Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Талалаян, Дифференцирование по случайным двои-
чным сетям и единственность кратных тригономет-
рических рядов, *Матем. заметки*, 2010, том 88, вы-
пуск 1, 78–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8796>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 06:53:58

Дифференцирование по случайным двоичным сетям и единственность кратных тригонометрических рядов

А. А. Талалян

Показано, что основные свойства единственности кратного тригонометрического ряда эквивалентны аналогичным свойствам некоторого, соответствующего ему, ряда по кратной системе Хаара с переменными коэффициентами. Доказаны теоремы единственности кратных тригонометрических рядов при различных условиях на коэффициенты и на производную по случайным двоичным сетям сумм рядов, полученных их однократным интегрированием.

Библиография: 8 названий.

1. Обозначения и вспомогательные утверждения. Пусть R_m – m -мерное пространство, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$, $n = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ – элементы R_m ; x_j, t_j , $1 \leq j \leq m$, – действительные числа, n_j – целые, $x \cdot t = \sum x_j t_j$, $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ – векторы, с неотрицательными координатами; $|n| \leq l$ означает $|n_j| \leq l_j$ для всех j ;

$$l' = (l'_1, l'_2, \dots, l'_m) > l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$$

означает, что $l_j \leq l'_j$ для всех j и $l_j < l'_j$ хотя бы для одного j . Если N – натуральное число, то $|n| \leq N$ означает $|n_j| \leq N$ для всех j . Через Δ_k^p , где k – целое неотрицательное число и $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, $1 \leq p_j \leq 2^k$, обозначаем m -мерный куб

$$\Delta_k^p = \Delta_k^{p_1} \times \dots \times \Delta_k^{p_m}, \quad \Delta_k^{p_j} = \left[\frac{p_j - 1}{2^k}, \frac{p_j}{2^k} \right],$$

$|\Delta_k^p| = 2^{-km}$, $|\Delta_k^{p_j}| = 2^{-k}$ – меры Лебега этих множеств, $\Delta_k^p(t)$ – сдвиг куба Δ_k^p на вектор $t = (t_1, \dots, t_m)$; $T_m = [0, 1]^m$ – m -мерный единичный куб.

Рассматриваются m -кратные тригонометрические и m -кратные ряды по системе Хаара

$$\sum_n c_n e^{2\pi i n x}, \quad c_n = \bar{c}_{-n}, \quad |c_n| < M, \quad (1.1)$$

$$\sum_{\mu} a_{\mu} \chi_{\mu}(x) \quad (1.2)$$

$$\chi_{\mu}(x) = \chi_{\mu_1}(x_1) \cdot \chi_{\mu_2}(x_2) \cdots \chi_{\mu_m}(x_m), \quad 0 \leq x_j \leq 1, \quad (1.3)$$

где

$$\chi_1(\xi) \equiv 1, \quad \chi_2(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ -1, & \xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

при $j = 2^{k-1} + \alpha$, $1 \leq \alpha \leq 2^{k-1}$,

$$\chi_j(\xi) = \begin{cases} \sqrt{2^{k-1}}, & \xi \in ((2\alpha - 2) \cdot 2^{-k}, (2\alpha - 1)2^{-k}), \\ -\sqrt{2^{k-1}}, & \xi \in ((2\alpha - 1) \cdot 2^{-k}, 2\alpha 2^{-k}). \end{cases}$$

Интервалы $((\alpha - 1)2^{-k}, \alpha 2^{-k})$ называют *интервалами постоянства функций* $\chi_j(x)$, $1 \leq j \leq 2^k$. Обозначаем при $j \geq 2$

$$\Delta_1^+ = [0, 1], \quad \Delta_1^- = \emptyset, \\ \Delta_j^+ = ((2\alpha - 2) \cdot 2^{-k}, (2\alpha - 1) \cdot 2^{-k}), \quad \Delta_j^- = ((2\alpha - 1) \cdot 2^{-k}, 2\alpha \cdot 2^{-k}).$$

Прямоугольные частичные суммы рядов (1.1) и (1.2) пишутся в виде

$$S_l(x) = \sum_{|n| \leq l} c_n e^{2\pi i n x}, \quad A_l(x) = \sum_{\mu \leq l} a_\mu \cdot \chi_\mu(x). \quad (1.4)$$

При $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ интервалами постоянства суммы $A_l(x)$ считаются все m -мерные прямоугольники вида

$$\prod_{j=1}^m [(\alpha_j - 1) \cdot 2^{-l_j}, \alpha_j \cdot 2^{-l_j}], \quad 1 \leq \alpha_j \leq 2^{l_j}.$$

Если функция $\varphi(x)$ определена на всех вершинах куба Δ_k^p , обозначаем через $\Delta_k^p \varphi(x)$ смешанную разность

$$\Delta_k^p \varphi(x) = \Delta_k^{p_1} \Delta_k^{p_2} \dots \Delta_k^{p_{m-1}} (\Delta_k^{p_m} \varphi(x)), \\ \Delta_k^{p_m} \varphi(x) = \varphi\left(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, \frac{p_m}{2^k}\right) - \varphi\left(x_1, x_2, \dots, x_m, \frac{p_m - 1}{2^k}\right).$$

Рассматривается функция

$$F(x) = c + c_0 \prod_{j=1}^m x_j + \sum_B \prod_{j \in B} x_j \sum_{n(B)} \frac{c_{n(B)} e^{2\pi i n(B) \cdot x}}{\prod_{j \notin B} 2\pi i n_j} + \sum_n' \frac{c_n}{\prod_{j=1}^m 2\pi i n_j} e^{2\pi i n \cdot x}, \quad (1.5)$$

где $B \subset \{1, 2, \dots, m\}$ – непустые подмножества, $B \neq \{1, 2, \dots, m\}$, а $n(B)$ – целочисленный вектор с координатами n_j , где $n_j = 0$ при $j \in B$, $n_j \neq 0$ при $j \notin B$; штрих в $\sum_n'$ означает, что $n_j \neq 0$ для всех j .

Функция $F(x)$ получена однократным интегрированием по всем переменным ряда (1.1). Из $|c_n| < M$ для всех n следует, что $F(x)$ определена почти всюду. Если обозначить через $\Delta_k^p F(x+t)$ смешанную разность по переменной x функции $F(x+t)$ относительно Δ_k^p , то, очевидно, $\Delta_k^p F(x+t) = \Delta_k^p(t) F(x)$.

Как легко видеть, значения $F(x+t)$ определены для всех $x \in R_m$, с двоично-рациональными координатами и для всех t , принадлежащих некоторому множеству E полной меры, $E \subset R_m$, $|R_m - E| = 0$. Положим для всех $t \in E$

$$\begin{aligned} \Delta_k^p F(x+t) = & c_0 \cdot 2^{-km} + \sum_B 2^{-k|B|} \sum_{n(B)} \frac{c_{n(B)}}{\prod_{j \notin B} 2^{\pi i n_j}} \prod_{j \notin B} \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i m_j x_j} e^{2\pi i n(B)t} \\ & + \sum'_n \frac{c_n}{\prod_{j=1}^m 2^{\pi i n_j}} \cdot \prod_{j=1}^m \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j} \cdot e^{2\pi i n t}, \quad x \in \Delta_k^p, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $|B|$ — число элементов B ,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_k^p} S_N(x+t) dx \\ = c_0 \cdot 2^{-km} + \sum_B 2^{-k|B|} \sum_{|n(B)| \leq N} \frac{c_{n(B)}}{\prod_{j \notin B} 2^{\pi i n_j}} \cdot \prod_{j \notin B} \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j} \cdot e^{2\pi i n(B)t} \\ + \sum'_{|n| \leq N} \frac{c_n}{\prod_{j=1}^m 2^{\pi i n_j}} \cdot \prod_{j=1}^m \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j} \cdot e^{2\pi i n t}, \quad x \in \Delta_k^p. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Функция (1.6) для почти всех t является аддитивной функцией сегмента, определенной на двоичной сети Δ_k^p , $k = 1, 2, \dots$, $p = (p_1, \dots, p_m)$, $1 \leq p_j \leq 2^k$. Положим

$$\begin{aligned} \Phi_k(x, t) = \frac{\Delta_k^p F(u+t)}{|\Delta_k^p|}, \quad \Phi_k^{(N)}(x, t) = \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p} S_N(u+t) du, \quad x \in \Delta_k^p, \\ \psi_k(x, t) = \Delta_k^p F(u+t), \quad \psi_k^{(N)}(x, t) = \int_{\Delta_k^p} S_N(u+t) du, \quad x \in \Delta_k^p. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Обозначим через E_0 множество $E_0 \subset T_m$ полной меры $|E_0| = |T_m| = 1$, для которой при $t \in E_0$ функции $\Phi_k(x, t)$ определены. Из (1.6) и (1.7) следует, что для каждого фиксированного Δ_k^p имеют место равенства

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T_m} |\Phi_k^{(N)}(x, t) - \Phi_k(x, t)|^2 dt = 0, \quad x \in \Delta_k^p, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T_m} |\psi_k^{(N)}(x, t) - \psi_k(x, t)|^2 dt = 0, \quad x \in \Delta_k^p. \end{aligned} \quad (1.9)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Будем говорить, что ряд $\sum_\mu c_\mu(t) \chi_\mu(x)$ соответствует ряду δy (1.1), если в метрике L_2 на $\{t \in T_m\}$

$$c_\mu(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T_m} S_N(x+t) \chi_\mu(x) dx. \quad (1.10)$$

