Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Самовол, О новых резонансах и нормальной форме автономных систем с одним нулевым корнем, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 1, 63–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8795>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 11:11:28

УДК 517.91

О новых резонансах и нормальной форме автономных систем с одним нулевым корнем

В. С. Самовол

В статье рассматриваются автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности невырожденной особой точки, у которых матрица линейной части имеет одно нулевое значение, а остальные собственные значения лежат вне мнимой оси. Исследуется приводимость таких систем к полиномиальной нормальной форме.

Библиография: 8 названий.

Введение. Данная работа является продолжением исследований, начатых в [1], где анализировались системы обыкновенных дифференциальных уравнений, матрица линейной части которых имеет одно нулевое собственное число, в то время как другие собственные числа лежат вне мнимой оси. Для краткости в дальнейшем будем такие системы называть системами с одним нулевым корнем. В работе изучается вид нормальной формы и приводимость к ней указанной вещественной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки. Нормальная форма систем обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно хорошо изучена. В частности, подробно исследована задача аналитической приводимости к нормальной форме (см., например, [2]). В большинстве работ, посвященных данной тематике, исследуются системы с невырожденной особой точкой (или инвариантным многообразием), в то время как даже слабо вырожденные системы весьма мало исследованы. По поводу частично вырожденных систем см. [3]. В работах [4], [5] исследована задача о бесконечно гладкой эквивалентности формально эквивалентных систем с одним нулевым корнем или двумя чисто мнимыми корнями матрицы линейной части. Большое число работ посвящено задаче конечно-гладкой эквивалентности систем с невырожденной линейной частью; эта проблематика в значительной мере отражена в книге [6]. В данной работе мы рассмотрим класс преобразований с особенностями и покажем, что с помощью таких преобразований можно получить весьма полезную информацию о нормальной форме.

Рассмотрим вещественную автономную систему

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = Q(\xi), \quad (1)$$

где $\xi, Q(\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $n > 0$, $Q(\xi)$ – функция класса C^∞ в некоторой окрестности начала координат, $Q(0) = 0$, матрица $\tilde{A} = Q'(0)$ имеет n собственных чисел, лежащих вне мнимой оси и одно нулевое собственное число.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы $\tilde{A}$, лежащие вне мнимой оси, $\lambda_0 = 0$. С помощью стандартного линейного преобразования приведем систему (1) к следующему виду, где матрица $\tilde{A}$ имеет жорданову форму:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y}_i &= \varepsilon_i y_{i+1} + \lambda_i y_i + g_i(x, y), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon_i = 0$ или 1 , $f(x, y), g_i(x, y) = o(\|(x, y)\|)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ – комплексный вектор, y_i будем называть невырожденными координатами (переменными), а x будем называть вырожденной координатой (переменной).

Ограничимся рассмотрением случая, когда

$$f(x, 0) = bx^{m+1} + o(|x|^{m+1}), \quad b \neq 0, \quad m \geq 1$$

– целое число.

Из [4], [5] следует существование у системы (2) центрального многообразия (возможно, не единственного) класса C^∞ , отвечающего нулевому собственному числу. Зафиксируем одно из таких многообразий. После соответствующей замены переменных можно считать, что данное многообразие определяется уравнением $y = 0$. Согласно [7] на указанном центральном многообразии система (2) приводится невырожденным преобразованием класса C^∞ к виду

$$\dot{x} = bx^{m+1} + cx^{2m+1}.$$

Поэтому без ограничения общности мы в дальнейшем будем считать, что упомянутые выше преобразования уже сделаны. Кроме того, очевидно, что линейным преобразованием вырожденной переменной можно добиться того, чтобы выполнялось равенство $b = \pm 1$. Будем считать это условие выполненным.

Следующая теорема является аналогом теоремы 1 из [1] и ее доказательство практически повторяет рассуждения, использованные в [1].

ТЕОРЕМА 1. *Существует невырожденное преобразование класса C^∞ , приводящее систему (1) к виду, при котором ряд Тейлора правой части системы является суммой резонансных мономов по невырожденным переменным с коэффициентами, представляющими собой бесконечно-гладкие функции от вырожденной переменной.*

Ниже будем считать, что система (1) (и, соответственно, система (2)) уже приведена к виду, указанному в данной теореме.

В [1] показано, что если все собственные числа матрицы $\tilde{A}$ различны между собой, то система приводится невырожденным конечно-гладким преобразованием к полиномиальной нормальной форме. При этом степень полинома является возрастающей функцией порядка гладкости нормализующего преобразования. Из этих же результатов следует теорема о конечно-гладкой эквивалентности таких систем (конечная определенность ростков соответствующих векторных полей). Таким образом, главной проблемой при анализе системы (2) является случай, когда некоторые

собственные числа матрицы $\tilde{A}$ совпадают. Эта проблема проявляется уже при преобразовании линейной (по невырожденным координатам) части системы (2), которая имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= bx^{m+1} + cx^{2m+1}, \\ \dot{y} &= A(x)y.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь $A(0) = \tilde{A}$. Анализ этой задачи посвящены первые главы книги [8]. Однако мы получим более точные результаты и устраним некоторые пробелы, имеющиеся в [8]. Основная ценность методов работы [8] заключается, на наш взгляд, в использовании *срезающих* преобразований.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Срезающим преобразованием* (см. [8]) называется преобразование вида

$$y = S(x)z, \quad S(x) = \text{diag}(1, x^\delta, x^{2\delta}, \dots, x^{(n-1)\delta}). \quad (4)$$

где $\delta > 0$ – рациональное число.

