Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ванг, Л. Ю. Жанг, Структурная теорема для слабых модульных коалгебр, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 1, 3–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8797>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:42:08

Структурная теорема для слабых модульных коалгебр

Ю. Ванг, Л. Ю. Жанг

Пусть H – слабая алгебра Хопфа, C – слабая правая H -модульная коалгебра и $\overline{C} = C/C \cdot \text{Ker} \Pi^L$. Приводится структурная теорема для слабых модульных коалгебр, т.е. C как слабая правая H -модульная коалгебра изоморфна слабому скрещенному копроизведению $\overline{C} \times H$, определенному на k -пространстве

$$\{\Sigma c_{(0)} \otimes h_2 \varepsilon(c_{(-1)}) h_1 \mid c \in C, h \in H\}$$

в случае, если существует отображение слабой правой H -модульной коалгебры $\phi: C \rightarrow H$.

Библиография: 14 названий.

1. Введение и предварительные сведения. Слабые алгебра Хопфа, как обобщение обыкновенных алгебр Хопфа и группоидных алгебр, были введены в работе [1]. Главное различие между обыкновенными алгебрами и слабыми алгебрами Хопфа состоит в том, что для сохранения единицы более не требуется коумножение слабой алгебры Хопфа (т.е. не требуется, чтобы коединица была некоторым гомоморфизмом алгебр), и это приводит к существованию двух канонических подалгебр, которые играют роль “некоммутативных баз” в “квантовом группоиде”. Простейшим примером слабой алгебры Хопфа является алгебра группоидов, другими примерами являются плоские алгебры, квантовые группоиды и обобщенная алгебра Каца (см. [2]–[4]). Главная мотивация для изучения слабых алгебр Хопфа исходит из теории квантового поля и операторных алгебр. Оказалось, что многие результаты классической теории алгебр Хопфа можно обобщить на случай слабых алгебр Хопфа. Например, теорема двойственности для слабых модульных алгебр была доказана в работе [5]; теорема Машке и контекст Мориты для слабой модульной алгебры изучались в работе [6]; структурная теорема для слабых модулей Доу–Хопфа доказана в работе [7], что является расширением не только структурной теоремы для слабых модулей Хопфа, приведенной в работе [1], но и расширением структурной теоремы для относительных модулей Хопфа, приведенной в работе [8]; структурная теорема для слабых относительных $[C, H]$ -модулей Хопфа была доказана в работе [9].

Пусть H – алгебра Хопфа над полем k , B – правая H -комодульная алгебра и A – ковариантная подалгебра алгебры B . Структурная теорема для комодульных алгебр приведена в работе [10]; она гласит, что B как правая H -комодульная алгебра

Работа выполнена при поддержке Китайского фонда поддержки национальных естественных наук (грант № 10871170) и Китайского главного фонда поддержки научных исследований министерства образования (грант № 108154).

изоморфна скрещенному произведению $A \# H$, если существует отображение правых H -комодульных алгебр $\nu: H \rightarrow B$. Панаите и Ойстайен обобщили структурную теорему на случай квазихопфовых комодульных алгебр при условии, что существует отображение правых H -комодульных алгебр $\nu: H \rightarrow B$, где H – квазихопфова алгебра и B – правая H -комодульная алгебра (см. [11]).

Как известно, квазихопфовы алгебры и слабые алгебры Хопфа, которые являются обобщениями обыкновенной алгебры Хопфа, – это две параллельные концепции. Таким образом, в данной работе будет исследоваться структурная теорема для слабых модульных коалгебр при соответствующем условии, что существует отображение слабых правых H -модульных коалгебр $\phi: C \rightarrow H$, где H – слабая алгебра Хопфа и C – слабая правая H -модульная коалгебра.

Статья имеет следующую структуру. В п. 1 мы напомним основные определения и основные свойства слабых алгебр Хопфа. В п. 2 на основе работы [12] приводится концепция слабых комодульных коалгебр и доказывается, что слабое скрещенное копроизведение $C \times H$, определенное на k -пространстве

$$\{\Sigma c_{(0)} \otimes h_2 \varepsilon(c_{(-1)} h_1) \mid c \in C, h \in H\},$$

является слабой правой H -модульной коалгеброй, где C – слабая левая H -комодульная коалгебра. В п. 3, основываясь на результатах работы [1], введено понятие слабых H -бикомодулей Хопфа и получены некоторые свойства проекции $E: M \rightarrow M$ для слабого H -бикомодуля Хопфа M . В п. 4 доказывается, что слабая правая H -модульная коалгебра C является объектом категории слабых H -бикомодулей Хопфа ${}^H\mathcal{M}_H^H$. Основной результат этого раздела – это структурная теорема для слабых модульных коалгебр, в которой говорится, что если существует отображение слабой правой H -модульной коалгебры $\phi: C \rightarrow H$, то C изоморфна как слабая правая H -модульная коалгебра слабому скрещенному копроизведению $\overline{C} \times H$, где фактор-пространство $C/C \cdot \text{Ker} \Pi^L$ обозначается как $\overline{C}$.

В дальнейшем мы постоянно имеем дело с фиксированным полем k и используем терминологию, принятую для алгебр, коалгебр и комодулей в книге Монгомери [13].

k -Коалгебра – это k -пространство C с двумя k -линейными отображениями, коумножением $\Delta: C \rightarrow C \otimes C$ и коединицей $\varepsilon: C \rightarrow k$ такими, что выполняются следующие равенства:

$$(\Delta \otimes \text{id})\Delta = (\text{id} \otimes \Delta)\Delta, \quad (\varepsilon \otimes \text{id})\Delta = \text{id} = (\text{id} \otimes \varepsilon)\Delta,$$

где $\text{id}: C \rightarrow C$ задается равенством $\text{id}(c) = c$.

В дальнейшем отображение структуры коумножения Δ пространства C имеет вид $\Delta(c) = \Sigma c_1 \otimes c_2$ для любого $c \in C$.

k -Пространство H является *bialгеброй* если (H, m, μ) – алгебра, (H, Δ, ε) – коалгебра и какое-либо из следующих (эквивалентных) условий выполняется:

- 1) Δ и ε – отображения алгебр;
- 2) m и μ – отображения коалгебр.

Далее, если существует элемент $S \in \text{Hom}(H, H)$, обратный для id относительно свертки “ $*$ ”, то H является *алгеброй Хопфа*. В этом случае S называется *антиподом* алгебры H .

Для коалгебры C левым C -комодулем является k -пространство M с линейным отображением $\rho: M \rightarrow C \otimes M$ таким, что выполняются следующие равенства:

$$(\text{id} \otimes \rho)\rho = (\Delta \otimes \text{id})\rho, \quad (\varepsilon \otimes \text{id})\rho = \text{id},$$

где комодульная структура ρ пространства M имеет вид $\rho(m) = \Sigma m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$ для любого $m \in M$.

Пусть H – одновременно и алгебра, и коалгебра. Если H удовлетворяет условиям (1.1)–(1.3), приведенным ниже, то она называется *слабой биалгеброй*. Если она удовлетворяет условиям (1.1)–(1.4), приведенным ниже, то она называется *слабой алгеброй Хопфа* со слабым антиподом S .