Существование этого предела следует из ограниченности коэффициентов ряда (1.1). Действительно, обозначим

$$c_\mu^{(N)}(t) = \int_{T_m} S_N(x+t) \chi_\mu(x) dx. \quad (1.11)$$

Для $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ имеем

$$\begin{aligned}
 c_\mu^{(N)}(t) &= c_0 \cdot \prod_{j=1}^m \int_0^1 \chi_{\mu_j}(x_j) dx_j \\
 &+ \sum_B \sum_{|n(B)| \leq N} c_{n(B)} \cdot \prod_{j \notin B} \max |\chi_{\mu_j}| \\
 &\quad \times \prod_{j \notin B} \left(\int_{\Delta_{\mu_j}^+} e^{2\pi i n_j x_j} dx_j - \int_{\Delta_{\mu_j}^-} e^{2\pi i n_j x_j} dx_j \right) \\
 &\quad \times \prod_{j \in B} \int_0^1 \chi_{\mu_j}(x_j) dx_j e^{2\pi i n(B) \cdot t} \\
 &+ \sum'_{|n| \leq N} c_n \cdot \prod_{j=1}^m \max |\chi_{\mu_j}| \cdot \prod_{j=1}^m \left(\int_{\Delta_{\mu_j}^+} e^{2\pi i n_j x_j} dx_j - \int_{\Delta_{\mu_j}^-} e^{2\pi i n_j x_j} dx_j \right) e^{2\pi i n t}.
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

При $n_j \neq 0$ и $\mu_j \geq 2$ имеем

$$\int_{\Delta_{\mu_j}^+} e^{2\pi i n_j x_j} dx_j - \int_{\Delta_{\mu_j}^-} e^{2\pi i n_j x_j} dx_j = \frac{1}{2\pi i n_j} \left(\Delta_{\mu_j}^+ e^{2\pi i n_j x_j} - \Delta_{\mu_j}^- e^{2\pi i n_j x_j} \right). \tag{1.13}$$

При $n_j = 0$, $\mu_j \geq 2$ и $n_j \neq 0$, $\mu_j = 1$ правую и левую части (1.13) считаем равными нулю.

Если $\mu_j = 2^{k_j-1} + \alpha$, $1 \leq \alpha \leq 2^{k_j-1}$, то при $n_j \neq 0$ и $\mu_j \geq 2$ обозначим

$$\begin{aligned}
 \beta_{\mu_j n_j} &= \Delta_{\mu_j}^+ e^{2\pi i n_j x_j} - \Delta_{\mu_j}^- e^{2\pi i n_j x_j} \\
 &= (e^{2\pi i n_j \cdot (2\alpha-1)2^{-k_j}} - e^{2\pi i n_j \cdot (2\alpha-2)2^{-k_j}}) - (e^{2\pi i n_j \cdot 2\alpha 2^{-k_j}} - e^{2\pi i n_j \cdot (2\alpha-1)2^{-k_j}}).
 \end{aligned}$$

При $n_j = 0$, $\mu_j > 1$ и при $n_j \neq 0$, $\mu_j = 1$ считаем $\beta_{\mu_j n_j} = 0$. Как легко видеть,

$$\begin{aligned}
 |\beta_{\mu_j n_j}| &\leq 4 \quad \forall \mu_j \quad \forall n_j, \\
 |\beta_{\mu_j n_j}| &\leq C \cdot 2^{-2k_j} \cdot n_j^2 \quad \text{при} \quad \mu_j = 2^{k_j} + \alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq 2^{k_j},
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

где C – абсолютная константа.

Имеем $c_\mu^{(N)}(t) \equiv c_0$ при $\mu = (1, \dots, 1)$ для всех N и в остальных случаях

$$\begin{aligned}
 c_\mu^{(N)}(t) &= \sum_B \sum_{|n(B)| \leq N} \frac{c_{n(B)}}{\prod_{j \notin B} 2\pi i n_j} \prod_{j \notin B} \beta_{\mu_j n_j} \cdot \prod_{j \notin B} \max |\chi_{\mu_j}| \prod_{j \in B} \int_0^1 \chi_{\mu_j}(x_j) dx_j e^{2\pi i n(B)t} \\
 &+ \sum'_{|n| \leq N} \frac{c_n}{\prod_{j=1}^m 2\pi i n_j} \prod_{j=1}^m \beta_{\mu_j n_j} \cdot \prod_{j=1}^m \max |\chi_{\mu_j}| \cdot e^{2\pi i n \cdot t}.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Из (1.15) и из ограниченности коэффициентов c_n следует, что при $N \rightarrow \infty$ правая часть сходится на $\{t \in T_m\}$ в метрике L_2 . Поэтому коэффициенты $c_\mu(t)$ ряда $\sum c_\mu(t) \chi_\mu(x)$ определены для почти всех t . Из равенства (1.15) следует, что если

$\mu \neq (1, \dots, 1)$, то

$$\begin{aligned} & \int_{T_m} |c_\mu(t)|^2 dt \\ & \leq \prod_{j=1}^m |\max \chi_{\mu_j}|^2 \left(\sum_B \sum_{n(B)} \frac{|c_{n(B)}|^2}{\prod_{j \notin B} 4\pi^2 n_j^2} \prod_{j \notin B} |\beta_{\mu_j n_j}|^2 + \sum_n' \frac{|c_n|^2}{\prod_{j=1}^m 4\pi^2 n_j^2} \prod_{j=1}^m |\beta_{\mu_j n_j}|^2 \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Это неравенство будет использовано в следующих пунктах.

ЛЕММА 1.1. *Существует множество $T_0 \subset T_m$, $|T_0| = |T_m| = 1$ такое, что*

$$\sum_{\mu \leq 2^k} c_\mu(t) \chi_\mu(x) = \Phi_k(x, t) \quad \forall t \in T_0 \quad \forall x \in T_m \quad \forall k. \quad (1.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.11) и из известных свойств рядов Фурье по кратной системе Хаара следует

$$\sum_{\mu \leq 2^k} c_\mu^{(N)}(t) \chi_\mu(x) = \frac{\int_{\Delta_k^p} S_N(u+t) du}{|\Delta_k^p|} \quad \forall x \in \Delta_k^p \quad \forall \Delta_k^p. \quad (1.18)$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ в (1.18), согласно (1.9) получим, что для любого фиксированного Δ_k^p

$$\sum_{\mu \leq 2^k} c_\mu(t) \chi_\mu(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_k^{(N)}(x, t) = \Phi_k(x, t) \quad \forall x \in \Delta_k^p,$$

где предел понимается в смысле сходимости в метрике L_2 на $\{t \in T_m\}$. Следовательно, (1.17) выполнено, и лемма доказана.

ЛЕММА 1.2. *Если соответствующие рядам $\sum c_n e^{2\pi i n x}$ и $\sum b_n e^{2\pi i n x}$ $|c_n| \leq M$, $|b_n| \leq M$ для всех n , то ряды $\sum_\mu c_\mu(t) \chi_\mu(x)$ и $\sum_\mu b_\mu(t) \chi_\mu(x)$ совпадают, т.е. если $c_\mu(t) = b_\mu(t)$ для всех μ и для почти всех t , то $c_n = b_n$ для всех n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $c_\mu(t) = b_\mu(t)$, то из леммы 1.1 и из (1.8) и (1.6) следует, что для почти всех t и для всех Δ_k^p имеет место равенство

$$\begin{aligned} & c_0 + \sum_B 2^{(m-|B|)k} \sum_{n(B)} \frac{c_{n(B)}}{\prod_{j \notin B} 2^{\pi i n_j}} \prod_{j \notin B} \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j} \cdot e^{2\pi i n(B)t} \\ & + 2^{km} \sum_n \frac{c_n}{\prod_{j=1}^m 2^{\pi i n_j}} \prod_{j=1}^m \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j} \cdot e^{2\pi i n t} \\ & = b_0 + \sum_B 2^{(m-|B|)k} \sum_{n(B)} \frac{b_{n(B)}}{\prod_{j \notin B} 2^{\pi i n_j}} \prod_{j \notin B} \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j} \cdot e^{2\pi i n(B)t} \\ & + 2^{km} \sum_n \frac{b_n}{\prod_{j=1}^m 2^{\pi i n_j}} \prod_{j=1}^m \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j} \cdot e^{2\pi i n t}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Ряды в правой и левой частях (1.19) являются рядами Фурье из $L_2(T_m)$. Поэтому

$$\begin{aligned} c_0 = b_0, \quad \frac{c_{n(B)}}{\prod_{j \notin B} 2\pi i n_j} \cdot \prod_{j \notin B} \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j} &= \frac{b_{n(B)}}{\prod_{j \notin B} 2\pi i n_j} \prod_{j \notin B} \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j}, \\ \frac{c_n \cdot \prod_{j=1}^m \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j}}{\prod_{j=1}^m 2\pi i n_j} &= \frac{b_n \cdot \prod_{j=1}^m \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j}}{\prod_{j=1}^m 2\pi i n_j}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Так как равенства (1.20) выполняются для всех Δ_k^p , то для любой фиксированной пары $c_{n(B)}$, $b_{n(B)}$ или c_n , b_n , интервал Δ_k^p можно взять так, чтобы множитель этих коэффициентов в (1.20) был отличен от нуля. Следовательно, $c_n = b_n$. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.3. *Если ряд (1.1) является рядом Фурье интегрируемой периодической функции $f(x)$ и $F(x)$ – сумма ряда, полученного почленным интегрированием ряда (1.1), то для почти всех t имеет место равенство*

$$\Delta_k^p F(x+t) = \int_{\Delta_k^p} f(x+t) dx \quad \forall \Delta_k^p. \quad (1.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим кратные $(c, 1)$ средние N -го порядка

$$\sigma_N(x+t) = \frac{1}{(N+1)^m} \sum_{|\nu| \leq N} S_\nu(x+t), \quad (1.22)$$

где $S_\nu(x)$ – прямоугольные частичные суммы ряда (1.1).