Срезающим преобразованием будем также называть преобразование вида

$$y = S(x)z, \quad S(x) = \text{diag}(E_1, xE_2),$$

где E_1, E_2 – единичные матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Слабо вырожденным преобразованием* называется замена переменных вида

$$\begin{aligned}x &= du^l, \\ y &= T(x)z.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь $T(x)$ является произведением конечного числа преобразований, одна часть которых является срезающими преобразованиями, а другая часть – это близкие к тождественным преобразования класса C^∞ . Число l является натуральным числом, $d = \text{const} \neq 0$.

Основным результатом относительно системы (3) является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Существует слабо вырожденное преобразование (5), приводящее систему (3) к следующей нормальной форме:*

$$\begin{aligned}\dot{u} &= bu^{p+1} + c_1u^{2p+1}, \\ \dot{z} &= (A_0 + uA_1 + \dots + u^{p-1}A_{p-1} + u^pA_p)z.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ – постоянные диагональные матрицы, A_p – постоянная матрица, имеющая жорданову форму, $p = ml$. При этом на диагонали матрицы A_0 расположены собственные числа матрицы $A(0)$, матрица A_p такова, что если числа λ_j^i и λ_r^i , стоящие на диагонали какой либо матрицы A_i , $0 \leq i \leq p-1$, не равны друг другу, то соответствующие диагональные элементы жордановой матрицы A_p располагаются в ее разных жордановых клетках.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Конечные отрезки рядов Тейлора преобразований класса C^∞ , являющихся множителями слабо вырожденного преобразования (5) из теоремы 2, определяются конечными отрезками ряда Тейлора матрицы $A(x)$ системы (3). Общее количество множителей, составляющих преобразование (5), зависит только от m

и n . Срезающие преобразования, входящие множителями в слабо вырожденное преобразование (5), определяются отрезком ряда Тейлора матрицы $A(x)$, длина которого равна некоторому числу $m_1(m, n)$. Число l зависит только от n .

Рассмотрим теперь систему, которая получится после применения к системе (2) преобразования, приводящего ее линейную часть (3) к виду (6). Система будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= bu^{p+1} + c_1 u^{2p+1} + G(u, z), \\ \dot{z} &= (A_0 + uA_1 + \dots + u^{p-1}A_{p-1} + u^p A_p)z + F(u, z),\end{aligned}\quad (7)$$

$F(u, z) = u^{-h}F_1(u, z)$, $G(u, z) = u^{1-l}G_1(u, z)$, $F_1(u, z)$, $G_1(u, z)$ – функции класса C^∞ , ряды Тейлора которых представляют собой суммы резонансных мономов по z степени большей единицы с коэффициентами, являющимися функциями класса C^∞ , зависящими от u , $h > 0$ – целое число.

Для того, чтобы избавиться от отрицательных степеней, сделаем замену $z = u^{l+h}w$. В результате этой замены в уравнениях системы (7) исчезнут отрицательные степени вырожденной переменной, а ряды Тейлора функций $F(u, z)$, $G(u, z)$ станут суммой резонансных мономов по невырожденным координатам с коэффициентами, являющимися функциями класса C^∞ , зависящими от u . При этом в линейной (по невырожденным переменным) части системы появятся “лишние” члены порядка u^{2p} , однако, как это будет видно из доказательства теоремы 2, эти члены можно убрать с помощью невырожденного бесконечно-гладкого преобразования. Чтобы не загромождать изложение, будем считать, что полученная система (7) уже имеет нужный вид.

Приведение линейной части системы к виду (6) открывает новые возможности для уточнения понятия резонанса.

Ниже мы рассмотрим мономы $u^r z^s$, из которых (с некоторыми постоянными коэффициентами) состоят ряды Тейлора функций $F(u, z)$ и $G(u, z)$ из системы (7) с учетом сделанных выше относительно нее замечаний. Здесь и далее используются следующие обозначения: $z^s = z_1^{s_1} \dots z_n^{s_n}$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, $s_1, \dots, s_n$ – неотрицательные целые числа, $|s| = s_1 + \dots + s_n$, $\lambda^j = (\lambda_1^j, \dots, \lambda_n^j)$ – вектор, состоящий из элементов спектра матрицы A_j , $0 \leq j \leq p$, $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Если моном $u^r z^s$ входит в уравнение с номером i , $1 \leq i \leq n+1$, то выполняется резонансное соотношение $s_1 \lambda_1 + \dots + s_n \lambda_n = \lambda_{i-1}$ и моном z^s мы называем *резонансным* мономом. Здесь и ниже считается, что $\lambda_0 = \lambda_0^q = 0$, $0 \leq q \leq p$. Ниже мы рассматриваем только резонансные мономы z^s .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Уровнем* резонансного монома z^s , входящего в уравнение с номером i , $1 \leq i \leq n+1$, называется такое число q , $0 \leq q \leq p-2$, для которого выполняются условия

$$(s, \lambda^j) = \lambda_{i-1}^j, \quad 0 \leq j \leq q, \quad (s, \lambda^{q+1}) \neq \lambda_{i-1}^{q+1}. \quad (8)$$

