Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Дюкарев, А. Е. Чоке Риверо, Матричная версия теоремы Гамбургера, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 4, 522–529

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8792>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 18:29:34

Матричная версия теоремы Гамбургера

Ю. М. Дюкарев, А. Е. Чоке Риверо

В работах Гамбургера по классической проблеме моментов были получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы проблема моментов Стилтеса имела единственное решение, а проблема моментов Гамбургера с теми же самыми моментами имела бесконечно много решений. В статье получен аналог этого критерия Гамбургера для матричной проблемы моментов.

Библиография: 12 названий.

1. Постановка задачи. Пусть дано целое число $m \geq 1$ и $\mathbb{C}^m$ обозначает линейное пространство m -мерных столбцов комплексных чисел со скалярным произведением $(f, g) = f^*g$. Пусть $\mathbb{C}^{m \times n}$ обозначает множество комплексных прямоугольных матриц с m строками и n столбцами, а $\mathbb{C}_H^{m \times m}$ – множество эрмитовых матриц m -го порядка. Эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}_H^{m \times m}$ называется *неотрицательной*, если $(f, Af) \geq 0$ для любого $f \in \mathbb{C}^m$. Множество неотрицательных матриц m -го порядка обозначим $\mathbb{C}_{\geq}^{m \times m}$. Неотрицательная матрица $A \in \mathbb{C}_{\geq}^{m \times m}$ называется *положительной*, если $(f, Af) > 0$ для всех ненулевых векторов $f \in \mathbb{C}^m$. Множество положительных матриц m -го порядка обозначим $\mathbb{C}_{>}^{m \times m}$. Единичную матрицу m -го порядка обозначим через I_m , а нулевую матрицу с m строками и n столбцами обозначим через $0_{m \times n}$. Для упрощения записи мы часто не будем писать нижние индексы у матриц I_m и $0_{m \times n}$, если эти индексы легко определяются из контекста. Тот факт, что $A \in \mathbb{C}_{\geq}^{m \times m}$ (соответственно $A \in \mathbb{C}_{>}^{m \times m}$), мы будем записывать в виде $A \geq 0$ (соответственно $A > 0$). Кроме того, введем обозначение

$$\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}, \quad \mathbb{R}_- = \{t \in \mathbb{R} : t < 0\}.$$

Рассмотрим бесконечную последовательность матриц

$$s_0, s_1, \dots, s_k, \dots \subset \mathbb{C}_{>}^{m \times m} \quad (1)$$

такую, что при всех $j \geq 0$ положительные блочные матрицы Ганкеля

$$K_1^{(2j)} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_j \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_j & s_{j+1} & \dots & s_{2j} \end{bmatrix}, \quad K_2^{(2j+1)} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{j+1} \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j+1} & s_{j+2} & \dots & s_{2j+1} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Ясно, что $K_1^{(2j)}, K_2^{(2j+1)} \in \mathbb{C}_{>}^{(j+1)m \times (j+1)m}$.

В матричной проблеме моментов Стилтеса требуется описать множество монотонно возрастающих матриц-функций (МФ) $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}_H^{m \times m}$, $\sigma(t+0) = \sigma(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$, $\sigma(0) = 0$, таких, что матрицы (1) допускают интегральные представления

$$s_j = \int_{\mathbb{R}_+} t^j d\sigma(t) \quad \text{для всех } j \geq 0. \quad (3)$$

Множество решений σ проблемы моментов (3) обозначим $\mathcal{M}_\infty^+$.

В матричной проблеме моментов Гамбургера требуется описать множество монотонно возрастающих МФ $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_H^{m \times m}$, $\sigma(t+0) = \sigma(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$, $\sigma(0) = 0$, таких, что матрицы (1) допускают интегральные представления

$$s_j = \int_{\mathbb{R}} t^j d\sigma(t) \quad \text{для всех } j \geq 0. \quad (4)$$

Множество решений σ проблемы моментов (4) обозначим $\mathcal{M}_\infty$.