Известно [1; с. 457], что $\sigma_N(x+t)$ в метрике $L_1(T_m)$ при $N \rightarrow \infty$ сходятся к $f(x+t)$ для каждого фиксированного t . Поэтому равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Delta_k^p} \sigma_N(x+t) dx = \int_{\Delta_k^p} f(x+t) dx \quad (1.23)$$

выполняется для всех t и для всех Δ_k^p . Согласно (1.22)

$$\int_{\Delta_k^p} \sigma_N(x+t) dx = \frac{1}{(N+1)^m} \sum_{\nu \leq N} \int_{\Delta_k^p} S_\nu(x+t) dx. \quad (1.24)$$

Правые части (1.24) представляют $(c, 1)$ средние порядка N прямоугольных частичных сумм ряда (1.6). Так как ряд (1.6) сходится в метрике L_2 на множестве $\{t \in T_m\}$ к $\Delta_k^p F(x+t)$ и все его прямоугольные частичные суммы равномерно ограничены в L_2 , то для всех Δ_k^p имеем (см. [2; с. 57], или [1; с. 465])

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T_m} \left| \int_{\Delta_k^p} \sigma_N(x+t) dx - \Delta_k^p F(x+t) \right|^2 dt = 0. \quad (1.25)$$

Справедливость леммы следует из (1.23) и (1.25).

ТЕОРЕМА 1.1. *Для того чтобы ряд $\sum c_n e^{2\pi i n \cdot x}$, $|c_n| < M$ был рядом Фурье интегрируемой на T_m периодической функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующий ему ряд $\sum c_\mu(t) \chi_\mu(x)$ для почти всех t был рядом Фурье–Хаара функции $f(x+t)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sum c_n e^{2\pi i n \cdot x}$ – ряд Фурье функции $f(x)$. Тогда согласно лемме 1.3 для почти всех t

$$\Delta_k^p F(x+t) = \int_{\Delta_k^p} f(x+t) dx \quad \forall \Delta_k^p,$$

и, следовательно, по лемме 1.1

$$\sum_{\mu \leq 2^k} c_\mu(t) \chi_\mu(x) = \Phi_k(x+t) = \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|} = \frac{\int_{\Delta_k^p} f(x+t) dx}{|\Delta_k^p|}, \quad x \in \Delta_k^p, \quad (1.26)$$

для почти всех t . Это означает, что ряд $\sum c_\mu(t) \chi_\mu(x)$ для почти всех t является рядом Фурье интегрируемой функции $f(x+t)$.

Пусть теперь $f(x)$ – интегрируемая на T_m периодическая функция, и пусть ряд $\sum c_\mu(t) \chi_\mu(x)$ для почти всех t является рядом Фурье функции $f(x+t)$. Рассмотрим ряд $\sum a_n e^{2\pi i n x}$, который является рядом Фурье функции $f(x)$. Тогда по лемме 1.3

$$\Delta_k^p F(x+t) = \int_{\Delta_k^p} f(x+t) dx \quad \forall \Delta_k^p,$$

где $F(x)$ – сумма ряда, полученного интегрированием ряда $\sum a_n e^{2\pi i n x}$. Если ряд $\sum a_\mu(t) \chi_\mu(x)$ соответствует ряду $\sum a_n e^{2\pi i n x}$, то

$$\sum_{\mu \leq 2^k} a_\mu(t) \chi_\mu(x) = \Phi_k(x+t) = \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|} = \frac{\int_{\Delta_k^p} f(x+t) dx}{|\Delta_k^p|}, \quad x \in \Delta_k^p. \quad (1.27)$$

Следовательно, ряды $\sum c_\mu(t) \chi_\mu(x)$ и $\sum a_\mu(t) \chi_\mu(x)$ совпадают. Тогда согласно лемме 1.2 имеем $c_n = a_n$ для всех n . Следовательно, ряд $\sum c_n e^{2\pi i n x}$ является рядом Фурье функции $f(x)$. Теорема доказана.

2. Теорема единственности кратных рядов Хаара.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что ряд (1.2) удовлетворяет условию A_1) относительно переменной x_j , если

$A_1)$ существует последовательность $k(q) \uparrow +\infty$ при $q \rightarrow \infty$ такая, что если $2^{k(q)} < \mu_{j(q)} \leq 2^{k(q)+1}$, для всех q , то

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{|a_{\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \mu_{j(q)}, \mu_{j+1}, \dots, \mu_m}|}{\max |\chi_{\mu_{j(q)}}(x)|} = 0 \quad (2.1)$$

для любых фиксированных μ_i , $i \neq j$.

Рассматриваются последовательности частных сумм ряда (1.2)

$$A_{l(q)}(x) = \sum_{\mu \leq l(q)} a_\mu \chi_\mu(x),$$

$$l(q) = (l_1(q), \dots, l_m(q)), \quad l_j(q) \uparrow +\infty, \quad 1 \leq j \leq m, \quad \text{при } q \rightarrow \infty.$$

Интервалы постоянства суммы $A_{l(q)}(x)$ для краткости обозначаются через $\Delta_{l(q)}$, $A_{l(q)}(\overline{\Delta}_{l(q)})$ – значение $A_{l(q)}(x)$ на $\overline{\Delta}_{l(q)}$, которое считаем равным значению на открытом интервале $\Delta_{l(q)}$, $\overline{\Delta}$ есть замыкание Δ . Если $\Delta_{l(1)}^1 \supset \Delta_{l(2)}^2 \supset \dots \supset \Delta_{l(q)}^q \supset \dots$

суть интервалы постоянства сумм $A_{l(q)}(x)$, через $x \cap \overline{\Delta_{l(q)}^q}$ обозначаем точку, принадлежащую всем $\overline{\Delta_{l(q)}^q}$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $j_\nu, 1 \leq \nu \leq \nu_0, \nu_0 \leq t$, фиксированы и ряд (1.2) удовлетворяет условию A_1) относительно каждой переменной x_{j_ν} . Пусть, далее, некоторая последовательность $\{A_{l(q)}(x)\}_{q=1}^\infty$ частных сумм этого ряда сходится по мере на $T_m = [0, 1]^m$ к интегрируемой на T_m функции $f(x)$ и

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} |A_{l(q)}(x \cap \overline{\Delta_{l(q)}^q})| < +\infty$$

для всех $x \cap \overline{\Delta_{l(q)}^q}$ кроме, быть может, точек, не принадлежащих ни одному из некоторого счетного числа гиперплоскостей, ортогональных к осям $x_{j_\nu}, 1 \leq \nu \leq \nu_0$.

Тогда ряд (1.2) является рядом Фурье функции $f(x)$.

ЛЕММА 2.1. Пусть ряд (1.2) удовлетворяет условию A_1) относительно переменной x_j и $[x_j^0]$ – гиперплоскость, ортогональная к оси x_j . Если некоторая частичная сумма $A_l(x)$ этого ряда отлична от нуля на некотором интервале Δ своего постоянства, то существуют $l'_j > l_j$ и интервал Δ' такие, что Δ' является интервалом постоянства суммы $A_{l_1, \dots, l_{j-1}, l'_j, l_{j+1}, \dots, l_m}(x)$ и выполнены условия

$$\overline{\Delta'} \subset \Delta, \quad [x_j^0] \cap \overline{\Delta'} = \emptyset, \quad A_{l_1, \dots, l_{j-1}, l'_j, l_{j+1}, \dots, l_m}(x) \neq 0, \quad x \in \Delta'. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать $j = 1$. Пусть

$$A_l(x) = d \neq 0, \quad x \in \Delta_1 \times \Delta_2 \times \dots \times \Delta_m = \Delta, \quad d > 0, \quad (2.3)$$

где $\Delta_j, 1 \leq j \leq m$, – интервалы постоянства функций $\chi_{\mu_j}(x_j), 1 \leq \mu_j \leq l_j$. Сначала докажем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Существует $l'_1 > l_1$ и два интервала постоянства

$$\Delta' = \Delta'_1 \times \Delta_2 \times \dots \times \Delta_m, \quad \Delta'' = \Delta''_1 \times \Delta_2 \times \dots \times \Delta_m$$

суммы $A_{l'_1, l_2, \dots, l_m}(x)$, которые не перекрываются, лежат в $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_m$, и эта сумма отлична от нуля на каждом из них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $\chi_{l(1)}(x_1)$, носителем которой является интервал Δ_1 . Очевидно, $l(1) > l_1$, и легко видеть, что

$$A_{l(1), l_2, \dots, l_m}(x) = d + \chi_{l(1)}(x_1) \cdot \sum_{\mu_2=1}^{l_2} \dots \sum_{\mu_m=1}^{l_m} a_{l(1), \mu_2, \dots, \mu_m} \chi_{\mu_2}(x_2) \dots \chi_{\mu_m}(x_m), \quad (2.4)$$