Если выполняются условия

$$(s, \lambda^j) = \lambda_{i-1}^j, \quad 0 \leq j \leq p-1, \quad (9)$$

то уровнем монома z^s называется число $p-1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Мы будем говорить, что моном $u^r z^s$ является *устраняемым мономом*, если

- либо моном z^s является мономом уровня q , $0 \leq q \leq p-2$, и $r \geq q+1$;
- либо моном z^s является мономом уровня $p-1$, $r \geq p$, и выполняется неравенство $(s, \lambda^p) - b(p-r) \neq \lambda_{i-1}^p$ (если моном $u^r z^s$ входит в одно из последних n уравнений системы с номером i) или же неравенство $(s, \lambda^p) - b(2p+1-r) \neq 0$ (если моном входит в первое уравнение).

Будем считать моном $u^r z^s$ *неустраняемым*, если он не является устраняемым мономом.

Из последнего определения ясно, что все резонансные (в традиционном смысле) мономы z^s являются неустраняемыми. Новое состоит в классификации мономов $u^r z^s$ при $r > 0$.

Отметим, что для каждого резонансного набора s число неустраняемых мономов $u^r z^s$ конечно. Это мономы, для которых $r \leq q$ в случае $q < p-1$, где q – уровень монома, а также единственный возможный в каждом из уравнений системы неустраняемый моном уровня $p-1$, для которого выполняется равенство

$$(s, \lambda^p) - b(p-r) = \lambda_{i-1}^p$$

(если он входит в одно из последних n уравнений системы с номером i) либо равенство

$$(s, \lambda^p) - b(2p+1-r) = 0$$

(если он входит в первое уравнение системы).

Смысл определения 4 раскрывается при рассмотрении следующей формальной системы, аналогичной системе (7):

$$\begin{aligned} \dot{u} &= bu^{p+1} + cu^{2p+1} + g^*(u, z), \\ \dot{z} &= (A_0 + uA_1 + \dots + u^{p-1}A_{p-1} + u^pA_p)z + F^*(u, z). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь матрицы A_j , $1 \leq j \leq p$, такие же, как и в системе (6), $F^*(u, z)$, $g^*(u, z)$ – формальные ряды, члены которых являются резонансными мономами, степени которых по невырожденным координатам выше первой. Для такой системы верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Для системы (10) существует близкое к тождественному формальное преобразование, приводящее ее к формальной нормальной форме следующего вида (для простоты мы сохраняем обозначения системы (10)):

$$\begin{aligned} \dot{u} &= bu^{p+1} + cu^{2p+1} + \tilde{g}(u, z), \\ \dot{z} &= (A_0 + uA_1 + \dots + u^{p-1}A_{p-1} + u^pA_p)z + \tilde{F}(u, z), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\tilde{F}(u, z)$, $\tilde{g}(u, z)$ – суть формальные ряды, члены которых являются неустраняемыми мономами.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. С учетом определения неустраняемых мономов, формальные ряды $\tilde{F}(u, z)$, $\tilde{g}(u, z)$ в системе (11) можно представить в виде рядов по резонансным мономам z^s , коэффициенты которых будут многочленами от вырожденной переменной. При этом, если элемент ряда представить в виде $P(u)z^s$, то степень многочлена $P(u)$ линейно зависит от $|s|$.

Поскольку формальная приводимость для системы (7) означает приводимость класса C^∞ (см. [4], [5]), то следствием теоремы 3 является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Существует близкое к тождественному преобразование класса C^∞ , приводящее систему (7) к нормальной форме, ряд Тейлора которой представляет собой сумму неустранимых мономов. Если нормальную форму записать в виде ряда по резонансным мономам z^s , то коэффициенты этого ряда будут многочленами, зависящими от вырожденной переменной, при этом степень соответствующего многочлена линейно зависит от $|s|$.*

С учетом результатов работы [3] еще одним следствием теоремы 3 является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Для любого целого числа $k > 0$ существует близкое к тождественному преобразование класса C^k , приводящее систему (7) к полиномиальной резонансной нормальной форме.*

Для доказательства теоремы 5 достаточно нормальную форму системы (7) записать в виде ряда по резонансным мономам z^s , коэффициенты которого будут многочленами по вырожденной переменной. Применяя к этой нормальной форме теорему 1 из [3], получаем требуемое утверждение.

1. Примеры. Следующие примеры иллюстрируют понятия устранимых и неустранимых мономов. Рассмотрим трехмерную систему уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2, \\ \dot{y} &= A(x)y + g(x, y),\end{aligned}\tag{12}$$

где $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}A(x) &= A_0 + xA_1, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \\ g(x, y) &= \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad g(x, y) = o(\|y\|).\end{aligned}$$

Без ограничения общности можем считать, что в разложении функции $g(x, y)$ присутствуют лишь резонансные члены; следовательно, $g_1(x, y) \equiv 0$, $g_2(x, y) = y_1^2 g(x)$. Рассмотрим ситуацию, когда $g(x) = cx^r$, $c = \text{const}$, $r \geq 0$ – целое число. Отметим, что резонансный моном y_1^2 имеет уровень, равный нулю (см. определение 3). При этом моном $x^r y_1^2$ при $r = 1$ и $r > 2$ является устранимым мономом, а при $r = 0$ и $r = 2$ – неустранимым. В последних случаях при попытке найти невырожденное преобразование

$$x = \tilde{x}, \quad y = \tilde{y} + B(\tilde{x})\tilde{y} + H(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad H(\tilde{x}, \tilde{y}) = o(\|\tilde{y}\|),$$

$B, H \in C^\infty$, приводящее (12) к виду

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= b\tilde{x}^2, \\ \dot{\tilde{y}} &= A(\tilde{x})\tilde{y},\end{aligned}$$

мы можем подставить указанное преобразование в (12) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях разложений искомых функций. Проводя соответствующие выкладки, получаем противоречие (при этом достаточно рассмотреть члены не выше второго порядка по невырожденным переменным).