Для любых $x, y, z \in H$

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y), \quad (1.1)$$

$$\Delta^2(1) = (\Delta(1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(1)), \quad \Delta^2(1) = (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1), \quad (1.2)$$

где $\Delta^2 = (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta$,

$$\varepsilon(xyz) = \Sigma \varepsilon(xy_1)\varepsilon(y_2z), \quad \varepsilon(xyz) = \Sigma \varepsilon(xy_2)\varepsilon(y_1z). \quad (1.3)$$

$$\Sigma x_1 S(x_2) = \Sigma \varepsilon(1_1 x) 1_2, \quad \Sigma S(x_1) x_2 = \Sigma 1_1 \varepsilon(x 1_2), \quad \Sigma S(x_1) x_2 S(x_3) = S(x), \quad (1.4)$$

где $\Delta(1) = \Sigma 1_1 \otimes 1_2$.

Для любой слабой биалгебры H введем отображения $\Pi^L, \Pi^R: H \rightarrow H$ по формулам

$$\Pi^L(h) = \Sigma \varepsilon(1_1 h) 1_2, \quad \Pi^R(h) = \Sigma 1_1 \varepsilon(h 1_2).$$

Пусть H^L – образ $\Pi^L(H)$ и H^R – образ $\Pi^R(H)$, где H^L и H^R называются соответственно *алгеброй цели* и *алгеброй источника* для слабой биалгебры H .

Заметим, что если H – слабая биалгебра, то H – обыкновенная биалгебра тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих (эквивалентных) условий:

- (1) $\Delta(1) = 1 \otimes 1$;
- (2) $\varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g)$ для любых $h, g \in H$.

Если H – слабая алгебра Хопфа, то H – обыкновенная алгебра Хопфа тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих (эквивалентных) условий:

- (1) $\Delta(1) = 1 \otimes 1$;
- (2) $\varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g)$;
- (3) $\Sigma S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1$;
- (4) $\Sigma h_1 S(h_2) = \varepsilon(h)1$ для любых $h, g \in H$.

В силу теоремы 2.10, приведенной в работе [1], слабый антипод S для слабой алгебры Хопфа H является анти-мультипликативным и анти-комумультипликативным,

$$S(hg) = S(g)S(h), \quad \Sigma S(h)_1 \otimes S(h)_2 = \Sigma S(h_2) \otimes S(h_1)$$

для любых $h, g \in H$.

Пусть H – слабая алгебра Хопфа. Равенства (W1)–(W6), приведенные ниже, доказаны в работе [1].

Для любых $h, g \in H$

$$\varepsilon(h \Pi^L(g)) = \varepsilon(hg), \quad \varepsilon(\Pi^R(h)g) = \varepsilon(hg), \quad (W1)$$

$$\Sigma h_1 \otimes \Pi^R(h_2) = \Sigma h_1 \otimes S(1_2), \quad \Sigma \Pi^L(h_1) \otimes h_2 = \Sigma S(1_1) \otimes 1_2 h. \quad (W2)$$

Следующее равенство (W2') является следствием равенств (W2):

$$\Sigma \sqcap^L(h_1) \otimes h_2 = \Sigma \sqcap^L(1_1) \otimes 1_2 h. \quad (W2')$$

Для любых $h, g \in H$

$$S \circ \sqcap^R = \sqcap^L \circ S = \sqcap^L \circ \sqcap^R, \quad S \circ \sqcap^L = \sqcap^R \circ S = \sqcap^R \circ \sqcap^L. \quad (W3)$$

$$\sqcap^L \circ \sqcap^L = \sqcap^L, \quad \sqcap^R \circ \sqcap^R = \sqcap^R. \quad (W4)$$

Для любых $x \in H^L, y \in H^R$,

$$\Delta(1) = \Sigma 1_1 \otimes 1_2 \in H^R \otimes H^L, \quad xy = yx. \quad (W5)$$

$$\Delta(x) = \Sigma 1_1 x \otimes 1_2, \quad \Delta(y) = \Sigma 1_1 \otimes y 1_2. \quad (W6)$$

Пусть H – слабая биналгебра, и пусть C – коалгебра. Если C является правым H -модулем с модульным действием “ $\cdot$ ” таким, что

$$\Delta(c \cdot h) = \Sigma c_1 \cdot h_1 \otimes c_2 \cdot h_2, \quad \varepsilon(c \cdot h) = \varepsilon(c \cdot \sqcap^L(h))$$

для любых $c \in C, h \in H$, то C называется *слабой правой H -модульной коалгеброй*. Это понятие было введено в работе [14].

Пусть H – слабая алгебра Хопфа.

(1) Если M одновременно и правый H -модуль с модульным действием “ $\cdot$ ” и левый H -комодуль с комодульным действием “ ρ^- ” таким, что

$$\rho^-(m \cdot h) = \Sigma m_{(-1)} h_1 \otimes m_{(0)} \cdot h_2$$

для любых $h \in H, m \in M$, то M называется *слабым правым, левым H -модулем Хопфа*.

(2) Если M одновременно и правый H -модуль с модульным действием “ $\cdot$ ” и правый H -комодуль с комодульным действием “ ρ^+ ” таким, что

$$\rho^+(m \cdot h) = \Sigma m_{(0)} \cdot h_1 \otimes m_{(1)} h_2$$

для любых $h \in H, m \in M$, то M называется *слабым правым H -модулем Хопфа*.

Эти понятия были введены в работе [1].

2. Слабые скрещенные копроизведения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть H – слабая биналгебра. k -Коалгебра C называется *слабой левой H -комодульной коалгеброй* если C – левый H -комодуль, действующий посредством $\rho(c) = \Sigma c_{(-1)} \otimes c_{(0)}$, так что для любого $c \in C$

$$(1) \quad \Sigma c_{(-1)} \otimes c_{(0)1} \otimes c_{(0)2} = \Sigma c_{1(-1)} c_{2(-1)} \otimes c_{1(0)} \otimes c_{2(0)};$$

$$(2) \quad \Sigma c_{(-1)} \varepsilon(c_{(0)}) = \Sigma \sqcap^L(c_{(-1)}) \varepsilon(c_{(0)}).$$

Пусть C – слабая левая H -комодульная коалгебра. Если H – конечно-мерная слабая алгебра Хопфа, то в силу [1] линейная алгебра H^* , двойственная H , также является слабой алгебра Хопфа, а линейная алгебра C^* , двойственная C , также является слабой правой H^* -модульной алгеброй (см. [7]).

ПРИМЕР 2.2. (1) Пусть H – конечно-мерная слабая алгебра Хопфа. Тогда H – слабая левая H^* -комодульная коалгебра, кодействие которой задано формулами

$$\rho: H \rightarrow H^* \otimes H, \quad \langle \rho(h), g \otimes f \rangle = \langle f, hg \rangle.$$

Сначала покажем, что H – левый H^* -комодуль. Действительно, для любых $h, x, y \in H, f \in H^*$

$$\begin{aligned} \langle (\varepsilon_{H^*} \otimes \text{id})\rho(h), f \rangle &= \Sigma \varepsilon_{H^*}(h_{(-1)}) \langle f, h_{(0)} \rangle = \Sigma \langle h_{(-1)}, 1 \rangle \langle h_{(0)}, f \rangle = \langle f, h \rangle, \\ \langle (\Delta_{H^*} \otimes \text{id})\rho(h), x \otimes y \otimes f \rangle &= \Sigma \langle h_{(-1)1} \otimes h_{(-1)2} \otimes h_{(0)}, x \otimes y \otimes f \rangle \\ &= \Sigma \langle h_{(-1)}, xy \rangle \langle f, h_{(0)} \rangle = \langle f, hxy \rangle = \Sigma \langle f_1, hx \rangle \langle f_2, y \rangle \\ &= \Sigma \langle h_{(-1)}, x \rangle \langle f_1, h_{(0)} \rangle \langle f_2, y \rangle = \Sigma \langle h_{(-1)}, x \rangle \langle f, h_{(0)} y \rangle \\ &= \Sigma \langle h_{(-1)}, x \rangle \langle \rho(h_{(0)}), y \otimes f \rangle = \langle (\text{id} \otimes \rho)\rho(h), x \otimes y \otimes f \rangle. \end{aligned}$$