так как все функции $\chi_{\mu_1}(x_1)$ равны нулю на Δ_1 , если $l_1 < \mu_1 < l(1)$. Обозначим

$$d_{l(1)}(x_2, \dots, x_m) = \sum_{\mu_2=1}^{l_2} \dots \sum_{\mu_m=1}^{l_m} a_{l(1), \mu_2, \dots, \mu_m} \chi_{\mu_2}(x_2) \dots \chi_{\mu_m}(x_m). \quad (2.5)$$

Выражение (2.5) постоянно на $\Delta_2 \times \dots \times \Delta_m$. Обозначим через $\Delta_{l(1)}^+$ и $\Delta_{l(1)}^-$ те половины интервала $\Delta_1 = \Delta_{l(1)}$, для которых

$$\chi_{l(1)}(x_1) d_{l(1)}(x') \geq 0, \quad x \in \Delta_{l(1)}^+ \times D, \quad \chi_{l(1)}(x_1) d_{l(1)}(x') \leq 0, \quad x \in \Delta_{l(1)}^- \times D, \quad (2.6)$$

где $D = \Delta_2 \times \dots \times \Delta_m, x' = (x_2, \dots, x_m)$ и $d_{l(1)}(x') = d_{l(1)}(x_2, \dots, x_m)$.

Возможны три случая:

- а) $d_{l(1)}(x') = 0$;
- б) $d_{l(1)}(x') \neq 0$ и $A_{l(1), l_2, \dots, l_m}(x) = d + \chi_{l(1)}(x_1) \cdot d_{l(1)}(x') \neq 0$ при $x \in \Delta_{l(1)}^- \times D$;
- с) $A_{l(1), l_2, \dots, l_m}(x) = 0$, $x \in \Delta_{l(1)}^- \times D$, $d_{l(1)}(x') \neq 0$.

При выполнении условий а) и б) утверждение верно, ибо

$$A_{l(1), l_2, \dots, l_m}(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{l(1)}^+ \times D \quad \text{и при} \quad x \in \Delta_{l(1)}^- \times D.$$

В случае с), очевидно, будем иметь

$$A_{l(1), l_2, \dots, l_m}(x) = 2d, \quad x \in \Delta_{l(1)}^+ \times D, \quad \chi_{l(1)}(x_1) \cdot d_{l(1)}(x') = d, \quad x \in \Delta_{l(1)}^+ \times D. \quad (2.7)$$

Пусть определены функции $\chi_{l(i)}(x_1)$, $1 \leq i \leq p$, с носителями $\Delta_{l(i)}$, интервалы $\Delta_{l(i)}^+$, $\Delta_{l(i)}^-$ такие, что для всех i , $i \leq p$, выполнены условия

$$1^\circ) \quad \Delta_1 = \Delta_{l(1)} \supset \Delta_{l(2)} \supset \dots \supset \Delta_{l(p)},$$

$$\Delta_{l(i)}^+ \cap \Delta_{l(i)}^- = \emptyset, \quad \Delta_{l(i)}^+ \cup \Delta_{l(i)}^- \subset \Delta_{l(i)},$$

$$|\Delta_{l(i)}^+| = |\Delta_{l(i)}^-| = \frac{1}{2} |\Delta_{l(i)}|, \quad |\Delta_{l(i)}| = 2 \cdot |\Delta_{l(i+1)}|;$$

$$2^\circ) \quad A_{l(i), l_2, \dots, l_m}(x) = 2^i d \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{l(i)}^+ \times D, \quad \chi_{l(i)}(x_1) d_{l(i)}(x') = 2^{i-1} \cdot d \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{l(i)}^+ \times D, \quad i \leq p,$$

$$d_{l(i)}(x') = \sum_{\mu_2=1}^{l_2} \dots \sum_{\mu_m=1}^{l_m} a_{l(i), \mu_2, \dots, \mu_m} \chi_{\mu_2}(x_2) \dots \chi_{\mu_m}(x_m).$$

Рассмотрим функцию $\chi_{l(p+1)}(x_1)$ с носителем $\Delta_{l(p+1)} = \Delta_{l(p)}^+$. Аналогично доказательству равенства (2.4) легко видеть, что

$$\begin{aligned} A_{l(p+1), l_2, \dots, l_m}(x) &= A_{l(p), l_2, \dots, l_m}(x) \\ &+ \chi_{l(p+1)}(x_1) \cdot \sum_{\mu_2=1}^{l_2} \dots \sum_{\mu_m=1}^{l_m} a_{l(p+1), \mu_2, \dots, \mu_m} \chi_{\mu_2}(x_2) \dots \chi_{\mu_m}(x_m) \\ &= 2^p d + \chi_{l(p+1)}(x_1) \cdot d_{l(p+1)}(x'), \quad x \in \Delta_{l(p+1)} \times D, \end{aligned}$$

где $\Delta_{l(p+1)}^+$ и $\Delta_{l(p+1)}^-$ — те половины интервала $\Delta_{l(p+1)}$, для которых

$$\begin{aligned} \chi_{l(p+1)}(x_1) d_{l(p+1)}(x') &\geq 0, \quad x \in \Delta_{l(p+1)}^+ \times D, \\ \chi_{l(p+1)}(x_1) d_{l(p+1)}(x') &\leq 0, \quad x \in \Delta_{l(p+1)}^- \times D. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Если а) $d_{l(p+1)}(x') = 0$, б) $d_{l(p+1)}(x') \neq 0$ и $A_{l(p+1), l_2, \dots, l_m}(x) \neq 0$, $x \in \Delta_{l(p+1)}^- \times D$, то утверждение 1 верно. В случае с), когда $A_{l(p+1), l_2, \dots, l_m}(x) = 0$, $x \in \Delta_{l(p+1)}^- \times D$, и $d_{l(p+1)}(x') \neq 0$ получаем

$$\begin{aligned} A_{l(p+1), l_2, \dots, l_m}(x) &= 2^{p+1} \cdot d, \quad x \in \Delta_{l(p+1)}^+ \times D, \\ \chi_{l(p+1)}(x_1) d_{l(p+1)}(x') &= 2^p \cdot d, \quad x \in \Delta_{l(p+1)}^+ \times D, \end{aligned} \quad (2.9)$$

Покажем, что выполнение равенств (2.9) для всех p противоречит условию A_1) при $j = 1$. Этим будет доказано утверждение 1.

Пусть

$$\chi_{l(p)}(x_1)d_{l(p)}(x') = 2^{p-1} \cdot d, \quad x \in \Delta_{l(p)}^+ \times D \quad \forall p. \quad (2.10)$$

Это означает, что (2.10) выполняется для всех $\chi_{l(p)}(x_1)$, носители $\Delta_{l(p)}$ которых удовлетворяют условию

$$\Delta_1 = \Delta_{l(1)} \supset \Delta_{l(2)} \supset \dots \supset \Delta_{l(p)} \supset \dots, \quad |\Delta_{l(p+1)}| = \frac{1}{2}|\Delta_{l(p)}|. \quad (2.11)$$

Очевидно, для каждого p существуют $\mu_2(p), \mu_3(p), \dots, \mu_m(p)$, $\mu_j(p) \leq l_j$, $2 \leq j \leq m$, такие, что

$$\begin{aligned} & |a_{l(p), \mu_2(p), \dots, \mu_m(p)} \chi_{\mu_2(p)} \cdots \chi_{\mu_m(p)}(x_m)| \\ & \geq \left| \left(\prod_{j=2}^m l_j \right)^{-1} \sum_{\mu_2=1}^{l_2} \cdots \sum_{\mu_m=1}^{l_m} a_{l(p), \mu_2, \dots, \mu_m} \chi_{\mu_2}(x_2) \cdots \chi_{\mu_m}(x_m) \right| \\ & = \left| \prod_{j=2}^m l_j \right|^{-1} \cdot |d_{l(p)}(x')|, \quad x \in \Delta_{l(p)}^+ \times D. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Следовательно, согласно (2.10)

$$\max |\chi_{l(p)}(x_1)| |a_{l(p), \mu_2(p), \dots, \mu_m(p)}| \geq \max |\chi_{l(p)}(x_1)| |d_{l(p)}(x')| \cdot c = c \cdot 2^p \cdot d, \quad (2.13)$$

где $c = |\prod_{j=2}^m l_j|^{-1} \cdot 2^{-(l_2 + \dots + l_m)}$.

Из (2.13) следует

$$(\max |\chi_{l(p)}(x_1)|)^{-1} |a_{l(p), \mu_2(p), \dots, \mu_m(p)}| \geq c \cdot 2^p \cdot d \cdot \max |\chi_{l(p)}(x_1)|^{-2} = c \cdot 2^p \cdot d \cdot 2^{-(p+p_0)}, \quad (2.14)$$

где p_0 – ранг интервала Δ_1 ($|\Delta_1| = 1/2^{p_0}$). Итак, для всех p будем иметь

$$(\max |\chi_{l(p)}(x_1)|)^{-1} |a_{l(p), \mu_2(p), \dots, \mu_m(p)}| \geq c > 0, \quad (2.15)$$

где c – постоянная, зависящая только от фиксированных значений d , p_0 и l_j , $2 \leq j \leq m$.