Если в системе (12)

$$A_1 = A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

то рассматриваемые мономы являются неустраняемыми при $r = 0$, $r = 1$, и устранимыми при $r \geq 2$.

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^3, \\ \dot{y} &= A(x)y + g(x, y), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A(x) &= A_0 + xA_1 + x^2A_2, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \\ g(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ x^r y_1^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь уровень монома y_1^2 равен нулю и моном $x^r y_1^2$ является устранимым при $r \geq 1$ и неустраняемым при $r = 0$.

Если в данной системе

$$A_1 = A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

то уровень монома y_1^2 равен единице, а моном $x^r y_1^2$ неустраним при $r = 0$ и $r = 1$, а при $r \geq 2$ ответ на данный вопрос зависит от выполнения равенства

$$2\lambda_1 + (r - 2) = \lambda_2.$$

Если данное равенство выполняется при $r \geq 2$, то указанный моном неустраним; в обратном случае – устраним. Устранимость рассмотренных выше мономов следует из определения 4 (см. также теорему 3); проверку утверждений о неустраняемости оставляем читателю.

2. Преобразование линейной системы. Здесь мы приведем доказательство теоремы 2, в ходе которого будут использоваться методы, представленные в [8]. При этом будут устранены недостатки, имеющиеся в соответствующих рассуждениях указанной книги.

Сформулируем некоторые вспомогательные утверждения.

Рассмотрим некоторую квадратную матрицу H порядка K , все собственные числа которой равны между собой, имеющую жорданову форму $H = \text{diag}(H_1, \dots, H_s)$, $s > 1$, где H_j – жордановы клетки матрицы H . Рассмотрим также матрицу

$$C = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 \\ C_{21} & H_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{s1} & C_{s2} & \dots & H_s \end{pmatrix}$$

Одновременно с данными матрицами рассмотрим соответствующие λ -матрицы

$$H(\lambda) = H - \lambda E, \quad C(\lambda) = C - \lambda E,$$

где E – единичная матрица. Пусть теперь $h_j(\lambda)$, $c_j(\lambda)$ – соответственно, наибольшие общие делители миноров порядка j , $1 \leq j \leq K$, этих матриц. Обозначим через α_j , γ_j , $1 \leq j \leq K$, степени многочленов $h_j(\lambda)$, $c_j(\lambda)$, соответственно.

ЛЕММА 1 [8; лемма 19.4]. *Имеют место неравенства*

$$\gamma_j \leq \alpha_j, \quad 1 \leq j \leq K. \quad (13)$$

При этом, если матрица C имеет ненулевые элементы ниже своей главной диагонали, то одно из приведенных неравенств является строгим.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= bu^{s+1} + cu^{2s+1}, \\ \dot{w} &= (A_0 + uA_1 + \dots + u^{r-1}A_{r-1} + u^r A_r(u))w. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь A_j , $1 \leq j \leq r-1$, – постоянные диагональные матрицы, диагональные элементы каждой из которых одинаковы (но, вообще говоря, разные для разных матриц), r , s – натуральные числа, $r < s$.

ЛЕММА 2. *Если матрица $A_r(0)$ имеет различные собственные числа, то существует невырожденное преобразование класса C^∞ системы (14), после которого она распадается на независимые системы меньшей размерности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Для доказательства достаточно рассмотреть вспомогательную систему

$$\begin{aligned} \dot{u} &= bu^{s-r+1} + cu^{2s-r+1}, \\ \dot{w} &= A_r(u)w. \end{aligned} \quad (15)$$

Данная система в соответствии с леммой 1 из [1] приводится невырожденным преобразованием $w = H(u)w^1$, $H(u) \in C^\infty$, к нормальной форме. Нормальная форма системы (15) очевидно представляет собой совокупность независимых систем меньшей размерности, каждая из которых отвечает одинаковым собственным числам матрицы $A_r(0)$. Указанным преобразованием система (14) также приводится к требуемому виду, поскольку матрицы A_j , $0 \leq j \leq r-1$, перестановочны с любой матрицей $H(u)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Ниже мы будем считать, что матрица $A(0)$ имеет нормальную жорданову форму:

$$A(0) = \text{diag}(A_{01}, A_{02}, \dots, A_{0r}),$$

где A_{0j} – жордановы клетки. Кроме того, согласно лемме 1 из [1] можно считать, что система (3) имеет стандартную резонансную нормальную форму (см. формулу (9) в [1]). Это, в частности, означает, что система распадается на блоки (не путать с жордановыми клетками), каждый из которых содержит только такие переменные, для которых диагональные элементы матрицы $A(0)$ равны между собой. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что матрица $A(0)$ сама