Вычислим, что

$$\begin{aligned} \Sigma \langle h_{(-1)} \varepsilon(h_{(0)}), g \rangle &= \Sigma \langle h_{(-1)}, g \rangle \langle \varepsilon, h_{(0)} \rangle \\ &= \langle \varepsilon, hg \rangle \stackrel{(W1)}{=} \varepsilon(h \cap^L(g)) = \Sigma \langle h_{(-1)}, \cap^L(g) \rangle \langle \varepsilon, h_{(0)} \rangle \\ &= \Sigma \langle \cap_{H^*}^L(h_{(-1)}), g \rangle \langle \varepsilon, h_{(0)} \rangle = \Sigma \langle \cap_{H^*}^L(h_{(-1)}) \varepsilon(h_{(0)}), g \rangle, \end{aligned}$$

поскольку для любых $f \in H^*, h \in H$

$$\begin{aligned} \langle \cap_{H^*}^L(f), h \rangle &= \Sigma \varepsilon_{H^*}(\bar{1}_1 f) \langle \bar{1}_2, h \rangle = \Sigma \langle \bar{1}_1, 1_1 \rangle \langle f, 1_2 \rangle \langle \bar{1}_2, h \rangle \\ &= \Sigma \langle \varepsilon, 1_1 h \rangle \langle f, 1_2 \rangle = \langle f, \cap^L(h) \rangle = \langle (\cap^L)^*(f), h \rangle, \end{aligned}$$

где $\Delta_{H^*}(1_{H^*}) = \Sigma \bar{1}_1 \otimes \bar{1}_2$ и $\cap_{H^*}^L: H^* \rightarrow H^*$. Легко видеть, что

$$\Sigma h_{(-1)} \otimes h_{(0)1} \otimes h_{(0)2} = \Sigma h_{1(-1)} h_{2(-1)} \otimes h_{1(0)} \otimes h_{2(0)}$$

для любого $h \in H$. Таким образом, H – слабая левая H^* -комодульная коалгебра.

(2) Пусть R – действительное поле, и

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$$

с базисом $\{e_1, e_2\}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Его умножение является обыкновенным матричным умножением, а коумножение и коединица задаются формулами

$$\Delta(e_1) = e_1 \otimes e_1, \quad \Delta(e_2) = e_2 \otimes e_2, \quad \varepsilon(e_1) = 1 = \varepsilon(e_2).$$

Тогда, легко видеть, что H – слабая Хопфа алгебра, имеющая слабый антипод $S = \text{id}$. Но это не обыкновенная Хопфа алгебра, потому что

$$\Delta(1) = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 \neq 1 \otimes 1.$$

Заметим, что в силу определения Π^L имеем

$$\Pi^L(e_1) = e_1, \quad \Pi^L(e_2) = e_2.$$

Легко показать, что H – слабая левая H -комодульная коалгебра, действующая посредством Δ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.¹ Пусть H – слабая алгебра Хопфа, и пусть C – слабая левая H -комодульная коалгебра. *Слабое скрещенное копроизведение* $C \times H$ определяется следующим образом:

- (1) $C \times H = \{\Sigma c_{(0)} \otimes h_2 \varepsilon(c_{(-1)} h_1) \mid c \in C, h \in H\}$ как k -пространства;
- (2) коумножение и коединица задаются формулами

$$\Delta(c \times h) = \Sigma c_1 \times c_{2(-1)} h_1 \otimes c_{2(0)} \times h_2, \quad \varepsilon(c \times h) = \Sigma \varepsilon(c_{(0)}) \varepsilon(c_{(-1)} h).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть H – слабая алгебра Хопфа, и пусть C – слабая левая H -комодульная коалгебра. Тогда слабое скрещенное копроизведение $(C \times H, \Delta, \varepsilon)$ является слабой правой H -модульной коалгеброй, где правое H -действие на $C \times H$ задается формулой

$$\varphi: C \times H \otimes H \rightarrow C \times H, \quad c \times h \otimes g \mapsto c \times hg.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно, и мы его здесь не приводим.

3. Хопфовы бикомодули. Пусть H – слабая алгебра Хопфа, и пусть M – некоторый H -бикомодуль. Если M одновременно и слабый правый, левый H -модуль Хопфа и слабый правый H -модуль Хопфа, то будем говорить, что M – *слабый H -бикомодуль Хопфа*. Категорию слабых H -бикомодулей Хопфа будем обозначать через ${}^H\mathcal{M}_H^H$.

Пусть $M \in {}^H\mathcal{M}_H^H$. Введем следующее отображение:

$$E: M \rightarrow M, \quad m \mapsto \Sigma m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть M – слабый H -бикомодуль Хопфа. Введем

$$\gamma(m) = \Sigma E(m)_{(-1)} \otimes E(m)_{(0)}.$$

Тогда следующие утверждения выполняются для любых $m \in M, h \in H$:

- (1) $E^2 = E$;
- (2) $(\text{id} \otimes E)\gamma(m) = \rho^- E(m)$;
- (3) $(\Delta \otimes \text{id})\gamma(m) = (\text{id} \otimes \gamma)\gamma(m)$;
- (4) $\Sigma E(m_{(0)})_{(-1)} m_{(1)} \otimes E(E(m_{(0)}))_{(0)} = (\text{id} \otimes E)\rho^-(m)$;
- (5) $\Sigma E(m)_{(0)} \otimes E(m)_{(1)} = (E(m) \otimes 1)\Delta(1)$;
- (6) $\Sigma E(m_{(0)}) \cdot \Pi^L(m_{(1)}) = E(m)$;
- (7) $E(m \cdot h) = E(m \cdot \Pi^L(h))$.

¹Это определение было введено Паном (Q. X. Pan) в его диссертации на звание Мастера, представленной на китайском языке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Для любого $m \in M$, имеем

$$\begin{aligned} E^2(m) &= \Sigma E(m_{(0)} \cdot S(m_{(1)})) = \Sigma(m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}))_{(0)} \cdot S((m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}))_{(1)}) \\ &= \Sigma m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(1)})_1 S(m_{(0)(1)} S(m_{(1)})_2) = \Sigma m_{(0)} \cdot S(m_{(1)3}) S(m_{(1)1} S(m_{(1)2})) \\ &= \Sigma m_{(0)} \cdot S(m_{(1)2}) S(\sqcap^L(m_{(1)1})) = \Sigma m_{(0)} \cdot S(\sqcap^L(m_{(1)1}) m_{(1)2}) \\ &= \Sigma m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) = E(m), \end{aligned}$$

так как $\Sigma \sqcap^L(h_1) h_2 = h$.