Из (2.11) следует, что значения $l(p)$, начиная с некоторого номера, пробегают все отрезки $(2^k, 2^{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому существуют такие последовательности $\{l(p_\nu)\}_{\nu=1}^\infty \subset \{l(p)\}_{p=1}^\infty$ и $\{2^{k(q_\nu)}\}_{\nu=1}^\infty \subset \{2^{k(q)}\}_{q=1}^\infty$, что

$$2^{k(q_\nu)} < l(p_\nu) \leq 2^{k(q_\nu)+1}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (2.16)$$

где $\{k(q)\}_{q=1}^\infty$ – последовательность из условия A_1) для $j = 1$.

Из (2.15) следует

$$(\max |\chi_{l(p_\nu)}(x_1)|)^{-1} |a_{l(p_\nu), \mu_2(p_\nu), \dots, \mu_m(p_\nu)}| \geq c > 0, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

где $\mu_j(p_\nu) \leq l_j$, $2 \leq j \leq m$.

Следовательно, существуют последовательность $\{l(p_{\nu(i)})\}_{i=1}^\infty \subset \{l(p_\nu)\}_{\nu=1}^\infty$ и числа $\mu_2^0, \dots, \mu_m^0$ такие, что

$$(\max |\chi_{l(p_{\nu(i)})}(x_1)|)^{-1} |a_{l(p_{\nu(i)}), \mu_2^0, \dots, \mu_m^0}| > c > 0 \quad \forall i \quad (2.17)$$

и при этом согласно (2.16)

$$2^{k(q_{\nu(i)})} < l(p_{\nu(i)}) \leq 2^{k(q_{\nu(i)})+1} \quad \forall i. \quad (2.18)$$

Но из условия A_1) следует

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|a_{l(p_{\nu(i)}), \mu_2^0, \dots, \mu_m^0}|}{\max |\chi_{l(p_{\nu(i)})(x_1)}|} = 0, \quad (2.19)$$

что противоречит неравенству (2.17). Утверждение 1 доказано.

Итак, если $A_l(x)$ отлична от нуля на некотором интервале Δ своего постоянства, то существуют $l'_j > l_j$ и два интервала Δ' и Δ'' постоянства $A_{l_1, \dots, l_{j-1}, l'_j, l_{j+1}, \dots, l_m}(x)$ такие, что $\Delta' \cup \Delta'' \subset \Delta$, $\Delta' \cap \Delta'' = \emptyset$, и эта сумма отлична от нуля на этих интервалах. Если гиперплоскость $[x_j^0]$ не пересекается с замыканием одного из них, то лемма 2.1 доказана. В обратном случае гиперплоскость $[x_j^0]$ проходит через общую границу интервалов Δ' и Δ'' . В этом случае, применяя утверждение 1 для переменной x_j к сумме $A_{l_1, \dots, l_{j-1}, l'_j, \dots, l_m}(x)$ и к одному из интервалов Δ' или Δ'' , мы найдем интервал $\Delta''' \subset \Delta$ и сумму $A_{l_1, \dots, l_{j-1}, l''_j, l_{j+1}, \dots, l_m}(x)$, $l''_j > l'_j$, такие, что $A_{l_1, \dots, l_{j-1}, l''_j, \dots, l_m}(x)$ постоянна на Δ''' , отлична от нуля на Δ''' и $\overline{\Delta'''} \subset \Delta$, $[x_j^0] \cap \overline{\Delta'''} = \emptyset$. Лемма 2.1 доказана.

Теорема 2.1 легко получается из следующей леммы.

ЛЕММА 2.2. Пусть ряд (1.2) удовлетворяет условию A_1) относительно каждой из переменных x_{j_ν} , $1 \leq \nu \leq \nu_0$, $\nu_0 \leq t$ и последовательность $A_{l(q)}(x)$, $l(q) = (l_1(q), \dots, l_m(q))$, его частных сумм, где $l_j(q) \uparrow +\infty$ при $q \rightarrow \infty$, сходится по мере на T_m к интегрируемой на T_m функции $f(x)$. Пусть, далее, ряд $\sum c_\mu \chi_\mu(x)$ является рядом Фурье-Хаара этой функции, т.е.

$$c_\mu = \int_{T_m} f(x) \chi_\mu(x) dx \quad (2.20)$$

и некоторая частичная сумма $B_l(x)$ ряда

$$\sum_\mu b_\mu \chi_\mu(x), \quad b_\mu = a_\mu - c_\mu, \quad (2.21)$$

отлична от нуля на некотором интервале Δ своего постоянства. Тогда если $[x_{j_\nu}^0]$ – гиперплоскость, ортогональная к координатной оси x_{j_ν} , то для любого $M > 0$ и натурального N существуют частичные суммы $B_{l(q)}(x)$ и $A_{l(q)}(x)$, $q > N$, рядов (2.21) и (1.2), а также интервал Δ' постоянства этих сумм такие, что $\Delta' \subset \Delta$, $\overline{\Delta'} \cap [x_{j_\nu}^0] = \emptyset$,

$$|A_{l(q)}(x)| > M \quad \text{при } x \in \Delta', \quad B_{l(q)}(x) \neq 0 \quad \text{при } x \in \Delta'. \quad (2.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_l(x) \neq 0$, $x \in \Delta$, где $l = (l_1, l_2, \dots, l_{j_\nu}, \dots, l_m)$ и Δ – интервал постоянства суммы $B_l(x)$. Применяя лемму 2.1 для $B_l(x)$ и для переменной x_{j_ν} , найдем сумму $B_{l'}(x)$ и интервал Δ_1 постоянства этой суммы такие, что

$$l' > l, \quad B_{l'}(x) = d_1 \neq 0, \quad x \in \Delta_1, \quad \Delta_1 \subset \Delta, \quad [x_{j_\nu}^0] \cap \overline{\Delta_1} = \emptyset. \quad (2.23)$$

Пусть q_0 выбрано так, что если $q > q_0$, то $l(q) > l'$, т.е. $l_j(q) > l'_j$ для всех j и для всех $q > q_0$.

Из (2.23) следует

$$\int_{\Delta_1} B_{l'}(x) dx = d_1 \cdot |\Delta_1| \neq 0, \quad (2.24)$$

а из условия $l_j(q) > l'_j$, $1 \leq j \leq m$, $q > q_0$, следует

$$\int_{\Delta_1} B_{l(q)}(x) dx = \int_{\Delta_1} B_{l'}(x) dx = d_1 \cdot |\Delta_1| \neq 0 \quad \forall q > q_0. \quad (2.25)$$

Предположение, что для некоторых фиксированных $M > 0$ и натурального N имеет место неравенство

$$|A_{l(q)}(x)| \leq M + |S_{l(q)}(x)| \quad \forall x \in \Delta_1, \quad S_{l(q)}(x) = \sum_{\mu \leq l(q)} c_\mu \chi_\mu(x), \quad (2.26)$$

для всех $q \geq \max(q_0, N)$ не верно. Действительно, так как

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_{T_m} |S_{l(q)}(x) - f(x)| dx = 0,$$

из неравенств (2.26) будет следовать, что частичные суммы $A_{l(q)}(x)$ на интервале Δ_1 имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Тогда, так как по предположению $A_{l(q)}(x)$ при $q \rightarrow \infty$ сходятся по мере на T_m к $f(x)$, при $q \rightarrow \infty$ имели бы

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_{\Delta_1} |A_{l(q)}(x) - f(x)| dx = 0. \quad (2.27)$$

Так как $B_{l(q)}(x) = A_{l(q)}(x) - S_{l(q)}(x)$, из (2.26) и (2.27) следует

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_{\Delta_1} |B_{l(q)}(x)| dx = 0; \quad (2.28)$$

(2.28) противоречит равенству (2.24). Следовательно, для любого $M > 0$ и N существует $q > N$ такое, что на некотором интервале $\Delta' \subset \Delta_1$ постоянства сумм $A_{l(q)}(x)$ и $B_{l(q)}(x)$ выполняется неравенство

$$|A_{l(q)}(x)| > M + |S_{l(q)}(x)|, \quad x \in \Delta'. \quad (2.29)$$

При этом, так как $\overline{\Delta_1} \subset \Delta$ и $[x_{j\nu}^0] \cap \overline{\Delta_1} = \emptyset$ согласно (2.23), выполнено $\overline{\Delta'} \subset \Delta$ и $[x_{j\nu}^0] \cap \overline{\Delta'} = \emptyset$. Из неравенства (2.29) следует, что $|A_{l(q)}(x)| > M$ и $B_{l(q)}(x) \neq 0$ при $x \in \Delta'$. Лемма 2.2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Пусть условия теоремы 2.1 выполнены, но ряд (1.2) не является рядом Фурье функции $f(x)$. Это означает, что некоторые коэффициенты $b_\mu = a_\mu - c_\mu$ ряда (2.21) отличны от нуля.

