Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Хианглин Вей, Венхуа Лан, Рен Динг, О существовании точечного подмножества, имеющего три или пять внутренних точек, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 1, 105–115

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8798>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:25:51

О существовании точечного подмножества, имеющего три или пять внутренних точек

Хианглин Вей, Венхуа Лан, Рен Динг

Внутренней точкой конечного плоского точечного множества называется любая точка множества, которая не лежит на границе выпуклой оболочки этого множества. Для любого целого $k \geq 1$ пусть $h(k)$ – наименьшее целое число такое, что любое точечное множество на плоскости, никакие три точки которого не лежат на одной прямой, и которое содержит, по крайней мере, $h(k)$ внутренних точки, имеет подмножество, содержащее k или $k + 2$ внутренних точек некоторого множества P . Мы доказываем, что $h(3) = 8$.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. В данной статье рассматриваются только плоские точечные множества в общем положении, т.е. точечные множества, никакие три точки которого не лежат на одной прямой. Выпуклую оболочку такого точечного множества P будем обозначать через $CH(P)$. Пусть $V(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ – множество вершин выпуклой оболочки $CH(P)$ или, коротко, множества P . *Внутренней точкой* множества P называется любая точка множества P , которая не принадлежит границе выпуклой оболочки $CH(P)$. Символ $I(P)$ обозначает множество внутренних точек, принадлежащих P , т.е. $I(P) = P - V(P)$. Здесь вершины $v_1, v_2, \dots, v_m$ всегда нумеруются по часовой стрелке. Пусть $Q \subset P$; будем говорить, что Q содержит внутреннюю точку p множества P , если $p \in I(P) \cap \text{int } CH(Q)$, где $\text{int } CH(Q)$ – внутренность выпуклой оболочки множества Q ; для краткости вместо $I(P) \cap \text{int } CH(Q)$ будем писать $I^*(Q)$. Множество $I(Q)$ состоит из всех внутренних точек множества Q , тогда как $I^*(Q)$ состоит из всех внутренних точек множества P , принадлежащих $\text{int } CH(Q)$. Внутренняя точка множества P необязательно будет внутренней точкой множества Q , и $I^*(Q)$ необязательно равно $I(Q)$. Легко привести примеры, показывающие, что $I(Q) \neq I^*(Q)$. Через $i^*(Q) = |I^*(Q)|$ обозначим число внутренних точек множества P , содержащихся в Q . Если $i^*(Q) = k$, то будем говорить, что Q является *подмножеством, содержащим в точности k внутренних точек множества P* .

Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук КНР (гранты №№ 10901045, 10571042), Фонда естественных наук провинции Хебей (гранты №№ A2005000144, A2007000226, A2007000002), Научного фонда университета науки и техники провинции Хебей (грант № XL200818) и Научного фонда департамента образования провинции Хебей (грант № Z2009113).

или, для краткости, *подмножеством, содержащим в точности k внутренних точек*. Будем говорить, что точечное множество Q находится в *выпуклом положении* или *выпукло*, если оно образует множество вершин некоторого точечного множества.

В работе [1] Эрде́ш и Секереш доказали, что для любого $t \geq 3$ существует число $f(t)$ такое, что любое множество P , состоящее, по крайней мере, из $f(t)$ точек, содержит точечное подмножество с t вершинами. Хортон [2] показал, что в общем случае невозможно точно определить и число вершин, и число внутренних точек. В работе [3] Авис, Осано и Урабе искали ответ на вопрос, когда множество P содержит подмножество Q с $i^*(Q) = k$. Для любого целого $k \geq 1$ пусть $g(k)$ – наименьшее целое такое, что всякое плоское точечное множество P с $|I(P)| \geq g(k)$ имеет подмножество $Q \subset P$ с $i^*(Q) = k$, т.е.

$$g(k) = \min\{s : |I(P)| \geq s \Rightarrow \exists Q \subset P \ i^*(Q) = |I(P) \cap \text{int } CH(Q)| = k\}.$$

Они показали, что $g(1) = 1$, $g(2) = 4$ и $g(3) \geq 8$, но не могли вычислить $g(3)$. Февенс [4] доказал, что $g(k) \geq 3k - 1$ при $k \geq 3$. Вей и Динг показали, что $g(k) \geq 3k$ при $k \geq 3$ (см. [5]). Относительно дальнейших исследований в этом направлении см. [6] и [7]. В работе [8] Авис, Осано и Урабе также получили более точный результат, доказав, что всякое плоское точечное множество P с $|I(P)| \geq 7$ имеет подмножество $Q \subset P$ с $i^*(Q) = 4$ или 5. В данной работе мы ограничим условие на число внутренних точек и обсудим вопросы существования подмножества с 3 или 5 внутренними точками множества P , что является полезным шагом на пути определения величины $g(3)$.

Через $h(k)$ обозначим наименьшее целое число такое, что всякое плоское точечное множество P с $|I(P)| \geq h(k)$ имеет подмножество $Q \subset P$ с $i^*(Q) = k$ или $k + 2$, т.е.

$$h(k) = \min\{s : |I(P)| \geq s \Rightarrow \exists Q \subset P \ i^*(Q) = |I(P) \cap \text{int } CH(Q)| = k \text{ или } k + 2\}.$$

Мы докажем, что $h(3) = 8$. Для доказательства нам понадобятся следующие леммы.