Если $\sigma \in \mathcal{M}_\infty^+$, то МФ

$$\tilde{\sigma}(t) = \begin{cases} \sigma(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ 0, & t \in \mathbb{R}_-, \end{cases}$$

принадлежит множеству $\mathcal{M}_\infty$. Мы будем отождествлять МФ σ и $\tilde{\sigma}$ и в этом смысле понимать включение $\mathcal{M}_\infty^+ \subset \mathcal{M}_\infty$.

При $m = 1$ проблемы моментов (3) и (4) называются *классическими*. Приведем некоторые известные результаты по классическим проблемам моментов (3) и (4) (см. [1]–[5]). Каждая из этих проблем либо имеет единственное решение (является *определенной*), либо бесконечно много решений (является *неопределенной*). Из включения $\mathcal{M}_\infty^+ \subset \mathcal{M}_\infty$ следует, что если проблема (3) неопределена, то и подавно неопределена проблема (4). Обратное утверждение неверно. В статье [4] Гамбургер получил необходимое и достаточное условие, при выполнении которого классическая проблема моментов (3) является определенной, а классическая проблема моментов (4) является неопределенной. Основным результатом этой статьи является обобщение процитированного результата Гамбургера на матричный случай. Мы используем некоторые идеи и методы подхода Потапова к решению интерполяционных задач (см. [6]–[10]).

2. Формулировка основного результата. В этом пункте мы введем основные обозначения и сформулируем некоторые результаты по матричной проблеме моментов. Пусть дана последовательность матриц (1) и выполнены условия (2). Рассмотрим блочные матрицы

$$\begin{aligned} u_1^{(2j)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -s_0 \\ \vdots \\ -s_{j-1} \end{bmatrix}, & v^{(2j)} &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, & u_2^{(2j)} &= \begin{bmatrix} -s_0 \\ -s_1 \\ \vdots \\ -s_{j-1} \end{bmatrix}, \\ L_1^{(2j)} &= \begin{bmatrix} I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, & L_2^{(2j)} &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $j \in \mathbb{N}$. Здесь $u_1^{(2j)}, v^{(2j)} \in \mathbb{C}^{(j+1)m \times m}$, $u_2^{(2j)} \in \mathbb{C}^{jm \times m}$, $L_1^{(2j)}, L_2^{(2j)} \in \mathbb{C}^{(j+1)m \times jm}$ и выполнено основное тождество

$$L_2^{(2j)} K_2^{(2j-1)} - K_1^{(2j)} L_1^{(2j)} = v^{(2j)} u_2^{(2j)*}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Далее,

$$T^{(2j)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}, \quad R^{(2j)}(t) = \begin{bmatrix} I & \dots & 0 & 0 \\ tI & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t^j I & \dots & tI & I \end{bmatrix},$$

где $j \in \mathbb{N}$. Здесь $T^{(2j)}, R^{(2j)}(t) \in \mathbb{C}^{(j+1)m \times (j+1)m}$. И пусть

$$y_{q,p} = \begin{bmatrix} s_q \\ s_{q+1} \\ \vdots \\ s_p \end{bmatrix}, \quad z_{q,p} = (s_q, s_{q+1}, \dots, s_p), \quad q \geq p \geq 0,$$

$$\tilde{L}^{(0)} = s_0, \quad \tilde{L}^{(2j)} = s_{2j} - z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}} y_{j,2j-1}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Здесь $y_{q,p} \in \mathbb{C}^{(p-q+1)m \times m}$, $z_{q,p} \in \mathbb{C}^{m \times (p-q+1)m}$, $\tilde{L}^{(0)}, \tilde{L}^{(2j)} \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Ясно, что $z_{q,p} = y_{q,p}^*$. Из очевидного равенства, $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} K_1^{(2j)} &= \left[\begin{array}{c|c} K_1^{(2j-2)} & y_{j,2j-1} \\ \hline z_{j,2j-1} & s_{2j} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}} & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} K_1^{(2j-2)} & 0 \\ \hline 0 & \tilde{L}^{(2j)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & K_1^{(2j-2)^{-1}} y_{j,2j-1} \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