Пусть $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$ — счетное число гиперплоскостей из формулировки теоремы 2.1. Некоторая частичная сумма $B_l(x)$ ряда (2.21) отлична от нуля на некотором интервале Δ своего постоянства. Пусть $M_i > 0$, $M_i \uparrow +\infty$ и $N_i \uparrow +\infty$ при $i \rightarrow \infty$. Применяя лемму 2.2, определим $q_1 > N_1$ такое, что

$$|A_{l(q_1)}(x)| > M_1, \quad B_{l(q_1)}(x) \neq 0, \quad x \in \Delta_1, \quad \Delta_1 \subset \Delta, \quad \alpha_1 \cap \overline{\Delta_1} = \emptyset,$$

где Δ_1 – интервал постоянства сумм $A_{l(q_1)}(x)$ и $B_{l(q_1)}(x)$. Предположим, что определены $A_{l(q_i)}(x)$, $B_{l(q_i)}(x)$, $1 \leq i \leq p$, такие, что $q_i > N_i$,

$$|A_{l(q_i)}(x)| > M_i, \quad B_{l(q_i)}(x) \neq 0, \quad x \in \Delta_i, \quad \Delta_i \subset \Delta_{i-1}, \quad \alpha_i \cap \bar{\Delta}_i = \emptyset,$$

где Δ_i – интервал постоянства сумм $B_{l(q_i)}(x)$, $A_{l(q_i)}(x)$.

Пусть гиперплоскость α_{p+1} ортогональна к некоторой оси $x_{j_{\nu(p)}}$. Применяя лемму 2.2 для суммы $B_{l(q_p)}(x)$ и для переменной $x_{j_{\nu(p)}}$, найдем $A_{l(q_{p+1})}(x)$, $B_{l(q_{p+1})}(x)$ и интервал постоянства Δ_{p+1} такие, что $q_{p+1} > N_{p+1}$, $\Delta_{p+1} \subset \Delta_p$ и

$$|A_{l(q_{p+1})}(x)| > M_{p+1}, \quad B_{l(q_{p+1})}(x) \neq 0, \quad x \in \Delta_{p+1}, \quad \alpha_{p+1} \cap \bar{\Delta}_{p+1} = \emptyset. \quad (2.30)$$

Итак, существует последовательность $\{A_{l(q_i)}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ и интервалы Δ_i такие, что Δ_i – интервал постоянства суммы $A_{l(q_i)}(x)$, $q_j > N_i$, $\Delta_i \supset \bar{\Delta}_{i+1}$ для всех i , $\alpha_i \cap \bar{\Delta}_i = \emptyset$. Тогда точка $x \in \bar{\Delta}_i$, принадлежащая всем Δ_i , не принадлежит ни одной из гиперплоскостей α_i и

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} |A_{l(q)}(x \cap \bar{\Delta}_i)| = +\infty,$$

что противоречит условию теоремы 2.1. Следовательно, $a_\mu = c_\mu$ для всех μ . Теорема 2.1 доказана.

3. Теоремы о единственности кратных тригонометрических рядов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Будем говорить, что тригонометрический ряд (1.1) обладает свойством A_2 относительно переменной x_j , если

$A_2)$ $|c_n| \leq M$ для всех n и для любых фиксированных n_i , $i \neq j$, имеет место

$$\lim_{|n_j| \rightarrow \infty} c_{n_1, \dots, n_{j-1}, n_j, \dots, n_m} = 0. \quad (3.1)$$

Верна следующая

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть ряд (1.1) обладает свойством A_2 для каждой из переменных x_{j_ν} , $1 \leq \nu \leq \nu_0$, $\nu_0 \leq m$, и пусть $\sum a_\mu(t) \chi_\mu(x)$ – соответствующий ему ряд по системе Хаара. Пусть для некоторого множества T_0 полной меры, $T_0 \subset T_m$, $|T_0| = |T_m|$, и интегрируемой на T_m периодической функции $f(x)$ выполнены условия

- 1) для любого $t \in T_0$ некоторая последовательность частных сумм $A_{l(q)}(x, t) = \sum_{\mu \leq l(q)} a_\mu(t) \chi_\mu(x)$, где $l_j(q) \uparrow +\infty$, $1 \leq j \leq m$, $q \rightarrow \infty$, сходится по мере на T_m к $f(x+t)$;
- 2) для $t \in T_0$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sup |A_{l(q)}(x \cap \bar{\Delta}_{l(q)}^q, t)| < +\infty,$$

где $\Delta_{l(q)}^q$ – интервалы постоянства сумм $A_{l(q)}(x, t)$, $\Delta_{l(q)}^q \supset \Delta_{l(q+1)}^{q+1}$ для всех точек $x \in \bar{\Delta}_{l(q)}^q$, не принадлежащих объединению некоторого счетного множества E_t гиперплоскостей, ортогональных к координатным осям x_{j_ν} , $1 \leq \nu \leq \nu_0$.

Тогда для почти всех t ряд $\sum a_\mu(t) \chi_\mu(x)$ является рядом Фурье–Хаара функции $f(x+t)$, т.е.

$$a_\mu(t) = \int_{T_m} f(x+t) \chi_\mu(x) dx \quad \forall t \in T'_0 \subset T_m, \quad |T'_0| = |T_m|. \quad (3.2)$$

Из теорем 3.1 и 1.1 следует

ТЕОРЕМА 3.2. *Если ряд (1.1) удовлетворяет условию A_2) для переменных x_{j_ν} , $1 \leq \nu \leq \nu_0$, $\nu_0 \leq t$, и для соответствующего ему ряда $\sum a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ выполнены условия 1) и 2) теоремы 3.1, то ряд (1.1) является рядом Фурье функции $f(x)$.*

Следующая теорема, являющаяся частным случаем теоремы 3.2, когда $l(q) = (2^q, \dots, 2^q)$, $q \rightarrow \infty$, имеет более наглядную формулировку.

Рассмотрим двоичную сеть кубов Δ_k^p из п. 1 и функции $\Phi_k(x, t)$, определенные равенствами (1.6) и (1.8).

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть ряд (1.1) удовлетворяет условию A_2) для переменных x_{j_ν} , $1 \leq \nu \leq \nu_0$, $\nu_0 \leq t$, и выполнены условия*

1°) *некоторая последовательность $\Phi_{k_i}(x, t)$ сходится по мере на T_m к $f(x + t)$ для всех $t \in T_0$, $T_0 \subset T_m$, $|T_0| = |T_m|$, где $f(x)$ – периодическая, интегрируемая на T_m функция;*

2°) $\limsup |\Phi_k(x \cap \overline{\Delta_k^{p(k)}}, t)| < +\infty$ для всех $t \in T_0$ во всех точках $x \in \overline{\Delta_k^{p(k)}}$, $\Delta_k^{p(k)} \supset \Delta_{k+1}^{p(k+1)}$ для всех k , не принадлежащих объединению некоторого счетного множества E_t гиперплоскостей, ортогональных к координатным осям x_{j_ν} , $1 \leq \nu \leq \nu_0$.

Тогда ряд (1.1) является рядом Фурье функции $f(x)$.

Справедливость этой теоремы следует из того, что если $\sum a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ – ряд, соответствующий ряду (1.1), то (см. лемму 1.1)

$$\sum_{\mu \leq 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) = \Phi_k(x, t) = \frac{\Delta_k^p F(x + t)}{|\Delta_k^p|}, \quad x \in \Delta_k^p, \quad \forall \Delta_k^p, \quad (3.3)$$

где $F(x)$ – сумма ряда, полученного интегрированием ряда (1.1) по всем переменным x_j .

Справедливость теорем 3.1 и 3.2 следует из теоремы 2.1 и из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.4. *Если ряд (1.1) обладает свойством A_2) для переменной x_j , то соответствующий ему ряд $\sum c_\mu(t)\chi_\mu(x)$ обладает свойством A_1) для той же переменной x_j , для каждого t , принадлежащего некоторому множеству T_0 полной меры, $T_0 \subset T_m$, $|T_0| = |T_m|$.*

Доказательство теоремы 3.4 основано на следующей лемме.

ЛЕММА 3.1. *Если тригонометрический ряд (1.1) обладает свойством A_2) для переменной x_j и $\sum c_\mu(t)\chi_\mu(x)$ – соответствующий ему ряд по системе Хаара, то для любых фиксированных μ_i , $i \neq j$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует $k_0 > 0$ такое, что если $k > k_0$ и $\mu_j = 2^k + \alpha$, $1 \leq \alpha \leq 2^k$, то*

$$(\max |\chi_{\mu_j}|)^{-2} \int_{T_m} |c_\mu(t)|^2 dt \leq \varepsilon \cdot 2^{-k} \quad \forall \alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq 2^k. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать $j = 1$. Из определения $c_\mu(t)$ (см. п. 1) имеем

$$c_\mu(t) = \sum_B \sum_{n(B)} \left(\frac{c_{n(B)}}{\prod_{j \notin B} 2\pi i n_j} \prod_{j \notin B} \beta_{\mu_j n_j} \prod_{j \notin B} \max |\chi_{\mu_j}(x_j)| \prod_{j \in B} \int_0^1 \chi_{\mu_j}(x_j) dx_j \right) e^{2\pi i n(B)t} \\ + \sum'_n \frac{c_n}{\prod_{j=1}^m 2\pi i n_j} \cdot \prod_{j=1}^m \beta_{\mu_j n_j} \prod_{j=1}^m \max |\chi_{\mu_j}(x_j)| \cdot e^{2\pi i n t}.$$

