$\|x_{t,h}\|_\infty = \frac{h+1}{2}\|x_{t,1}\|_\infty \quad \text{и} \quad |x'_{t,h}(t)| = |x'_{t,1}(t)| + (h-1)\|x_{t,1}\|_\infty.$$

Подставляя эти равенства в неравенство (4.10), получим

$$E_K(D_t; W_N^{*,2}) \geq |x'_{t,1}(t)| - \left(1 + \frac{K}{2}\right)\|x_{t,1}\|_\infty + \sup_{h \geq 1} \left(1 - \frac{K}{2}\right)\|x_{t,1}\|_\infty = +\infty.$$

Следовательно, равенство (3.2) окончательно доказано.

Для получения второго из равенств в теореме 5 теперь необходимо воспользоваться утверждением теоремы 4, промежуточным оператором $S_K: L_\infty \rightarrow L_\infty$, заданным правилом

$$S_K x(t) = S_{t,K}(x), \quad x \in L_\infty,$$

и неравенством (1.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Необходимость условия (3.3) очевидна в виду определения модуля непрерывности $\omega_N(D, \delta)$. Для доказательства достаточности условия (3.3) отметим, что при доказательстве теоремы 3 мы проверили непрерывность модуля непрерывности $\omega_N(D_0, \delta)$, а следовательно, по теореме 4 и модуля непрерывности $\omega_N(D, \delta)$. Следовательно, для любых чисел M_0 , M_1 и M_2 , которые удовлетворяют условиям (3.3), найдется такое число $h \in (0, M_0/M_2)$, что $\omega_N(D, \|x_{0,h}\|) = M_1/M_2$. Рассмотрим функцию

$$x(u) := M_2 \left(x_{0,h}(u) + \frac{M_0}{M_2} - h \right).$$

Несложно убедиться в том, что $\|x''\|_{(N)} = M_2$,

$$\|x'\|_{\infty} = M_2 \|x_{0,h}\|_{\infty} = M_2 \omega_N(D, \|x_{0,h}\|) = M_1$$

и $\|x\|_{\infty} = M_0$, что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7 проводится аналогично.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Красносельский, Я. Б. Рунтский, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Современные проблемы математики, Физматгиз, М., 1958.
- [2] E. Landau, “Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktion”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **13**:1 (1913), 43–49.
- [3] M. K. Kwong, A. Zettl, *Norm Inequalities for Derivatives and Differences*, Lecture Notes in Math., **1536**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [4] В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Неравенства для производных и их приложения*, Наукова думка, Киев, 2003.
- [5] A. Yu. Shadrin, “To the Landau–Kolmogorov problem on a finite interval”, *Open Problems in Approximation Theory*, SCT Publ., Singapore, 1994, 192–204.
- [6] A. Pinkus, “Some extremal properties of perfect splines and the pointwise Landau problem on the finite interval”, *J. Approx. Theory*, **23**:1 (1978), 37–64.
- [7] Ю. В. Бабенко, “Точные неравенства типа Ландау для функций со вторыми производными из пространств Орлича”, *Вестн. Днепропетровск. ун-та*, 2000, № 2, 18–22.
- [8] В. И. Буренков, В. А. Гусаков, “О точных постоянных в неравенствах для модуля производной”, *Функциональные пространства, приближения, дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Олега Владимировича Бесова, Тр. МИАН, **243**, Наука, М., 2003, 104–126.
- [9] Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, *Экстремальные свойства полиномов и сплайнов*, Наукова думка, Киев, 1992.
- [10] Ю. В. Бабенко, “Поточечные неравенства типа Ландау–Колмогорова для функций, определенных на конечном отрезке”, *Укр. матем. журн.*, **53**:2 (2001), 238–243.
- [11] С. Б. Стечкин, “Наилучшее приближение линейных операторов”, *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 137–148.
- [12] В. В. Арестов, “Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи”, *УМН*, **51**:6 (1996), 89–124.
- [13] А. Н. Колмогоров, “О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале”, *Уч. записки Моск. гос. ун-та*, **30**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1939, 3–16.
- [14] А. Н. Колмогоров, “О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале”, *Избранные труды. Математика и механика*, Наука, М., 1985, 252–263.

Ю. В. Бабенко

Kennesaw State University, USA

E-mail: ybabenko@kennesaw.edu

Поступило

10.12.2009

Исправленный вариант

27.02.2010

Д. С. Скороходов

Днепропетровский национальный университет

E-mail: dmitriy.skorokhodov@gmail.com