следует, что $\tilde{L}^{(2j)} \in \mathbb{C}_{>}^{m \times m}$. Поэтому

$$\begin{aligned} K_1^{(2j)^{-1}} &= \left[\begin{array}{c|c} I & -K_1^{(2j-2)^{-1}} y_{j,2j-1} \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} K_1^{(2j-2)^{-1}} & 0 \\ \hline 0 & \tilde{L}^{(2j)^{-1}} \end{array} \right] \\ &\quad \times \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}} & I \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Как мы уже отмечали, классическая ($m = 1$) проблема моментов Стильтеса (3) может быть неопределенной или определенной. Аналогичным образом матричная ($m > 1$) проблема моментов Стильтеса может быть *вполне неопределенной* или *вырожденной* (см. [11]).

ТЕОРЕМА 2.1. *Для того, чтобы проблема моментов Стильтеса (3) была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды*

$$\sum_{j=0}^{\infty} m_j \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \ell_j. \quad (9)$$

Здесь матричные параметры Стильеса задаются формулами

$$\begin{aligned} m_0 &= v^{(0)*} K_1^{(0)^{-1}} v^{(0)} > 0, \\ \ell_0 &= u_2^{(2)*} K_2^{(1)^{-1}} u_2^{(2)} > 0 \\ m_j &= v^{(2j)*} K_1^{(2j)^{-1}} v^{(2j)} - v^{(2j-2)*} K_1^{(2j-2)^{-1}} v^{(2j-2)} > 0, \\ \ell_j &= u_2^{(2j+2)*} K_2^{(2j+1)^{-1}} u_2^{(2j+2)} - u_2^{(2j)*} K_2^{(2j-1)^{-1}} u_2^{(2j)} > 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $j \in \mathbb{N}$.

Доказательство этой теоремы имеется в [11].

С матричной проблемой моментов Гамбургера (4) свяжем матричные многочлены 1-го и 2-го рода (см. [10])

$$P_0(t) = (\tilde{L}^{(0)})^{-1/2}, \quad P_j(t) = (\tilde{L}^{(2j)})^{-1/2} [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] R^{(2j)}(t) v^{(2j)}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

$$Q_0(t) = 0, \quad Q_j(t) = -(\tilde{L}^{(2j)})^{-1/2} [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] R^{(2j)}(t) u_1^{(2j)}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Матричная ($m > 1$) проблема моментов Гамбургера может быть вполне неопределенной или вырожденной (см. [10], [12]).

ТЕОРЕМА 2.2. Для того, чтобы проблема моментов Гамбургера (4) была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j^*(0) P_j(0) \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{\infty} Q_j^*(0) Q_j(0). \quad (13)$$

Доказательство этой теоремы имеется в [10].

Теперь мы можем сформулировать основной результат.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть дана бесконечная последовательность матриц (1), удовлетворяющая условиям (2). Рассмотрим порожденную этой последовательностью матриц проблему моментов Стильеса (3) и порожденную этой же последовательностью матриц проблему моментов Гамбургера (4). И пусть, далее, матричные параметры Стильеса определены формулами (10).

Для того, чтобы проблема моментов Гамбургера (4) была вполне неопределенной, а проблема моментов Стильеса (3) вырожденной, необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\ell_0 + \ell_1 + \dots + \ell_{j-1})^* m_j (\ell_0 + \ell_1 + \dots + \ell_{j-1}) \quad (14)$$

сходился, а ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \ell_j \quad (15)$$

расходился.

Эта теорема обобщает на матричный случай ($m > 1$) результат, доказанный Гамбургером для классической ($m = 1$) проблемы моментов (см. [4]).