Следовательно,

$$\int_{T_m} |c_\mu(t)|^2 dt = \sum_B \sum_{n(B)} \frac{|c_{n(B)}|^2}{\prod_{j \notin B} 4\pi^2 n_j^2} \prod_{j \notin B} |\beta_{\mu_j n_j}|^2 \\ \times \prod_{j \notin B} (\max |\chi_{\mu_j}(x_j)|)^2 \prod_{j \in B} \max |\chi_{\mu_j}(x_j)|^2 \cdot \prod_{j \in B} |\beta_{\mu_j n_j}|^2 \\ + \sum'_n \frac{|c_n|^2}{\prod_{j=1}^m 4\pi^2 n_j^2} \prod_{j=1}^m |\beta_{\mu_j n_j}| \prod_{j=1}^m (\max |\chi_{\mu_j}(x_j)|)^2,$$

где при $j \in B$ полагаем

$$\beta_{\mu_j n_j} = \Delta_{\mu_j}^+ e^{2\pi i 0 x_j} - \Delta_{\mu_j}^- e^{2\pi i 0 x_j} = \int_{\Delta_{\mu_j}^+} 1 dx_j - \int_{\Delta_{\mu_j}^-} 1 dx_j.$$

В частности, когда $\mu_j = 1$, имеем $\beta_{\mu_j n_j} = 1$, и при $\mu_j \geq 2$ имеем $\beta_{\mu_j n_j} = 0$, $j \in B$ (т.е. $n_j = 0$). Поэтому, если $\mu_1 = 2^k + \alpha$, $1 \leq \alpha \leq 2^k$, имеем

$$\max |\chi_{\mu_1}(x_1)|^{-2} \int_{T_m} |c_\mu(t)|^2 dt \\ \leq \left(\sum_{\substack{B \\ 1 \notin B}} \sum_{n(B)} \frac{|c_{n(B)}|^2}{\prod_{j \notin B} 4\pi^2 n_j^2} \prod_{j \notin B} |\beta_{\mu_j n_j}|^2 + \sum'_n \frac{|c_n|^2}{\prod_{j=1}^m 4\pi^2 n_j^2} \prod_{j=1}^m |\beta_{\mu_j n_j}|^2 \right) \cdot C_1, \quad (3.5)$$

где $C_1 = \prod_{j=2}^m \max |\chi_{\mu_j}(x_j)|^2$. Оценим сумму $\sum'_n$. Из (1.14) следует

$$\sum'_n \frac{|c_n|^2}{\prod_{j=1}^m 4\pi^2 n_j^2} \prod_{j=1}^m |\beta_{\mu_j n_j}|^2 \leq (16)^{m-1} \sum'_n \frac{|c_n|^2}{\prod_{j=1}^m n_j^2} \cdot |\beta_{\mu_1 n_1}|^2. \quad (3.6)$$

Условимся обозначать через $\sum_{|n_i| > N}$ сумму тех членов правой суммы (3.6), у которых $|n_i| > N$, а остальные n_j , $j \neq i$, принимают все целые значения.

Пусть $\varepsilon > 0$. Из ограниченности коэффициентов c_n и из того, что $|\beta_{\mu_j n_j}| \leq 2$, следует существование натурального N , для которого

$$\sum_{i=1}^n \sum_{|n_i| \geq N} \frac{|c_n|^2}{\prod_{j=1}^m n_j^2} \cdot |\beta_{\mu_1 n_1}|^2 \leq \varepsilon. \quad (3.7)$$

Из условия леммы (для $j = 1$) следует, что можно выбрать k_0 такое, что если $k > k_0$, то при $|n_1| > 2^{k/2}$ выполняется неравенство

$$|c_n| = |c_{n_1, n_2, \dots, n_m}| < \varepsilon \quad \text{для всех } n_j, j \geq 2, \text{ для которых } |n_j| \leq N. \quad (3.8)$$

Будем считать также, что $2^{-k/2} < \varepsilon$ при $k > k_0$.

Теперь оценим сумму правой части (3.6). Имеем

$$\begin{aligned} \sum'_n \frac{|c_n|^2}{\prod_{j=1}^m n_j^2} \cdot |\beta_{\mu_1 n_1}|^2 &\leq \sum_{|n_1| \leq 2^{k/2}} \sum_{|n_2|=1}^{\infty} \cdots \sum_{|n_m|=1}^{\infty} \frac{|c_{n_1, n_2, \dots, n_m}|^2}{\prod_{j=1}^m n_j^2} \cdot |\beta_{\mu_1 n_1}|^2 \\ &\quad + \sum_{|n_1| > 2^{k/2}} \sum_{|n_2|=1}^{\infty} \cdots \sum_{|n_m|=1}^{\infty} \frac{|c_{n_1, n_2, \dots, n_m}|^2}{\prod_{j=1}^m n_j^2} \cdot |\beta_{\mu_1 n_1}|^2 \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из неравенств (1.14) следует

$$\Sigma_1 \leq \sum_{|n_1| \leq 2^{k/2}} \frac{n_1^4 \cdot 2^{-4k}}{n_1^2} \cdot \sum_{|n_2|=1}^{\infty} \cdots \sum_{|n_m|=1}^{\infty} \frac{M^2}{\prod_{j=2}^m n_j^2}.$$

Следовательно,

$$\Sigma_1 \leq C \cdot 2^{-4k} \cdot 2^{3/2k} < C\varepsilon 2^{-k}, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\leq \sum_{|n_1|=2^{k/2}}^{2^k} \sum_{|n_2|=1}^{\infty} \cdots \sum_{|n_m|=1}^{\infty} \frac{|c_{n_1, n_2, \dots, n_m}|^2}{\prod_{j=1}^m n_j^2} \cdot |\beta_{\mu_1 n_1}|^2 \\ &\quad + \sum_{|n_1|=2^k}^{\infty} \sum_{|n_2|=1}^{\infty} \cdots \sum_{|n_m|=1}^{\infty} \frac{|c_{n_1, n_2, \dots, n_m}|^2}{\prod_{j=1}^m n_j^2} \cdot |\beta_{\mu_1 n_1}|^2 = \Sigma_3 + \Sigma_4, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\Sigma_3 \leq \sum_{|n_1|=2^{k/2}}^{2^k} \frac{|\beta_{\mu_1 n_1}|^2}{n_1^2} \left(\sum_{|n_2| \leq N} \cdots \sum_{|n_m| \leq N} \frac{|c_{n_1 n_2 \dots n_m}|^2}{\prod_{j=2}^m n_j^2} + \sum_{i=2}^m \sum_{|n_i| > N} \frac{|c_{n_1 n_2 \dots n_m}|^2}{\prod_{j=2}^m n_j^2} \right). \quad (3.12)$$

Из (3.12), (3.7) и (3.8) следует

$$\Sigma_3 \leq \sum_{|n_1|=2^{k/2}}^{2^k} \frac{|n_1|^4 \cdot 2^{-4k}}{n_1^2} (\varepsilon \cdot c + \varepsilon) = 2^{-4k} \cdot 2^{3k} \cdot c \cdot \varepsilon = c \cdot \varepsilon \cdot 2^{-k}, \quad (3.13)$$

$$\Sigma_4 \leq 16 \cdot \sum_{|n_1|=2^k}^{\infty} \frac{1}{n_1^2} \left(\sum_{|n_2| \leq N} \cdots \sum_{|n_m| \leq N} \frac{|c_{n_1 n_2 \dots n_m}|^2}{\prod_{j=2}^m n_j^2} + \sum_{i=2}^m \sum_{|n_i| \geq N} \frac{M^2}{\prod_{j=2}^m n_j^2} \right). \quad (3.14)$$

Из (3.14), (3.7) и (3.8) следует

$$\Sigma_4 \leq c \cdot \varepsilon \cdot 2^{-k}. \quad (3.15)$$

Следовательно,

$$\Sigma_2 \leq c \cdot \varepsilon \cdot 2^{-k}. \quad (3.16)$$

Из (3.16) и (3.10) следует

$$\sum'_n \frac{|c_n|^2}{\prod_{j=1}^m n_j^2} \cdot |\beta_{\mu_1 n_1}|^2 < c \cdot \varepsilon \cdot 2^{-k} \quad \forall \mu_1 = 2^k + \alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq 2^k, \quad k > k_0. \quad (3.17)$$

Из (3.17) и (3.6) следует, что для фиксированных μ_j , $j \geq 2$,

$$\sum_n' \frac{|c_n|^2}{\prod_{j=1}^m n_j^2} \prod_{j=1}^m |\beta_{\mu_j n_j}|^2 \leq c \cdot \varepsilon \cdot 2^{-k} \quad \forall \mu_1 = 2^k + \alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq 2^k, \quad k > k_0. \quad (3.18)$$

Легко видеть, что для выбранного k_0 имеют место также неравенства

$$\sum_{n(B)} \frac{|c_{n(B)}|^2}{\prod_{j \notin B} n_j^2} \prod_{j \notin B} |\beta_{\mu_j n_j}|^2 \leq c_B \cdot \varepsilon \cdot 2^{-k}, \quad \mu_1 = 2^k + \alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq 2^k, \quad k > k_0, \quad (3.19)$$

для всех $B \subset \{1, 2, \dots, m\}$, для тех же фиксированных $\mu_2, \dots, \mu_m$, где $1 \notin B$.

Из (3.19), (3.18) и (3.5) следует, что при $k > k_0$

$$\int_{T_m} \frac{|c_\mu(t)|^2}{(\max |\chi_{\mu_1}|)^2} dt \leq c \cdot \varepsilon \cdot 2^{-k} \quad \forall \mu_1, \quad \mu_1 = 2^k + \alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq 2^k, \quad (3.20)$$

для фиксированных нами μ_j , $j \geq 2$. Лемма 3.1 доказана.