представляет собой такой блок, т.е. что все ее собственные числа равны друг другу и равны числу $\tilde{\lambda}_0$. Наша ближайшая цель – сделать жорданову матрицу $A(0)$ диагональной. Предварительно произведем близкое к тождественному преобразование класса C^∞ , после которого элементы матрицы $A(x) - A(0)$ системы (3), не равные тождественно нулю, окажутся в последних строках составляющих ее жордановых клеток. Для этого запишем уравнения, соответствующие одной из жордановых клеток

$$\dot{y}_i = y_{i+1} + \tilde{\lambda}_0 y_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) y_j, \quad i = r+1, \dots, r+l,$$

и сделаем замену

$$y_{r+1}^1 = y_{r+1} + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) y_j, \quad y_i^1 = y_i, \quad i \neq r+1,$$

в результате которой первое уравнение получит требуемую форму. Затем во втором уравнении преобразованной системы делаем аналогичную замену. Процесс продолжаем для всех уравнений, кроме последнего. Очевидно, что в результате данного процесса все уравнения системы, относящиеся к выбранной жордановой клетке, будут приведены к нужному виду. Аналогичные преобразования делаем во всех жордановых клетках. В итоге система будет приведена к требуемому виду.

Построим теперь срезающее преобразование. Технология этого процесса подробно описана в первых пяти главах книги [8]. Ограничимся описанием ключевых моментов. Нужное преобразование будет построено при $x > 0$ (при $x < 0$ построение проводится аналогично).

Рассмотрим следующее преобразование:

$$y = S(x)z, \quad S(x) = \text{diag}(1, x^\delta, \dots, x^{(n-1)\delta}). \quad (16)$$

Здесь $\delta > 0$ – некоторое рациональное число, которое будет определено позже.

Получим систему уравнений для невырожденных переменных

$$\dot{z} = B(x)z, \quad B(x) = S^{-1}A(x)S(x) - (bx^{m+1} + cx^{m+1})S^{-1}(x)S'(x).$$

Элементы матрицы $A(x)$, не являющиеся плоскими функциями, представим в виде

$$a_{ij}(x) = x^{r_{ij}} a_{ij}^*(x), \quad a_{ij}^*(0) \neq 0, \quad r_{ij} \geq 0.$$

Если $a_{ij}(x)$ – плоская функция, то будем считать $r_{ij} = +\infty$. Элементы матрицы $B(x)$, не являющиеся плоскими функциями, запишем в виде

$$b_{ij}(x) = x^{g_{ij}(\delta)} b_{ij}^*(x), \quad b_{ij}^*(0) \neq 0.$$

Функции $g = g_{ij}(\delta)$ (в тех случаях, когда они определены) являются линейными функциями с целочисленными коэффициентами

$$\begin{aligned} g_{ij}(\delta) &= r_{ij} + (j-i)\delta, & i \neq j, \\ g_{ii}(\delta) &= \min(r_{ii}, m), & i > 1, \quad g_{11} = r_{11}. \end{aligned}$$

Если матрица $A(0)$ не диагональна, то при некотором i имеем $g_{ii+1}(\delta) = \delta$. Прямые $g = g_{ij}(\delta)$ при $j \leq i$ имеют неположительный наклон. Нетрудно видеть, что

найдется наименьшее значение $\delta_1 > 0$, при котором одна из линий с неположительным наклоном пересекает прямую $g = \delta$. Положим в (16) $\delta = \delta_1$. Отметим, что $\delta_1 \leq m$. Число δ_1 всегда рационально. В тех случаях, когда оно является целым, будем называть срезающее преобразование *целым*; в противном случае – *дробным*. Так же будем называть и само число δ_1 .

Рассмотрим сначала случай, когда срезающее преобразование является целым. Запишем матрицу $B(x)$ в виде

$$B(x) = \tilde{\lambda}_0 E + x^{\delta_1} (B_0 + C(x)), \quad C(0) = 0.$$

Если у матрицы B_0 есть несовпадающие собственные числа, то полученная система, как это следует из леммы 2, после невырожденного бесконечно-гладкого преобразования распадается на системы меньшей размерности. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что все собственные числа матрицы B_0 одинаковы. Предварительно приведя матрицу B_0 к жордановой форме, поставим цель превращения ее в диагональную матрицу. Для этого сначала, как и в исходной системе, переместим элементы матрицы B_0 , не равные тождественно нулю, в строки, соответствующие последним строкам жордановых клеток матрицы $C(x)$, после чего опять применим к полученной системе срезающее преобразование

$$z = \tilde{S}(x)z^1, \quad \tilde{S}(x) = \text{diag}(1, x^\delta, \dots, x^{(n-1)\delta}).$$

Число $\delta > 0$ будем находить по вышеизложенной схеме. Нетрудно видеть, что найдется рациональное число $\delta = \delta_2$, $0 < \delta_2 \leq m - \delta_1$, такое, что система уравнений для невырожденных переменных примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}^1 &= B^1(x)z^1, \\ B^1(x) &= \tilde{\lambda}_0 E + x^{\delta_1} \tilde{\lambda}_1 E x^{\delta_1 + \delta_2} (B_1 + C_1(x)), \quad C_1(0) = 0. \end{aligned}$$