3. Доказательство основного результата. В этом пункте будет доказана теорема 2.3. Мы начинаем с доказательства некоторых лемм.

ЛЕММА 3.1. *В условиях теоремы 2.3 имеем*

$$P_j^*(0)P_j(0) = m_j, \quad j \geq 0, \quad (16)$$

$$Q_j^*(0)Q_j(0) = (\ell_0 + \ell_1 + \dots + \ell_{j-1})^* m_j (\ell_0 + \ell_1 + \dots + \ell_{j-1}), \quad j \geq 1. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемму докажем по шагам.

Шаг 1. При $j \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} & v^{(2j)*} K_1^{(2j)^{-1}} v^{(2j)} - v^{(2j-2)*} K_1^{(2j-2)^{-1}} v^{(2j-2)} \\ &= v^{(2j)*} [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I]^* \tilde{L}^{(2j)^{-1}} [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] v^{(2j)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для доказательства достаточно матрицу $K_1^{(2j)^{-1}}$ преобразовать с помощью (8).

Шаг 2. Докажем равенства (16). При $j = 0$ имеем

$$m_0 = v^{(0)*} K_1^{(0)^{-1}} v^{(0)} = s_0^{-1} = \tilde{L}^{(0)^{-1}} = \tilde{L}^{(0)^{-(1/2)*}} \tilde{L}^{(0)^{-1/2}} = P_0^*(0)P_0(0).$$

При $j \geq 1$ с учетом (18) получим

$$\begin{aligned} m_j &= v^{(2j)*} K_1^{(2j)^{-1}} v^{(2j)} - v^{(2j-2)*} K_1^{(2j-2)^{-1}} v^{(2j-2)} \\ &= v^{(2j)*} [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I]^* \tilde{L}^{(2j)^{-(1/2)*}} \tilde{L}^{(2j)^{-1/2}} [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] v^{(2j)} \\ &= P_j^*(0)P_j(0). \end{aligned}$$

Шаг 3. При $j \geq 1$ имеют место тождества

$$\ell_0 + \ell_1 + \dots + \ell_{j-1} = u_2^{(2j)*} K_2^{(2j-1)^{-1}} u_2^{(2j)}, \quad (19)$$

Эти тождества непосредственно следуют из (10).

Шаг 4. Имеют место тождества, $j \geq 1$,

$$[-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, Ir] K_1^{(2j)} L_1^{(2j)} = 0, \quad (20)$$

$$[-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] v^{(2j)} u_2^{(2j)*} K_2^{(2j-1)^{-1}} u_2^{(2j)} = [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] u_1^{(2j)}. \quad (21)$$

С учетом (7) и (5) имеем

$$\begin{aligned} & [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] K_1^{(2j)} L_1^{(2j)} \\ &= [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] \left[\frac{K_1^{(2j-2)}}{z_{j,2j-1}} \middle| \frac{y_{j,2j-1}}{s_{2j}} \right] L_1^{(2j)} \\ &= [0_{m \times (j-1)m} | s_{2j} - z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}} y_{j,2j-1}] \begin{bmatrix} I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 0_{m \times jm}. \end{aligned}$$

Таким образом, (20) доказано. Теперь докажем (21). Воспользовавшись (6), очевидным равенством $L_2^{(2j)} u_2^{(2j)} = u_1^{(2j)}$ и (20), получим

$$\begin{aligned}
 & [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] v^{(2j)} u_2^{(2j)*} K_2^{(2j-1)^{-1}} u_2^{(2j)} - [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] u_1^{(2j)} \\
 &= [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] (L_2^{(2j)} K_2^{(2j-1)} \\
 &\quad - K_1^{(2j)} L_1^{(2j)}) K_2^{(2j-1)^{-1}} u_2^{(2j)} - [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] u_1^{(2j)} \\
 &= [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] L_2^{(2j)} u_2^{(2j)} \\
 &\quad - [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] K_1^{(2j)} L_1^{(2j)} K_2^{(2j-1)^{-1}} u_2^{(2j)} - [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] u_1^{(2j)} \\
 &= [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] K_1^{(2j)} L_1^{(2j)} K_2^{(2j-1)^{-1}} u_2^{(2j)} = 0.
 \end{aligned}$$