(2) Для любых $m \in M$, $h \in H$

$$E(m \cdot h) = \Sigma m_{(0)} \cdot \sqcap^L(h) S(m_{(1)}). \quad (A)$$

Это выполняется, потому что

$$\begin{aligned} E(m \cdot h) &= \Sigma(m \cdot h)_{(0)} \cdot S((m \cdot h)_{(1)}) = \Sigma m_{(0)} \cdot h_1 S(m_{(1)} h_2) \\ &= \Sigma m_{(0)} \cdot h_1 S(h_2) S(m_{(1)}) = \Sigma m_{(0)} \cdot \sqcap^L(h) S(m_{(1)}). \end{aligned}$$

Более того, известно, что равенство

$$\rho^-(E(m)) = \Sigma m_{(0)(-1)} S(m_{(1)2}) \otimes m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(1)1}) \quad (B)$$

выполняется, потому что

$$\begin{aligned} \rho^-(E(m)) &= \Sigma E(m)_{(-1)} \otimes E(m)_{(0)} \\ &= \Sigma(m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}))_{(-1)} \otimes (m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}))_{(0)} \\ &= \Sigma m_{(0)(-1)} S(m_{(1)})_1 \otimes m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(1)})_2 \\ &= \Sigma m_{(0)(-1)} S(m_{(1)2}) \otimes m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(1)1}). \end{aligned}$$

Теперь вычислим

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes E)\gamma(m) &= (\text{id} \otimes E)(\Sigma E(m)_{(-1)} \otimes E(m)_{(0)}) \\ &= \Sigma E(m)_{(-1)} \otimes E(E(m)_{(0)}) \\ &\stackrel{(B)}{=} \Sigma m_{(0)(-1)} S(m_{(1)2}) \otimes E(m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(1)1})) \\ &\stackrel{(A)}{=} \Sigma m_{(0)(-1)} S(m_{(1)2}) \otimes m_{(0)(0)(0)} \cdot \sqcap^L(S(m_{(1)1})) S(m_{(0)(0)(1)}) \\ &\stackrel{(W3)}{=} \Sigma m_{(0)(-1)} S(m_{(1)2}) \otimes m_{(0)(0)(0)} \cdot S(\sqcap^R(m_{(1)1})) S(m_{(0)(0)(1)}) \\ &= \Sigma m_{(0)(-1)} S(m_{(1)2}) \otimes m_{(0)(0)(0)} \cdot S(m_{(0)(0)(1)} \sqcap^R(m_{(1)1})) \\ &= \Sigma m_{(-1)} S(m_{(0)(1)2}) \otimes m_{(0)(0)(0)} \cdot S(m_{(0)(0)(1)} \sqcap^R(m_{(0)(1)1})) \\ &= \Sigma m_{(-1)} S(m_{(0)(1)3}) \otimes m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(0)(1)1} \sqcap^R(m_{(0)(1)2})) \\ &= \Sigma m_{(-1)} S(m_{(0)(1)2}) \otimes m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(0)(1)1}) \quad (\Sigma h_1 \sqcap^R(h_2) = h) \\ &= \Sigma m_{(0)(-1)} S(m_{(1)2}) \otimes m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(1)1}) \\ &= \Sigma E(m)_{(-1)} \otimes E(m)_{(0)} = \rho^- E(m). \end{aligned}$$

Заметим, что из предыдущего доказательства следует равенство

$$\Sigma E(m)_{(-1)} \otimes E(E(m)_{(0)}) = \Sigma E(m)_{(-1)} \otimes E(m)_{(0)}. \quad (C)$$

(3) Для любого $m \in M$ выполняется равенство

$$(\text{id} \otimes \gamma)\gamma(m) = (\Delta \otimes \text{id})\gamma(m),$$

потому что

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \gamma)\gamma(m) &= (\text{id} \otimes \gamma)(\Sigma E(m)_{(-1)} \otimes E(m)_{(0)}) \\ &= \Sigma E(m)_{(-1)} \otimes \gamma(E(m)_{(0)}) \\ &= \Sigma E(m)_{(-1)} \otimes \rho^- E(E(m)_{(0)}) \\ &\stackrel{(C)}{=} \Sigma E(m)_{(-1)} \otimes \rho^-(E(m)_{(0)}) \\ &= \Sigma E(m)_{(-1)} \otimes E(m)_{(0)(-1)} \otimes E(m)_{(0)(0)} \\ &= \Sigma(E(m)_{(-1)})_1 \otimes (E(m)_{(-1)})_2 \otimes E(m)_{(0)} \\ &= \Sigma(\Delta \otimes \text{id})(E(m)_{(-1)} \otimes E(m)_{(0)}) \\ &= (\Delta \otimes \text{id})\gamma(m). \end{aligned}$$

(4) Для любого $m \in M$ имеем

$$\begin{aligned} \Sigma E(m_{(0)})_{(-1)} m_{(1)} \otimes E(E(m_{(0)}))_{(0)} &= \Sigma E(m_{(0)})_{(-1)} m_{(1)} \otimes E(m_{(0)})_{(0)} \\ &= \Sigma m_{(0)(0)(-1)} S(m_{(0)(1)2}) m_{(1)} \otimes m_{(0)(0)(0)} \cdot S(m_{(0)(1)1}) \\ &= \Sigma m_{(0)(-1)} S(m_{(1)2}) m_{(1)3} \otimes m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(1)1}) \\ &= \Sigma m_{(0)(-1)} \sqcap^R(m_{(1)2}) \otimes m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(1)1}) \\ &\stackrel{(W2)}{=} \Sigma m_{(0)(-1)} S(1_2) \otimes m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(1)} 1_1) \\ &= \Sigma m_{(0)(-1)} 1_1 \otimes m_{(0)(0)} \cdot 1_2 S(m_{(1)}) \\ &= \Sigma(m_{(0)} \cdot 1)_{(-1)} \otimes (m_{(0)} \cdot 1)_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \\ &= \Sigma m_{(0)(-1)} \otimes m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(1)}) \\ &= \Sigma m_{(-1)} \otimes E(m_{(0)}) = (\text{id} \otimes E)\rho^-(m). \end{aligned}$$

(5) Для любого $m \in M$ получим

$$\begin{aligned} \rho^+(E(m)) &= \Sigma E(m)_{(0)} \otimes E(m)_{(1)} \\ &= \Sigma(m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}))_{(0)} \otimes (m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}))_{(1)} \\ &= \Sigma m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(1)2}) \otimes m_{(0)(1)} S(m_{(1)1}) \\ &= \Sigma m_{(0)} \cdot S(m_{(1)3}) \otimes m_{(1)1} S(m_{(1)2}) \\ &= \Sigma m_{(0)} \cdot S(m_{(1)2}) \otimes \sqcap^L(m_{(1)1}) \\ &\stackrel{(W2)}{=} \Sigma m_{(0)} \cdot S(1_2 m_{(1)}) \otimes S(1_1) \\ &= \Sigma m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) S(1_2) \otimes S(1_1) \\ &= \Sigma m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) 1_1 \otimes 1_2 = (E(m) \otimes 1) \Delta(1). \end{aligned}$$

(6) Для любого $m \in M$ имеем

$$\Sigma E(m_{(0)}) \cdot \sqcap^L(m_{(1)}) = \Sigma m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(0)(1)}) \sqcap^L(m_{(1)})$$

$$\begin{aligned}
&= \Sigma m_{(0)} \cdot S(m_{(1)1}) \sqcap^L(m_{(1)2}) \\
&= \Sigma m_{(0)} \cdot S(m_{(1)1}) m_{(1)2} S(m_{(1)3}) \\
&\stackrel{(1.4)}{=} \Sigma m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) = E(m).
\end{aligned}$$

(7) Это утверждение следует из (A) и (W4).