2. Вспомогательные леммы. Точечное множество T называется *треугольником* и обозначается как $T = \triangle v_1 v_2 v_3$, если $V(T) = \{v_1, v_2, v_3\}$. Пусть x, y, z – неотрицательные целые числа. Внутренняя точка треугольника T называется (x, y, z) -*разделителем* или *разделителем типа (x, y, z)* треугольника T , если она разбивает T на три треугольника с $x \geq y \geq z$ внутренних точек соответственно. В случае $z = 0$ мы используем сокращенное обозначение (x, y) -*разделитель*. Пусть даны три точки плоскости a, b, c ; через $H(ab; c)$ обозначим полуплоскость, ограниченную прямой линией ab и содержащую внутреннюю точку c , а через $C(a; b, c)$ обозначим конус, где a – вершина конуса, а лучи ab и ac образуют границу конуса.

Так же, как и в аналогичных определениях в работах [3] и [8], точечное множество P называется *дефицитным точечным множеством типа $P(m, s, k)$* , если $|V(P)| = m$, $|I(P)| = s$ и для любого $Q \subset P$ выполняется неравенство $i^*(Q) \neq k, k + 2$. Для краткости будем писать $P = P(m, s, k)$, что означает, что точечное множество P является дефицитным точечным множеством типа $P(m, s, k)$ и, если это не приводит к недоразумению, будем использовать обозначение $P(m, s, k)$ для самого дефицитного точечного множества. Из существования дефицитного точечного множества $P = P(m, s, k)$ следует, что $h(k) \geq s + 1$. Для доказательства равенства $h(3) = 8$ нам понадобятся свойства дефицитных точечных множеств типа $P(3, s, 3)$, где $s = 6, 7$.

Пусть $V(P) = \{v_1, v_2, v_3\}$ – множество вершин дефицитного точечного множества $P = P(3, s, 3)$. Ребро выпуклой оболочки $CH(P)$ также называется *ребром множества P* . Если для ребра $v_i v_{i+1}$ множества P существует подмножество $Q \subset P$ с $i^*(Q) = x$ такое, что $v_i v_{i+1}$ является ребром множества Q , то будем говорить, что $v_i v_{i+1}$ – *ребро типа x* , где $x \neq 3, 5$ и $x \leq s - 1$.

Перечислим все возможные конфигурации дефицитного точечного множества $P = P(3, s, 3)$ при заданном s , затем проверим каждую конфигурацию, и либо докажем существование подмножества $Q \subset P$ с $i^*(Q) = 3$ или 5 , что противоречит дефицитности множества P , либо получим необходимые свойства. Чтобы избежать скучных повторений, будем говорить, что подмножество Q множества P является x -int подмножеством, если $i^*(Q) = x$, т.е. если Q содержит в точности x внутренних точек множества P . Если в рассуждениях о $P = P(3, s, 3)$ появляется некоторое 3-int или 5-int подмножество, то это значит, что мы пришли к противоречию.

ЛЕММА 1. *Дефицитное точечное множество $P = P(3, 6, 3)$ имеет следующие свойства:*

- 1) *каждый (x, y) -разделитель множества P является $(4, 1)$ -разделителем;*
- 2) $|V(I(P))| = 6$;
- 3) *каждое ребро множества P является ребром типа 1 и типа 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Свойство очевидно, поскольку в противном случае существует 3-int или 5-int подмножество множества P , что противоречит определению множества $P(3, 6, 3)$.

2) Пусть h_1 – $(4, 1)$ -разделитель. Предположим, что

$$i^*(\Delta v_1 h_1 v_3) = 1, \quad I^*(\Delta v_1 h_1 v_3) = \{h_2\},$$

где h_2 – $(4, 1)$ -разделитель для $\Delta v_1 v_2 v_3$. Тогда $h_2 \in H(v_2 h_1; v_3)$, поскольку в противном случае $i^*(\Delta h_2 v_2 v_3) = 5$. Если $i^*(\Delta v_1 v_2 h_2) = 4$, то $i^*(\Delta h_1 v_2 h_2) = 3$ и мы приходим к противоречию. Итак, имеем $i^*(\Delta v_2 v_3 h_2) = 4$. Таким образом,

$$i^*(\Delta v_2 v_3 h_2 \cap \Delta h_1 v_2 v_3) = 4$$

(см. рис. 1, (a)).