Шаг 5. Докажем (17). Пусть $j \geq 1$. Последовательно воспользовавшись (19), (10), (18), (21) и (12), получим

$$\begin{aligned}
 & (\ell_0 + \ell_1 + \dots + \ell_{j-1})^* m_j (\ell_0 + \ell_1 + \dots + \ell_{j-1}) \\
 &= (u_2^{(2j)*} K_2^{(2j-1)^{-1}} u_2^{(2j)})^* \\
 &\quad \times (v^{(2j)*} K_1^{(2j)^{-1}} v^{(2j)} - v^{(2j-2)*} K_1^{(2j-2)^{-1}} v^{(2j-2)}) u_2^{(2j)*} K_2^{(2j-1)^{-1}} u_2^{(2j)} \\
 &= u_2^{(2j)*} K_2^{(2j-1)^{-1}} u_2^{(2j)} v^{(2j)*} [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I]^* \\
 &\quad \times \tilde{L}^{(2j)^{-1}} [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] v^{(2j)} u_2^{(2j)*} K_2^{(2j-1)^{-1}} u_2^{(2j)} \\
 &= u_1^{(2j)*} [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I]^* (\tilde{L}^{(2j)})^{-1/2} (\tilde{L}^{(2j)})^{-1/2} [-z_{j,2j-1} K_1^{(2j-2)^{-1}}, I] u_1^{(2j)} \\
 &= Q_j^*(0) Q_j(0).
 \end{aligned}$$

Лемма 3.1 доказана.

В пространстве квадратных матриц $\mathbb{C}^{m \times m}$ рассмотрим операторную норму, которая на положительных матрицах $A \in \mathbb{C}_{>}^{m \times m}$ равна максимальному собственному значению и может быть вычислена по формуле

$$\|A\| = \sup\{(x, Ax) : x \in \mathbb{C}^m, \|x\| \leq 1\}.$$

ЛЕММА 3.2. Пусть матрицы $A, X \in \mathbb{C}_H^{m \times m}$ и $A > 0, X > I$. Тогда

$$\|XAX\| \geq \|A\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вектор $\tilde{x} \in \mathbb{C}^m$, $\|\tilde{x}\| = 1$, такой, что $\|A\| = (\tilde{x}, A\tilde{x})$. Если $\tilde{y} = X^{-1}\tilde{x}$, то

$$1 - \tilde{y}^* \tilde{y} = \tilde{x}^* \tilde{x} - \tilde{x}^* X^{-1*} X^{-1} \tilde{x} = \tilde{x}^* X^{-1*} (X^* X - I) X^{-1} \tilde{x} \geq 0.$$

Таким образом, $\|\tilde{y}\| \leq 1$. Далее, имеем

$$\begin{aligned}
 \|XAX\| &= \sup\{(x, XAXx) : x \in \mathbb{C}^m, \|x\| \leq 1\} \\
 &\geq (\tilde{y}, XAX\tilde{y}) = (X X^{-1} \tilde{x}, A X X^{-1} \tilde{x}) = (\tilde{x}, A\tilde{x}) = \|A\|.
 \end{aligned}$$

Лемма 3.2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Необходимость. Пусть проблема моментов Гамбургера (4) вполне неопределена, а проблема моментов Стильтьеса (3) вырождена. По теореме 2.2 сходятся ряды (13). Отсюда и из леммы 3.1 следует сходимость ряда (14) и ряда $\sum_{j=1}^{\infty} m_j$. По теореме 2.1 из вырожденности проблемы моментов Стильтьеса (3) и сходимости ряда $\sum_{j=1}^{\infty} m_j$ следует, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \ell_j$ расходится.