Очевидно, что H – слабый H -бикомодуль Хопфа, действующий посредством своих умножения и коумножения, и $E(h) = \sqcap^L(h)$ для любого $h \in H$.

Следовательно, в силу предложения 3.1 мы имеем некоторые равенства, которые приведены в работе [1].

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть H – слабая алгебра Хопфа. Тогда для любых $h, g \in H$

- (1) $\sqcap^L \circ \sqcap^L = \sqcap^L$;
- (2) $\Delta(\sqcap^L(h)) = (\sqcap^L(h) \otimes 1) \Delta(1)$;
- (3) $\Sigma \sqcap^L(h_1) \sqcap^L(h_2) = \sqcap^L(h)$;
- (4) $\sqcap^L(hg) = \sqcap^L(h \sqcap^L(g)) = \Sigma h_1 \sqcap^L(g) S(h_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 3.1, (1) следует, что выполняется (1); (2) следует из предложения 3.1, (5); (3) следует из предложения 3.1, (6); из предложения 3.1, (7) и (A) следует (4). Следствие доказано.

Пусть $H^+ = \text{Ker } \sqcap^L$. Тогда в силу [1] H^+ является левым идеалом для H . Для любого слабого H -бикомодуля Хопфа M обозначим $M/M \cdot H^+$ через $\overline{M}$. Введем отображение $\pi: M \rightarrow \overline{M}$, $m \mapsto \overline{m}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Выполняются следующие утверждения:

- (1) для любых $\overline{m} \in \overline{M}$, $h \in H$

$$\overline{m \cdot h} = \overline{m \cdot \sqcap^L(h)};$$
- (2) $M \cdot H^+ \subseteq \text{Ker } E$.
- (3) $\overline{M}$ – левый H -комодуль с левым H -кодействием

$$\rho: \overline{M} \rightarrow H \otimes \overline{M}, \quad \overline{m} \mapsto \Sigma E(m)_{(-1)} \otimes \overline{E(m)_{(0)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Поскольку

$$\sqcap^L(h - \sqcap^L(h)) = \sqcap^L(h) - \sqcap^L(h) = 0,$$

имеем

$$h - \sqcap^L(h) \in H^+.$$

Следовательно, для любого $m \in M$

$$m \cdot (h - \sqcap^L(h)) = m \cdot h - m \cdot \sqcap^L(h) \in M \cdot H^+,$$

т.е.

$$\overline{m \cdot h} = \overline{m \cdot \sqcap^L(h)}.$$

- (2) Для любых $m \in M$, $h^+ \in H^+$ имеем

$$E(m \cdot h^+) \stackrel{(A)}{=} \Sigma m_{(0)} \cdot \sqcap^L(h^+) S(m_{(1)}) = 0,$$

так что

$$M \cdot H^+ \subseteq \text{Ker } E.$$

(3) Сначала проверим, что левое H -кодействие является вполне определенным.

Действительно, для любых $m, n \in M$, если $\overline{m} = \overline{n}$, т.е. существуют два элемента $l \in M$ и $x \in H^+$ таких, что $m = n + l \cdot x$, то в силу предложения 3.1, (7) имеем

$$E(m) = E(n + l \cdot x) = E(n) + E(l \cdot \Gamma^L(x)) = E(n).$$

Далее, для любого $\overline{m} \in \overline{M}$ вычислим

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \rho)\rho(\overline{m}) &= \Sigma(\text{id} \otimes \rho)(\Sigma E(m)_{(-1)} \otimes \overline{E(m)}_{(0)}) \\ &= \Sigma E(m)_{(-1)} \otimes \overline{\rho E(m)}_{(0)} \\ &= \Sigma E(m)_{(-1)} \otimes (\text{id} \otimes \pi)\rho^- E(E(m)_{(0)}) \\ &\stackrel{(C)}{=} \Sigma E(m)_{(-1)} \otimes (\text{id} \otimes \pi)\rho^-(E(m)_{(0)}) \\ &= \Sigma E(m)_{(-1)} \otimes (\text{id} \otimes \pi)(E(m)_{(0)(-1)} \otimes E(m)_{(0)(0)}) \\ &= \Sigma E(m)_{(-1)1} \otimes E(m)_{(-1)2} \otimes \overline{E(m)}_{(0)} \\ &= (\Delta \otimes \text{id})(\Sigma E(m)_{(-1)} \otimes \overline{E(m)}_{(0)}) \\ &= (\Delta \otimes \text{id})\rho(\overline{m}), \\ (\varepsilon \otimes \text{id})\rho(\overline{m}) &= \Sigma(\varepsilon \otimes \text{id})(\Sigma E(m)_{(-1)} \otimes \overline{E(m)}_{(0)}) \\ &= \Sigma \varepsilon(E(m)_{(-1)})\overline{E(m)}_{(0)} = \overline{E(m)} \\ &= \overline{\Sigma m_{(0)} \cdot S(m_{(1)})} = \overline{\Sigma m_{(0)} \cdot \Gamma^L(S(m_{(1)}))} \\ &\stackrel{(W3)}{=} \overline{\Sigma m_{(0)} \cdot \Gamma^L(\Gamma^R(m_{(1)}))} = \overline{\Sigma m_{(0)} \cdot \Gamma^R(m_{(1)})} = \overline{m}, \end{aligned}$$

где окончательное равенство следует из леммы 3.7, приведенной в работе [1]:

$$\Sigma m_{(0)} \cdot \Gamma^R(m_{(1)}) = m. \quad (D)$$

Таким образом, $\overline{M}$ – левый H -комодуль. Предложение доказано.

Заметим, что в силу предложения 3.3, (3)

$$\overline{E(m)} = \overline{m}. \quad (E)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Пусть M – слабый H -бикомодуль Хопфа. Введем обозначение

$$\overline{M} \boxtimes H = \{\Sigma \overline{m}_{(0)} \otimes h_2 \varepsilon(\overline{m}_{(-1)} h_1) \mid \overline{m} \in \overline{M}, h \in H\}.$$

Тогда выполняются следующие утверждения.

(1) $(\overline{M} \boxtimes H, \rho^-, \rho^+, \varphi)$ – слабый H -бикомодуль Хопфа, имеющий следующие действие и кодействие:

$$\begin{aligned} \varphi: (\overline{M} \boxtimes H) \otimes H &\rightarrow \overline{M} \boxtimes H, & (\overline{m} \boxtimes g) \otimes h &\mapsto \overline{m} \boxtimes gh, \\ \rho^+: \overline{M} \boxtimes H &\rightarrow (\overline{M} \boxtimes H) \otimes H, & \overline{m} \boxtimes h &\mapsto \Sigma(\overline{m} \boxtimes h_1) \otimes h_2, \\ \rho^-: \overline{M} \boxtimes H &\rightarrow H \otimes (\overline{M} \boxtimes H), & \overline{m} \boxtimes h &\mapsto \Sigma E(m)_{(-1)} h_1 \otimes (\overline{E(m)}_{(0)} \boxtimes h_2). \end{aligned}$$

(2) Пусть

$$\alpha: \overline{M} \boxtimes H \rightarrow M, \quad \overline{m} \boxtimes h \mapsto E(m) \cdot h, \quad \beta: M \rightarrow \overline{M} \boxtimes H, \quad m \mapsto \Sigma \overline{m_{(0)}} \boxtimes m_{(1)}.$$