Если число δ_2 опять окажется целым, то процесс продолжаем. Нетрудно видеть, что если на каждом шаге срезающее преобразование будет целым, то в этом случае мы получим конечное число целых срезающих преобразований, а также невырожденных преобразований класса C^∞ , в результате которых исходная система для невырожденных переменных сведется к совокупности независимых систем, каждая из которых будет иметь вид

$$\dot{\tilde{z}} = (A_0 + xA_1 + \dots + x^{m-1}A_{m-1} + x^m \tilde{A}_m(x))\tilde{z}. \quad (17)$$

Здесь $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}$ – постоянные диагональные матрицы, каждая из которых имеет одинаковые диагональные элементы. Изучением данной системы мы займемся несколько позже, а сейчас рассмотрим дробные срезающие преобразования. В этом случае для избавления от дробных степеней придется сделать степенное преобразование вырожденной переменной $x = au^q$. Очевидно, что можно выбрать такое целое $0 < q \leq n$, что δq (где δ – определенное на рассматриваемом шаге число), будет целым числом. Определим $a = q^{1/m}$, вследствие чего уравнение для переменной u примет вид

$$\dot{u} = bu^{mq+1} + c_1 u^{2mq+1}.$$

Отметим, что вместе с ростом нелинейности данного уравнения может соответственно увеличиться число целых срезающих преобразований, которые требуются в этом

случае для приведения системы к виду (17). Такая ситуация возникает всякий раз при появлении дробного δ . Таким образом, пока остается неясным, как обеспечить преобразование системы к требуемому виду посредством конечного числа срезающих преобразований. Эта проблема не решена в [8] и поэтому мы ее исследуем здесь. Рассмотрим матрицу системы, возникающую после очередного срезающего преобразования,

$$B(x) = \tilde{\lambda}_0 E + x^{\delta_1} \tilde{\lambda}_1 E + x^{\delta_1 + \delta_2} \tilde{\lambda}_2 E + \dots + x^{\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{r-1}} (B_{r-1} + C(x)), \quad C(0) = 0.$$

Здесь B_{r-1} – постоянная жорданова матрица, все собственные числа которой равны между собой и равны числу $\tilde{\lambda}_{r-1}$. В результате следующего срезающего преобразования преобразованная матрица $\tilde{B}(x)$ примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{B}(x) = & \tilde{\lambda}_0 E + x^{\delta_1} \tilde{\lambda}_1 E + x^{\delta_1 + \delta_2} \tilde{\lambda}_2 E + \dots \\ & + x^{\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{r-1}} (\tilde{\lambda}_{r-1} E + x^{\delta_r} (B_r + C(x))), \quad C(0) = 0. \end{aligned}$$

Сравним матрицы B_{r-1} и B_r . Имеем

$$B_{r-1} = \tilde{\lambda}_{r-1} E + H^{r-1}, \quad H^{r-1} = \text{diag}(H_1, \dots, H_s),$$

где H_j , $1 \leq j \leq s$, – жордановы клетки с нулевыми элементами на диагонали. Матрица B_r имеет следующую структуру:

$$B_r = \begin{pmatrix} \tilde{H}_1 & 0 & \dots & 0 \\ C_{21} & \tilde{H}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ C_{s1} & C_{s2} & \dots & \tilde{H}_s \end{pmatrix},$$

где блоки $\tilde{H}_j$ имеют те же размеры, что и H_j . Прямая проверка показывает (см. [8; с. 129–130]), что если число δ_r дробное и все собственные числа матрицы B_r равны между собой, то $H_j = \tilde{H}_j$, $1 \leq j \leq s$. Кроме того, в этом случае матрица B_r имеет ненулевые элементы ниже главной диагонали, т.е. среди матриц C_{ij} есть ненулевые. Следовательно, матрицы B_{r-1} и B_r удовлетворяют условиям леммы 1, где $H = B_{r-1}$, $C = B_r$. Согласно этой лемме одно из неравенств (13) будет строгим. Таким образом, в результате последовательности не более, чем n дробных срезающих преобразований, степени наибольших общих делителей миноров порядка $j < n$ матрицы B_r можно сделать нулевыми. Это означает, что жорданова форма такой матрицы будет состоять из одной жордановой клетки. Тогда очередное дробное срезающее преобразование приведет нас к ситуации, где матрица B_{r+1} будет иметь уже неравные собственные числа и система в соответствии с леммой 2 распадется на системы меньшей размерности (см. [8; с. 129–130]). Однако в данном процессе могут появляться целые срезающие преобразования (ситуация, не рассмотренная в [8]). В случае, когда очередное число δ_r целое, $\sum_{1 \leq j \leq r} \delta_j < m$ и все собственные числа матрицы B_r равны между собой, в матрицах H_j и $\tilde{H}_j$ совпадают все строки, за исключением, возможно, последней. Последняя строка матрицы $\tilde{H}_j$ не обязательно является нулевой. Поскольку все собственные числа матрицы B_r одинаковы, это верно и для матриц $\tilde{H}_j$. В этом случае жорданова форма каждой матрицы $\tilde{H}_j$ будет состоять из одной жордановой клетки (это следует из вида матрицы $\tilde{H}_j$). Тогда

матрица B_r будет подобна некоторой матрице B_r^* , имеющей в точности такую же блочную структуру, что и B_{r-1} . Диагональные блоки матрицы B_r^* – суть жордановы клетки с одним и тем же числом на главной диагонали. Кроме того, в этом случае элементы матрицы B_r^* , лежащие под главной диагональю, могут быть все нулевыми. Таким образом, матрицы B_{r-1} и B_r^* удовлетворяют условиям леммы 1, где $H = B_{r-1}$, $C = B_r^*$ и имеют место неравенства (13), которые могут быть все нестрогими (в отличие от случая дробного δ_r). Эти же неравенства, очевидно, будут выполняться и для матриц B_{r-1} и B_r .