Достаточность. Пусть ряд (14) сходится, а ряд (15) расходится. По теореме 2.1 проблема моментов Стильтьеса (3) вырождена. Из сходимости ряда (14) и невырожденности матрицы ℓ_0 следует, что сходится ряд

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} (I + \ell_0^{-1/2} \ell_1 \ell_0^{-1/2} + \dots + \ell_0^{-1/2} \ell_{j-1} \ell_0^{-1/2}) \ell_0^{1/2} m_j \ell_0^{1/2} \\ & \quad \times (I + \ell_0^{-1/2} \ell_1 \ell_0^{-1/2} + \dots + \ell_0^{-1/2} \ell_{j-1} \ell_0^{-1/2}). \end{aligned}$$

По лемме 3.2 имеем

$$\begin{aligned} & \left\| (I + \ell_0^{-1/2} \ell_1 \ell_0^{-1/2} + \dots + \ell_0^{-1/2} \ell_{j-1} \ell_0^{-1/2}) \ell_0^{1/2} m_j \ell_0^{1/2} \right. \\ & \quad \left. \times (I + \ell_0^{-1/2} \ell_1 \ell_0^{-1/2} + \dots + \ell_0^{-1/2} \ell_{j-1} \ell_0^{-1/2}) \right\| \\ & \geq \| \ell_0^{1/2} m_j \ell_0^{1/2} \| \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} \ell_0^{1/2} m_j \ell_0^{1/2}$. Отсюда и из невырожденности матрицы $\ell_0^{1/2}$ следует, что сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_j. \quad (22)$$

По лемме 3.1 из сходимости рядов (14) и (22) следует сходимость рядов (13). По теореме 2.2 проблема моментов Гамбургера (4) вполне неопределена.

Теорема 2.3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T.-J. Stieltjes, “Recherches sur les fractions continues”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, **8**:4 (1894), J1–J122.
- [2] T.-J. Stieltjes, “Recherches sur les fractions continues”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, **9**:1 (1895), A1–A47.
- [3] H. Hamburger, “Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems”, *Math. Ann.*, **81**:2-4 (1920), 235–319.
- [4] H. Hamburger, “Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems”, *Math. Ann.*, **82**:1-2 (1921), 120–164.
- [5] H. Hamburger, “Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems”, *Math. Ann.*, **82**:3-4 (1921), 168–187.
- [6] И. В. Ковалишина, В. П. Потапов, “Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны–Пика”, *Докл. АН АрмССР*, **59**:1 (1974), 17–22.
- [7] В. П. Потапов, “Дробно-линейные преобразования матриц”, *Исследования по теории операторов и их приложениям*, Сб. науч. тр., Наукова думка, Киев, 1979, 75–97.
- [8] И. В. Ковалишина, В. П. Потапов, “Радиусы круга Вейля в матричной проблеме Неванлинны–Пика”, *Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения*, Сб. науч. тр., Наукова думка, Киев, 1981, 25–49.

- [9] В. П. Потапов, “К теории матричных кругов Вейля”, *Функциональный анализ и прикладная математика*, Сб. науч. тр., Наукова думка, Киев, 1982, 113–121.
- [10] И. В. Ковалишина, “Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:3 (1983), 455–497.
- [11] Ю. М. Дюкарев, “О критериях неопределенности матричной проблемы моментов Стилтеса”, *Матем. заметки*, **75**:1 (2004), 71–88.
- [12] М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, “Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов”, *УМН*, **2**:3 (1947), 60–106.

Ю. М. Дюкарев

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

E-mail: Yury.M.Dyukarev@univer.kharkov.ua

Поступило

26.12.2009

А. Е. Чоке Риверо

Instituto de Física y Matemáticas,

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,

Mexico

E-mail: abdon@ifm.umich.mx