Тогда

$$\alpha\beta = \text{id}_M, \quad \beta\alpha = \text{id}_{\overline{M} \boxtimes H}.$$

Аналогично предложению 3.3, (3) легко видеть, что α вполне определено. Кроме того, β – правое H -модульное отображение, поскольку для любых $m \in M$, $h \in H$

$$\begin{aligned} \beta(m \cdot h) &= \Sigma \overline{m_{(0)} \cdot h_1} \boxtimes m_{(1)} h_2 \stackrel{(E)}{=} \Sigma \overline{E(m_{(0)} \cdot h_1)} \boxtimes m_{(1)} h_2 \\ &\stackrel{(A)}{=} \Sigma \overline{m_{(0)(0)} \cdot \square^L(h_1) S(m_{(0)(1)})} \boxtimes m_{(1)} h_2 \\ &\stackrel{(W2)}{=} \Sigma \overline{m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(0)(1)} 1_1)} \boxtimes m_{(1)} 1_2 h \\ &= \Sigma \overline{m_{(0)} \cdot S(m_{(1)1} 1_1)} \boxtimes m_{(1)2} 1_2 h \\ &= \Sigma \overline{m_{(0)} \cdot S(m_{(1)1})} \boxtimes m_{(1)2} h = \Sigma \overline{E(m_{(0)})} \boxtimes m_{(1)} h \\ &= \Sigma (\overline{m_{(0)}} \boxtimes m_{(1)}) \cdot h = \beta(m) \cdot h. \end{aligned}$$

В силу предложения 3.1, (5) имеем

$$\begin{aligned} E(E(m) \cdot h) &= \Sigma E(m)_{(0)} \cdot \square^L(h) S(E(m)_{(1)}) = \Sigma E(m) \cdot 1_1 \square^L(h) S(1_2) \\ &\stackrel{(W5)}{=} \Sigma E(m) \cdot \square^L(h) 1_1 S(1_2) = \Sigma E(m) \cdot \square^L(h). \end{aligned}$$

Таким образом, для любых $\overline{m} \boxtimes h \in \overline{M} \boxtimes H$, $m \in M$

$$\begin{aligned} \beta\alpha(\overline{m} \boxtimes h) &= \beta(E(m) \cdot h) = \beta(E(m)) \cdot h \\ &= \Sigma \overline{E(m)_{(0)}} \boxtimes E(m)_{(1)} h = \Sigma \overline{E(m)} \cdot 1_1 \boxtimes 1_2 h \\ &= \Sigma \overline{E(E(m) \cdot 1_1)_{(0)}} \otimes 1_3 h_2 \varepsilon(E(E(m) \cdot 1_1)_{(-1)} 1_2 h_1) \\ &= \Sigma \overline{(E(m) \cdot \square^L(1_1))_{(0)}} \otimes 1_3 h_2 \varepsilon((E(m) \cdot \square^L(1_1))_{(-1)} 1_2 h_1) \\ &\stackrel{(W2)}{=} \Sigma \overline{(E(m) \cdot S(1_1))_{(0)}} \otimes 1_3 h_2 \varepsilon((E(m) \cdot S(1_1))_{(-1)} 1_2 h_1) \\ &= \Sigma \overline{E(m)_{(0)} \cdot S(1_1)_2} \otimes 1_3 h_2 \varepsilon(E(m)_{(-1)} S(1_1)_1 1_2 h_1) \\ &\stackrel{(W6)}{=} \Sigma \overline{E(m)_{(0)} \cdot S(1_1)} \otimes 1'_2 h_2 \varepsilon(E(m)_{(-1)} S(1_2) 1'_1 1_3 h_1) \\ &= \Sigma \overline{E(m)_{(0)} \cdot S(1_1)} \otimes 1'_2 h_2 \varepsilon(E(m)_{(-1)} S(1_2)) 1_3 1'_1 h_1) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \Sigma \overline{E(m)_{(0)} \cdot S(1_1)} \otimes h_2 \varepsilon(E(m)_{(-1)} S(1_2) 1_3 h_1) \\ &= \Sigma \overline{E(m)_{(0)} \cdot S(1_1)} \otimes h_2 \varepsilon(E(m)_{(-1)} \square^R(1_2) h_1) \\ &= \Sigma \overline{E(m)_{(0)} \cdot S(1_1)} \otimes h_2 \varepsilon(E(m)_{(-1)} S(1_2) h_1) \\ &= \Sigma \overline{E(m)_{(0)} \cdot 1_2} \otimes h_2 \varepsilon(E(m)_{(-1)} 1_1 h_1) \\ &= \Sigma \overline{E(m)_{(0)}} \otimes h_2 \varepsilon(E(m)_{(-1)} h_1) = \overline{m} \boxtimes h, \\ \alpha\beta(m) &= \alpha(\Sigma \overline{m_{(0)}} \boxtimes m_{(1)}) = \Sigma E(m_{(0)}) \cdot m_{(1)} \\ &= \Sigma m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(0)(1)}) m_{(1)} = \Sigma m_{(0)} \cdot \square^R(m_{(1)}) \stackrel{(D)}{=} m. \end{aligned}$$

4. Структурная теорема для слабых модульных коалгебр. Всюду в этом пункте предполагается, что H – слабая алгебра Хопфа, а C – слабая правая H -модульная коалгебра с отображением модульной структуры ω . Тогда $C \cdot H^+$ – коидеал для C , поскольку H^+ – коидеал для H в силу [1], и

$$\begin{aligned}\Delta(C \cdot H^+) &= \Delta(C)\Delta(H^+) \subseteq C \otimes C \cdot H^+ + C \cdot H^+ \otimes C, \\ \varepsilon(C \cdot H^+) &= \varepsilon(C \cdot \Pi^L(H^+)) = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $\overline{C} = C/C \cdot H^+$ – коалгебра. Тогда из фундаментальной теоремы для коалгебр следует, что $\overline{C}$ имеет единственную коалгебраическую структуру $\overline{\Delta}$ такую, что

$$\pi: C \rightarrow \overline{C}$$

является отображением коалгебр.

В силу предложения 3.3 выполнено $C \cdot H^+ \subseteq \text{Ker } E$ и, следовательно, существует отображение $\overline{E}: \overline{C} \rightarrow C$ такое, что

$$E = \overline{E}\pi.$$

Предположим, что существует отображение слабых правых H -модульных коалгебр $\phi: C \rightarrow H$, где H – слабая правая H -модульная коалгебра, действующая посредством своего умножения. Определим два H -кодействия на C следующим образом:

$$\begin{aligned}\varrho^-: C &\rightarrow H \otimes C, & c &\mapsto \Sigma\phi(c_1) \otimes c_2, \\ \varrho^+: C &\rightarrow C \otimes H, & c &\mapsto \Sigma c_1 \otimes \phi(c_2).\end{aligned}$$

Легко проверить, что $(C, \varrho^-, \varrho^+, \omega)$ – это слабый H -бикомодуль Хопфа, т.е. $C \in {}^H\mathcal{M}_H^H$.