Если же δ_r целое и $\sum_{1 \leq j \leq r} \delta_j = m$, то мы получаем систему вида (17), которая будет рассмотрена ниже.

В результате последовательности срезающих преобразований система либо распадается на системы меньшей размерности (при появлении различных собственных чисел у очередной матрицы B_r), либо для матриц B_{r-1} и B_r выполняются неравенства (13). При этом если срезающее преобразование оказывается дробным, то, по крайней мере, одно из неравенств является строгим. Следовательно, если в цепочке срезающих преобразований окажется, по крайней мере, n дробных, то матрица B_r будет состоять из одной жордановой клетки и очередное дробное срезающее преобразование приведет нас к ситуации, где матрица B_r будет иметь уже неравные собственные числа, в результате чего система распадется на системы меньшей размерности. Если уравнение для вырожденной переменной имеет вид

$$\dot{\tilde{u}} = b\tilde{u}^{\tilde{m}+1} + \tilde{c}\tilde{u}^{2\tilde{m}+1},$$

то в случае последовательности не более чем $\tilde{m}$ целых срезающих преобразований система приводится к виду (17). В итоге получаем, что в результате конечного числа срезающих и бесконечно-гладких преобразований система либо распадется на системы меньшей размерности, каждая из которых может быть приведена к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= bu^{p+1} + c_1 u^{2p+1}, \\ \dot{\tilde{z}} &= (A_0 + uA_1 + \dots + u^{p-1}A_{p-1} + u^p A_p(u))\tilde{z}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$A_p(u) = A_p(0) + o(u),$$

либо сама приведет к такому виду. Здесь A_j , $0 \leq j \leq p-1$, – постоянные диагональные матрицы, каждая из которых имеет одинаковые диагональные элементы. Отметим, что система (17) также имеет этот вид.

Рассмотрим матрицу $A_p(0)$. Считаем, что она имеет жорданову форму. Возможны два случая:

- 1) у матрицы $A_p(0)$ имеются собственные числа, разность которых является целым числом;
- 2) у матрицы $A_p(0)$ нет собственных чисел, разность которых является целым числом.

В первом случае к системе можно применить последовательность преобразований вида

$$\tilde{z} = S(u)w, \quad S(u) = \text{diag}(E_1, uE_2),$$

где E_1 , E_2 – единичные матрицы. В результате конечного числа этих преобразований согласно [8; с. 116–117] разности собственных чисел преобразованной матрицы $A_p(0)$ уже не будут целыми числами. Следовательно, без ограничения общности

можно предполагать, что жорданова матрица $A_p(0)$ удовлетворяет первому условию. Рассмотрим вместе с системой (18) вспомогательную систему

$$\begin{aligned}\dot{u} &= bu + c_1 u^{p+1}, \\ \dot{w} &= A_p(u)w.\end{aligned}$$

Очевидно, что здесь в уравнениях для невырожденных переменных нет резонансных членов (учитывая, что $b = \pm 1$). Отсюда, повторяя рассуждения леммы 1 из [1], получаем, что данная система с помощью невырожденного преобразования $w = H(u)\tilde{w}$, $H(u) \in C^\infty$, приводится к виду

$$\begin{aligned}\dot{u} &= bu + c_1 u^{p+1}, \\ \dot{\tilde{w}} &= A_p(u)\tilde{w}.\end{aligned}$$

Но тогда очевидно, что это же преобразование приводит систему (18) к виду

$$\begin{aligned}\dot{u} &= bu^{p+1} + c_1 u^{2p+1}, \\ \dot{\tilde{w}} &= (A_0 + uA_1 + \dots + u^{p-1}A_{p-1} + u^p A_p(0))\tilde{w},\end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы 2.

3. Приведение к формальной нормальной форме, состоящей из неустраимых мономов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Компоненты функций $F^*(u, z)$, $g^*(u, z)$, относящиеся к уравнению с номером i , $1 \leq i \leq n+1$, системы (10), представим в виде формальных суммами слагаемых, каждое из которых имеет вид $a_s^i(u)z^s$, где $\sum_{j=1}^n s_j \lambda_j = \lambda_{i-1}$, $|s| \geq 2$, $a_s^i(u)$ – формальный степенной ряд по неотрицательным степеням u . Нашей целью является построение формального преобразования, после которого ряды $a_s^i(u)$ окажутся полиномами, причем каждая из функций $a_s^i(u)z^s$ будет представлять собой конечную сумму неустраимых мономов.