Из неравенства (3.4) леммы 3.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если ряд (1.1) обладает свойством A_2) для переменной x_j , то для соответствующего ряда $\sum c_\mu(t) \chi_\mu(x)$ выполняется следующее свойство:

- для любого $\varepsilon > 0$ и для любых фиксированных μ_i , $i \neq j$, существует $k_0 > 0$ такое, что если $k > k_0$, то

$$\begin{aligned} & \int_{T_m} \sum_{\mu_j=2^{k+1}}^{2^{k+1}} \frac{|c_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j, \dots, \mu_m}(t)|^2}{(\max |\chi_{\mu_j}(x_j)|)^2} dt \\ &= \sum_{\mu_j=2^{k+1}}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^k} \int_{T_m} |c_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j, \dots, \mu_m}(t)|^2 dt < \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Пусть теперь $D(\nu) = \{\mu_1(\nu), \dots, \mu_{j-1}(\nu), \mu_{j+1}(\nu), \dots, \mu_m(\nu)\}$, $\nu = 1, 2, \dots$, — последовательность всех наборов индексов μ_i , $i \neq j$ и $\varepsilon_q > 0$, $\sum \varepsilon_q < +\infty$.

Применяя следствие 3.1, определим последовательность $\{k(q)\}_{q=1}^\infty$, $k(q) \uparrow +\infty$, такую, что

$$\int_{T_m} \frac{\sum_{\mu_j=2^{k(q)+1}}^{2^{k(q)+1}} |c_{\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \mu_j, \dots, \mu_m}(t)|^2}{(\max |\chi_{\mu_j}(x_j)|)^2} dt < \varepsilon_q, \quad (3.22)$$

для всех наборов μ_i , $i \neq j$, принадлежащих множеству $\bigcup_{\nu=1}^q D(\nu)$. Из (3.22) следует существование множества $T_0 \subset T_m$, $|T_0| = T_m$, такого, что для любого $t \in T_0$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{\mu_j=2^{k(q)+1}}^{2^{k(q)+1}} \frac{|c_{\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \mu_j, \dots, \mu_m}(t)|^2}{(\max |\chi_{\mu_j}(x_j)|)^2} dt = 0 \quad (3.23)$$

для любого фиксированного набора μ_i , $i \neq j$. Из (3.23) следует, что для всех t , $t \in T_0 \subset T_m$, $|T_0| = T_m$, ряд $\sum c_\mu(t) \chi_\mu(x)$ обладает свойством A_1) для переменной x_j . Теорема 3.4 доказана. Тем самым доказаны также теоремы 3.1 и 3.2.

Теорема 3.2 без доказательства была сформулирована в [3]. В работе [4] схожая теорема доказана при других условиях на коэффициенты c_n ряда (1.1), при которых множества единственности являются счетные множества точек. В теоремах настоящей статьи единственность ряда (1.1) утверждается в зависимости от поведения производной функции $F(x)$ на случайной двоичной сети $\Delta_k^p(t)$, где $\Delta_k^p(t)$ – сдвиг Δ_k^p на вектор t .

Следующая теорема, вытекающая из теоремы 3.3, утверждает единственность кратного тригонометрического ряда в зависимости от поведения интегральных средних его кубических частичных сумм. Обозначим (см. п. 1)

$$\Phi_k^{(N)}(x, t) = \frac{\int_{\Delta_k^p} S_N(u + t) du}{\Delta_k^p}, \quad x \in \Delta_k^p. \quad (3.24)$$

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть ряд (1.1) обладает свойством A_2 относительно переменных x_{j_ν} , $1 \leq \nu \leq \nu_0 \leq m$, и его кубические частичные суммы $S_{[2^{\alpha m k}]}(x)$, где $\alpha > 3$ и $[2^{\alpha m k}]$ – целая часть $2^{\alpha m k}$, для почти всех t удовлетворяют условиям

- 1^{oo}) $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k^{([2^{\alpha m k}])}(x, t) = f(x + t)$ по мере на T_m , где $f(x)$ – интегрируемая на T_m периодическая функция;
- 2^{oo}) $\limsup_{k \rightarrow \infty} |\Phi_k^{([2^{\alpha m k}])}(x, t)| < +\infty$ во всех точках x являющихся пересечениями вложенных интервалов $\Delta_k^{p(k)} \subset \Delta_{k-1}^{p(k-1)}$, и не принадлежащих некоторому счетному множеству E_t гиперплоскостей, ортогональных к координатным осям x_{j_ν} , $1 \leq \nu \leq \nu_0 \leq m$.

Тогда ряд (1.1) является рядом Фурье функции $f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств (1.6) и (1.7), где $N = [2^{\alpha m k}]$ (см. п. 1) следует

$$\begin{aligned} & \int_{T_m} \left| \frac{\Delta_k^p F(u + t)}{|\Delta_k^p|} - \frac{1}{|\Delta_k^p|} \cdot \int_{\Delta_k^p} S_{[2^{\alpha m k}]}(u + t) du \right|^2 dt \\ & \leq c_1 \left(\sum_B \sum_{j \notin B} \sum_{\substack{n(B) \\ |n_j| \geq [2^{\alpha m k}]}} \frac{1}{\prod_{j \notin B} n_j^2} \cdot 2^{2(m-|B|)k} + 2^{2mk} \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{|n_j| \geq [2^{\alpha m k}]} \frac{1}{\prod_{j=1}^m n_j^2} \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $\sum_{n(B), |n_j| \geq [2^{\alpha m k}]}$ означает, что в этой сумме $|n_j| \geq [2^{\alpha m k}]$, $j \notin B$, и остальные координаты n_i , $i \neq j$, $i \notin B$, принимают все целые значения. Справедливость (3.25) следует из того, что $|c_n| \leq M$ для всех n и $|\beta_{\mu_j n_j}| \leq 2$.

Из (3.25) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{T_m} \left| \frac{\Delta_k^p F(u + t)}{|\Delta_k^p|} - \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p} S_{[2^{\alpha m k}]}(u + t) du \right|^2 dt \\ & \leq C_2 \cdot 2^{2mk} \cdot 2^{-\alpha m k} = C_2 \cdot 2^{-mk} \cdot 2^{-\varepsilon m k}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Следовательно,

$$\int_{T_m} \left| \Phi_k(x, t) - \Phi_k^{([2^{\alpha m k}])}(x, t) \right|^2 dt \leq C_2 \cdot 2^{-\varepsilon m k}, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.27)$$

Поэтому для почти всех t

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi_k(x, t) - \Phi_k^{([2^{\alpha m k}])}(x, t)| = 0 \quad (3.28)$$

для всех $x \in \bigcap \Delta_k^{p(k)}$, $\Delta_k^{p(k)} \supset \Delta_{k+1}^{p(k+1)}$, $k = 1, 2, \dots$.

Теорема 3.5 следует из теоремы 3.3 и из равенства (3.28). Легко видеть, что аналогичное утверждение верно и для сферических частных сумм

$$\sigma_{2^{\alpha m k}} = \sum_{\|n\| \leq 2^{\alpha m k}} c_n e^{2\pi i n x}, \quad \|n\| = \left(\sum n_j^2 \right)^{1/2},$$

ряда (1.1) и для их интегральных средних $|\Delta_k^p|^{-1} \cdot \int_{\Delta_k^p} \sigma_{2^{\alpha m k}}(u + t) du$, $\alpha > 3$.

Эти результаты являются усилением теоремы 5 работы [5]. В приведенных в настоящей работе теоремах условия, налагаемые на коэффициенты c_n , окончательные. При этом, очевидно, коэффициенты рядов Фурье удовлетворяют этим условиям. Отметим, что в фундаментальной работе [6] Бургейна, где решена проблема единственности суммируемых по сферам тригонометрических рядов, а также в обобщениях этой теоремы [7], коэффициенты c_n должны удовлетворять условию $\sum_{\|n\|=R} |c_n|^2 \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ согласно известной теоремы Коннеса [8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*. т. 1, М., 1965.
- [2] В. Г. Челидзе, *Некоторые методы суммирования двойных рядов и двойных интегралов*, Изд-во Тбилисс. ун-та, Тбилиси, 1977.
- [3] А. А. Талалян, “О единственности кратных тригонометрических рядов и гармонических функций”, *Докл. РАН*, **294**:4 (1987), 796–799.
- [4] В. А. Скворцов, А. А. Талалян, “Некоторые вопросы единственности кратных рядов по системе Хаара и тригонометрической системе”, *Матем. заметки*, **46**:2 (1989), 104–113.
- [5] А. А. Талалян, “О единственности и интегрируемости кратных тригонометрических рядов”, *Матем. заметки*, **86**:5 (2009), 761–775.
- [6] J. Bourgain, “Spherical summation and uniqueness of multiple trigonometric series”, *Internat. Math. Res. Notices*, 1996, № 3, 93–107.
- [7] J. M. Ash, G. Wang, “Some spherical uniqueness theorems for multiple trigonometric series”, *Ann. of Math. (2)*, **151**:1 (2000), 1–33.
- [8] B. Connes, “Sur les coefficients des séries trigonométriques convergentes sphériquement”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **283**:4 (1976), 159–161.

А. А. Талалян

Институт Математики НАН Республики Армении

E-mail: g.karagulyan@yahoo.com

Поступило

25.01.2010