ЛЕММА 4.1. *Если существует отображение слабых правых H -модульных коалгебр $\phi: C \rightarrow H$, то выполняются следующие утверждения:*

- (1) $\phi(E(c)) = \Pi^L(\phi(c))$ для любого $c \in C$;
- (2) $\text{Im}(\Delta E - \Delta) \subseteq \text{Ker}(E \otimes E)$;
- (3) $\overline{C}$ – слабая левая H -комодульная коалгебра с левым H -кодействием

$$\rho: \overline{C} \rightarrow H \otimes \overline{C}, \quad \bar{c} \mapsto \Sigma E(c)_{-1} \otimes \overline{E(c)}_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Для любого $c \in C$ имеем

$$\phi(E(c)) = \Sigma\phi(c_1 \cdot S\phi(c_2)) = \Sigma\phi(c_1)S\phi(c_2) = \Pi^L(\phi(c)).$$

(2) Для любого $c \in C$

$$\begin{aligned}(E \otimes E)\Delta E(c) &= \Sigma E(E(c)_1) \otimes E(E(c)_2) \\ &= \Sigma E((c_1 \cdot S(\phi(c_2)))_1) \otimes E((c_1 \cdot S(\phi(c_2)))_2) \\ &= \Sigma E(c_1 \cdot S(\phi(c_4))) \otimes E(c_2 \cdot S(\phi(c_3))) \\ &= \Sigma E(c_1 \cdot \Pi^L(S(\phi(c_4)))) \otimes E(c_2 \cdot S(\phi(c_3))) \quad (\text{предложение 3.1, (7)})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(W3)}{=} \Sigma E(c_1 \cdot \Pi^L(\Pi^R(\phi(c_4)))) \otimes E(c_2 \cdot S(\phi(c_3))) \\
& = \Sigma E(c_1 \cdot \Pi^R(\phi(c_4))) \otimes E(c_2 \cdot S(\phi(c_3))) \\
& \stackrel{(W2)}{=} \Sigma E(c_1 \cdot S(1_2)) \otimes E(c_2 \cdot S(\phi(c_3)1_1)) \\
& = \Sigma E(c_1 \cdot 1_1) \otimes E(c_2 \cdot 1_2 S(\phi(c_3))) \\
& = \Sigma E(c_1) \otimes E(c_2 \cdot S(\phi(c_3))) = \Sigma E(c_1) \otimes E(E(c_2)) \\
& = \Sigma E(c_1) \otimes E(c_2) = (E \otimes E)\Delta(c).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{Im}(\Delta E - \Delta) \subseteq \text{Ker}(E \otimes E) = \text{Ker } E \otimes C + C \otimes \text{Ker } E.$$

(3) В силу предложения 3.3, (3) $\overline{C}$ – левый H -комодуль. Чтобы проверить, что $\overline{C}$ – левая H -комодульная коалгебра, нужно доказать, что для любого $\bar{c} \in \overline{C}$

$$(i) \Sigma \overline{c_1(-1)} \overline{c_2(-1)} \otimes \overline{c_1(0)} \otimes \overline{c_2(0)} = (\text{id} \otimes \Delta)\rho(\bar{c});$$

$$(ii) (\text{id} \otimes \varepsilon)\rho(\bar{c}) = \Sigma \varepsilon(\overline{c_{(0)}}) \Pi^L(\phi(\overline{c_{(-1)}})).$$

Очевидно, по определению структурных отображений $\rho: \overline{C} \rightarrow H \otimes \overline{C}$ и $\varrho^-: C \rightarrow H \otimes C$ имеем

$$\rho(\bar{c}) = \Sigma \phi(E(c)_1) \otimes \overline{E(c)_2}. \quad (F)$$

Таким образом, для любого $\bar{c} \in \overline{C}$

$$\begin{aligned}
& \Sigma \overline{c_1(-1)} \overline{c_2(-1)} \otimes \overline{c_1(0)} \otimes \overline{c_2(0)} \\
& \stackrel{(F)}{=} \Sigma \phi(E(c_1)_1) \phi(E(c_2)_1) \otimes \overline{E(c_1)_2} \otimes \overline{E(c_2)_2} \\
& = \Sigma \phi(c_1 \cdot S(\phi(c_4))) \phi(c_5 \cdot S(\phi(c_8))) \otimes \overline{c_2 \cdot S(\phi(c_3))} \otimes \overline{c_6 \cdot S(\phi(c_7))} \\
& = \Sigma \phi(c_1) S(\phi(c_4)) \phi(c_5) S(\phi(c_8)) \otimes \overline{c_2 \cdot S(\phi(c_3))} \otimes \overline{c_6 \cdot S(\phi(c_7))} \\
& = \Sigma \phi(c_1) \Pi^R(\phi(c_4)) S(\phi(c_7)) \otimes \overline{c_2 \cdot S(\phi(c_3))} \otimes \overline{c_5 \cdot S(\phi(c_6))} \\
& = \Sigma \phi(c_1) S(1_2) S(\phi(c_6)) \otimes \overline{c_2 \cdot S(\phi(c_3)1_1)} \otimes \overline{c_4 \cdot S(\phi(c_5))} \\
& = \Sigma \phi(c_1 \cdot 1_1) S(\phi(c_6)) \otimes \overline{c_2 \cdot 1_2 S(\phi(c_3))} \otimes \overline{c_4 \cdot S(\phi(c_5))} \\
& = \Sigma \phi(c_1) S(\phi(c_6)) \otimes \overline{c_2 \cdot S(\phi(c_3))} \otimes \overline{c_4 \cdot S(\phi(c_5))} \\
& = \Sigma \phi(c_1) S(\phi(c_4)) \otimes \overline{E(c_2)} \otimes \overline{E(c_3)} \stackrel{(E)}{=} \Sigma \phi(c_1 \cdot S(\phi(c_4))) \otimes \overline{c_2} \otimes \overline{c_3}, \\
& = (\text{id} \otimes \Delta)(\Sigma \phi(c_1 \cdot S(\phi(c_3)))) \otimes \overline{c_2} = (\text{id} \otimes \Delta)(\Sigma \phi(c_1 \cdot S(\phi(c_3))) \otimes \overline{E(c_2)}) \\
& = (\text{id} \otimes \Delta)(\Sigma \phi(c_1 \cdot S(\phi(c_4))) \otimes \overline{c_2 \cdot S(\phi(c_3))}) \\
& = (\text{id} \otimes \Delta)(\Sigma \phi(E(c)_1) \otimes \overline{E(c)_2}) = (\text{id} \otimes \Delta)\rho(\bar{c}).
\end{aligned}$$

Следовательно, утверждение (i) выполняется.

(ii) Для любого $\bar{c} \in \overline{C}$

$$\begin{aligned}
(\text{id} \otimes \varepsilon)\rho(\bar{c}) &= (\text{id} \otimes \varepsilon)(\Sigma \phi(E(c)_1) \otimes \overline{E(c)_2}) \\
&= \Sigma \phi(E(c)_1) \varepsilon(\overline{E(c)_2}) = \Sigma \phi(E(c)_1) \varepsilon(E(c)_2) \\
&= \phi(E(c)) = \Pi^L(\phi(c)), \\
\Sigma \varepsilon(\overline{c_{(0)}}) \Pi^L(\phi(\overline{c_{(-1)}})) &= \Sigma \varepsilon(\overline{E(c)_2}) \Pi^L(\phi(E(c)_1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon((E(c)_2)) \sqcap^L(\phi(E(c)_1)) = \sqcap^L(\phi(E(c))) \\
&= \sqcap^L(\sqcap^L(\phi(c))) \stackrel{(W4)}{=} \sqcap^L(\phi(c)).
\end{aligned}$$

Следовательно, утверждение (ii) выполняется. Лемма доказана.