Будем избавляться от устранимых мономов $u^r z^s$, входящих в формальные суммы $a_s^i(u)z^s$. Это будем делать, последовательно рассматривая мономы z^s в порядке возрастания наборов s . Наборы s упорядочим следующим образом. Будем считать, что $s^1 > s^2$, если либо $|s^1| > |s^2|$, либо $|s^1| = |s^2|$ и в последовательности $\alpha_i = s_{n-i+1}^1 - s_{n-i+1}^2$, $i = 1, 2, \dots, n$, первый ненулевой элемент положителен.

Зафиксируем некоторый резонансный набор s , $|s| > 1$, и представим функции $a_s^i(u)$ в виде

$$a_s^i(u) = \sum_{r=0}^q a_{sr}^i u^r + \sum_{r=N}^{\infty} a_{sr}^i u^r,$$

где $N \geq q+1$, q – уровень монома z^s .

Рассмотрим сначала случай, когда $q \leq p-2$. Сделаем следующее преобразование:

$$z_i = w_i + d_i u^{N-q-1} w^s, \quad 2 \leq i \leq n+1. \quad (19)$$

Положим

$$d_i = \frac{a_{sN}^i}{(s, \lambda^{q+1}) - \lambda_{i-1}^{q+1}}.$$

Если моном $u^N z^s$ входит в первое уравнение системы, то сделаем замену переменных

$$u = \nu + d_1 \nu^{N-q-1} w^s, \quad (20)$$

где положим

$$d_1 = \frac{a_{sN}^1}{(s, \lambda^{q+1})}.$$

Подставляя (19) (соответственно (20)) в (10), получаем, что в преобразованном уравнении функции $a_s^i(u)$ приобретут вид (для простоты мы не меняем обозначений в преобразованном уравнении)

$$a_s^i(u) = \sum_{r=0}^q a_{sr}^i u^r + \sum_{r=N+1}^{\infty} a_{sr}^i u^r.$$

Рассмотрим теперь случай, когда уровень резонансного монома равен $p-1$. Как и выше, представим функцию $a_s^i(u)$ в виде

$$a_s^i(u) = \sum_{r=0}^{p-1} a_{sr}^i u^r + \sum_{r=N}^{\infty} a_{sr}^i u^r, \quad N \geq p.$$

Если моном $u^N z^s$ является устранимым, то делаем преобразование (19) в последних n уравнениях (или (20) в первом уравнении) с тем уточнением, что

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{a_{sN}^1}{(s, \lambda^p) + b(N-2p-1)}, \\ d_i &= \frac{a_{sN}^i}{(s, \lambda^p) - \lambda_{i-1}^p + b(N-p)}, \quad 2 \leq i \leq n+1. \end{aligned} \quad (21)$$

Нетрудно убедиться, что в преобразованной системе функции $a_s^i(u)$ приобретут вид

$$a_s^i(u) = \sum_{r=0}^{p-1} a_{sr}^i u^r + \sum_{r=N+1}^{\infty} a_{sr}^i u^r.$$

Если же моном $u^N z^s$ является неустранимым, то для каждого уравнения с номером i при заданном s число $\tilde{N} = N(s, i)$ является единственным. С учетом этого функции $a_s^i(u)$ могут быть представлены в виде

$$a_s^i(u) = \sum_{r=0}^{p-1} a_{sr}^i u^r + a_{s\tilde{N}}^i u^{\tilde{N}} + \sum_{r=N}^{\infty} a_{sr}^i u^r,$$

где $\tilde{N} = N(s, i)$, $N \geq \tilde{N} + 1$. В этом случае в результате преобразований (19) и (20) с учетом (21) мы получим систему, в которой функции $a_s^i(u)$ приобретут вид

$$a_s^i(u) = \sum_{r=0}^{p-1} a_{sr}^i u^r + a_{s\tilde{N}}^i u^{\tilde{N}} + \sum_{r=N+1}^{\infty} \tilde{a}_{sr}^i u^r.$$

Проводя индуктивное рассуждение, получаем во всех рассматриваемых случаях существование формального преобразования, приводящего систему к виду, где

$$a_s^i(u) = \sum_{r=0}^q a_{sr}^i u^r + a_{s\tilde{N}}^i u^{\tilde{N}}, \quad \tilde{N} = \tilde{N}(s, i),$$

т.е. правая часть системы будет представлять собой сумму неустранимых мономов. Теорема 3 доказана.

Следствием данной теоремы являются теоремы 4 и 5 (см. введение).

Автор выражает глубокую благодарность А. Д. Брюно за полезные обсуждения, способствующие существенному улучшению изложения результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. С. Самовол, “Нормальная форма автономной системы с одним нулевым корнем”, *Матем. заметки*, **75**:5 (2004), 711–720.
- [2] А. Д. Брюно, *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1979.
- [3] В. С. Самовол, “Эквивалентность систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки”, *Тр. ММО*, **44**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1982, 213–234.
- [4] А. Н. Кузнецов, “Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **6**:2 (1972), 41–51.
- [5] Г. Р. Белицкий, “Гладкая эквивалентность ростков векторных полей с одним нулевым или парой чисто мнимых собственных значений”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:4 (1986), 1–8.
- [6] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970.
- [7] Ю. Н. Бибилов, “О приводимости системы двух дифференциальных уравнений к нормальной форме”, *Дифференц. уравнения*, **7**:10 (1971), 1899–1902.
- [8] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1968.

В. С. Самовол

Государственный университет – Высшая школа экономики

E-mail: 555svs@mail.ru

Поступило

17.11.2008