В силу предложения 2.4 скрещенное копроизведение $\overline{C} \times H$ алгебр $\overline{C}$ и H является слабой правой H -модульной коалгеброй. Более того, в силу замечания 3.4 известно, что $\overline{C} \times H$ также является слабым H -бикомодулем Хопфа и отображение

$$\Phi: C \rightarrow \overline{C} \times H, \quad c \mapsto \Sigma \overline{c}_1 \times \phi(c_2),$$

является биекцией, имеющей обратное отображение

$$\Phi^{-1}: \overline{C} \times H \rightarrow C, \quad \overline{c} \times h \mapsto E(c) \cdot h.$$

ЛЕММА 4.2. *Если существует отображение слабых правых H -модульных коалгебр $\phi: C \rightarrow H$, то $\Phi: C \rightarrow \overline{C} \times H$, $c \mapsto \Sigma \overline{c}_1 \times \phi(c_2)$, – отображение слабых правых H -модульных коалгебр.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 3.4, (2) имеем, что Φ – это правое H -модульное отображение. Остается показать, что Φ является отображением коалгебр.

Действительно, для любого $c \in C$

$$\begin{aligned}
\Delta \Phi(c) &= \Delta(\Sigma \overline{c}_1 \times \phi(c_2)) = \overline{c}_1 \times \overline{c}_{2(-1)} \phi(c_3) \otimes \overline{c}_{2(0)} \times \phi(c_4) \\
&\stackrel{(F)}{=} \Sigma \overline{c}_1 \times \phi(E(c_2)_1) \phi(c_3) \otimes \overline{E(c_2)_2} \times \phi(c_4) \\
&= \Sigma \overline{c}_1 \times \phi(c_2 \cdot S\phi(c_5)) \phi(c_6) \otimes \overline{c_3 \cdot S\phi(c_4)} \times \phi(c_7) \\
&= \Sigma \overline{c}_1 \times \phi(c_2) S\phi(c_5) \phi(c_6) \otimes \overline{c_3 \cdot S\phi(c_4)} \times \phi(c_7) \\
&= \Sigma \overline{c}_1 \times \phi(c_2) \sqcap^R(\phi(c_5)) \otimes \overline{c_3 \cdot S\phi(c_4)} \times \phi(c_6) \\
&\stackrel{(W2)}{=} \Sigma \overline{c}_1 \times \phi(c_2) S(1_2) \otimes \overline{c_3 \cdot S(\phi(c_4)1_1)} \times \phi(c_5) \\
&= \Sigma \overline{c}_1 \times \phi(c_2 \cdot 1_1) \otimes \overline{c_3 \cdot 1_2 S\phi(c_4)} \times \phi(c_5) \\
&= \Sigma \overline{c}_1 \times \phi(c_2) \otimes \overline{c_3 \cdot S\phi(c_4)} \times \phi(c_5) \\
&= \Sigma \overline{c}_1 \times \phi(c_2) \otimes \overline{E(c_3)} \times \phi(c_4) \\
&\stackrel{(E)}{=} \Sigma \overline{c}_1 \times \phi(c_2) \otimes \overline{c}_3 \times \phi(c_4) = (\Phi \otimes \Phi) \Delta(c), \\
\varepsilon \Phi(c) &= \Sigma \varepsilon(\overline{c}_1 \times \phi(c_2)) = \Sigma \varepsilon(\overline{E(c_1)_2}) \varepsilon(\phi(E(c_1)_1) \phi(c_2)) \\
&= \Sigma \varepsilon(\phi(E(c_1)) \phi(c_2)) = \Sigma \varepsilon(\phi(c_1 \cdot S\phi(c_2)) \phi(c_3)) \\
&= \Sigma \varepsilon(\phi(c_1) S\phi(c_2) \phi(c_3)) = \varepsilon \phi(c) = \varepsilon(c).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из леммы 4.2 получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.3. *Предположим, что существует отображение слабых правых H -модульных коалгебр $\phi: C \rightarrow H$. Тогда выполняется соотношение эквивалентности*

$$C \cong \overline{C} \times H$$

как для слабых правых H -модульных коалгебр.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. (1) Некоторые интересные результаты были получены при условии существования отображения слабых правых H -модульных коалгебр $\phi: C \rightarrow H$. Например, при этом условии Цай и Жанг доказали фундаментальную теорему о слабых относительных $[C, H]$ -модулях Хопфа (см. [9]).

(2) Предположим, что D – правая идеальная субкоалгебра алгебры H (т.е., что D является одновременно и правым идеалом для H и субкоалгеброй для H). Тогда D – слабая правая H -модульная коалгебра. Легко видеть, что отображение $\phi = \text{id}: D \hookrightarrow H$ – это отображение слабых правых H -модульных коалгебр. Таким образом, выполняется соотношение эквивалентности $D \cong \bar{D} \times H$ как для слабых правых H -модульных коалгебр.

Авторы благодарят рецензента за его/ее конструктивные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi, “Weak Hopf algebras. I. Integral theory and C^* -structure”, *J. Algebra*, **221**:2 (1999), 385–438.
- [2] T. Hayashi, “Quantum group symmetry of partition functions of IRF models and its application to Jones’ index theory”, *Comm. Math. Phys.*, **157**:2 (1993), 331–345.
- [3] D. Nikshych, L. Vainerman, “Finite quantum groupoids and their applications”, *New directions in Hopf algebras*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **43**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, 211–262.
- [4] T. Yamanouchi, “Duality for generalized Kac algebras and a characterization of finite groupoid algebras”, *J. Algebra*, **163**:1 (1994), 9–50.
- [5] D. Nikshych, “A duality theorem for quantum groupoids”, *New trends in Hopf algebra theory*, Contemp. Math., **267**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 237–243.
- [6] L. Zhang, “Maschke-type theorem and Morita context over weak Hopf algebras”, *Sci. China Ser. A*, **49**:5 (2006), 587–598.
- [7] L. Zhang, S. Zhu, “Fundamental theorems of weak Doi–Hopf modules and semisimple weak smash product Hopf algebras”, *Comm. Algebra*, **32**:9 (2004), 3403–3415.
- [8] Y. Doi, “On the structure of relative hopf modules”, *Comm. Algebra*, **11**:3 (1983), 243–255.
- [9] Жи-мин Цай, Лианг-юн Жанг, “Фундаментальная теорема о слабых относительных $[C, H]$ -модулях Хопфа”, *Матем. заметки*, **82**:4 (2007), 530–537.
- [10] G. Militaru, D. Stefan, “Extending modules for Hopf–Galois extensions”, *Comm. Algebra*, **22**:14 (1994), 5657–5678.
- [11] F. Panaite, F. Van Oystaeyen, “A structure theorem for quasi-Hopf comodule algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**:6 (2007), 1669–1677.
- [12] R. K. Molnar, “Semi-direct products of Hopf algebras”, *J. Algebra*, **47**:1 (1977), 29–51.
- [13] S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **82**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [14] G. Böhm, “Doi–Hopf modules over weak Hopf algebras”, *Comm. Algebra*, **28**:10 (2000), 4687–4698.

Ю. Ванг

Nanjing Agricultural University, Китай

Поступило

14.09.2008

Л. Ю. Жанг

Nanjing Agricultural University, Китай

E-mail: zlyun@njau.edu.cn