Пусть $h_3 \in I^*(\Delta h_1 v_2 v_3)$, так что $I^*(\Delta h_3 v_2 v_3) = \emptyset$, где h_3 – $(2, 1)$ -разделитель множеств $\Delta h_1 v_2 v_3$ и $\Delta v_2 v_3 h_2$ и $(4, 1)$ -разделитель множества $\Delta v_1 v_2 v_3$. Если $h_3 \in C(v_1; h_1, h_2)$, то h_3 не будет $(4, 1)$ -разделителем множества $\Delta v_1 v_2 v_3$, что противоречит свойству 1). Предположим, что $h_3 \in H(v_1 h_1; v_2)$. Если $i^*(\Delta v_2 h_3 h_2) = 2$, то $i^*(\{v_1, v_2, h_3, h_2\}) = 3$. Итак, мы имеем

$$\begin{aligned} i^*(\Delta v_2 h_3 h_2) &= 1, & I^*(\Delta v_2 h_3 h_2) &= \{u_1\}, \\ i^*(\Delta h_3 v_3 h_2) &= 2, & I^*(\Delta h_3 v_3 h_2) &= \{u_2, u_3\} \end{aligned}$$

(см. рис. 1, (b)). Тогда $u_1 \in H(v_1 h_3; v_2) \cap H(h_3 v_3; v_1)$, поскольку в противном случае $i^*(\Delta v_1 h_3 v_3) = 5$ или $i^*(\Delta v_1 u_1 v_3) = 5$.

Если $u_3 \in I^*(\Delta h_3 u_2 h_2)$ (или $u_2 \in I^*(\Delta h_3 u_3 h_2)$) (см. рис. 2, (a)), то существует 3-int или 5-int подмножество множества P . Это можно доказать следующим образом. Если $u_2 \in H(v_2 h_3; v_3)$, то

$$i^*(\Delta v_2 u_2 h_2) = 3, \quad I^*(\Delta v_2 u_2 h_2) = \{u_1, u_3, h_3\}.$$

Рис. 1

Итак, имеем $u_2 \in H(v_2h_3; v_1)$. Если $u_2 \in H(v_1h_2; v_2)$, то

$$i^*(\{v_1, v_2, h_3, u_2, h_2\}) = 3, \quad I^*(\{v_1, v_2, h_3, u_2, h_2\}) = \{u_1, u_3, h_1\}.$$

Иначе имеем

$$i^*(\Delta v_1h_3u_2) = 3, \quad I^*(\Delta v_1h_3u_2) = \{h_1, u_3, h_2\}.$$

Итак, имеем $|V(I(P))| = 6$, как показано на рис. 2, (b). Свойство 2) доказано.

Рис. 2

3) Пусть $Q = P \setminus \{v_3\}$. Если $|V(Q)| = 3$ (или 5), то $i^*(Q) = 5$ (или 3). Итак, мы должны рассмотреть два случая: $|V(Q)| = 4$, $|V(Q)| = 6$.

Пусть $|V(Q)| = 4$; ясно, что $i^*(Q) = 4$. Если $u_2 \in H(v_1h_2; v_2)$, то имеем $V(Q) = \{v_1, v_2, u_2, h_2\}$ и

$$i^*(\Delta v_2u_2h_2) = 3, \quad I^*(\Delta v_2u_2h_2) = \{u_1, u_3, h_3\}.$$

Если $u_3 \in H(v_2h_3; v_1)$, то $V(Q) = \{v_1, v_2, h_3, u_3\}$ и

$$i^*(\Delta v_1h_3u_3) = 3, \quad I^*(\Delta v_1h_3u_3) = \{h_1, u_2, h_2\}.$$

В обоих случаях приходим к противоречию. Итак, $u_3 \in H(v_2h_3; v_3)$ и $u_2 \in H(v_1h_2; v_3)$ (см. рис. 3, (а)). Очевидно, что $u_2, u_3 \in H(u_1v_3; v_1)$, поскольку в противном случае $i^*(\Delta u_1v_2v_3) = 3$ или $i^*(\Delta v_1u_1v_3) = 3$. Аналогично получаем, что $u_2 \in H(v_2h_3; v_3)$ и $u_3 \in H(v_1h_2; v_3)$. Таким образом, не существует ни 3-int ни 5-int подмножества, и каждое ребро множества P является ребром типа 1 и типа 2. Например, для ребра v_2v_3 имеем

$$\begin{aligned} i^*(\Delta u_1v_2v_3) &= 1, & I^*(\Delta u_1v_2v_3) &= \{h_3\}, \\ i^*(\{u_1, v_2, v_3, u_2\}) &= 2, & I^*(\{u_1, v_2, v_3, u_2\}) &= \{h_3, u_3\}; \end{aligned}$$

для ребра v_1v_2 имеем

$$\begin{aligned} i^*(\Delta v_1v_2h_2) &= 1, & I^*(\Delta v_1v_2h_2) &= \{h_1\}, \\ i^*(\{v_1, v_2, h_3, h_2\}) &= 2, & I^*(\{v_1, v_2, h_3, h_2\}) &= \{h_1, u_1\}; \end{aligned}$$

для ребра v_1v_3 имеем

$$\begin{aligned} i^*(\Delta v_1h_1v_3) &= 1, & I^*(\Delta v_1h_1v_3) &= \{h_2\}, \\ i^*(\{v_1, h_1, u_3, v_3\}) &= 2, & I^*(\{v_1, h_1, u_3, v_3\}) &= \{h_2, u_2\}. \end{aligned}$$

Рис. 3. Дефицитное точечное множество $P(3, 6, 3)$

Осталось рассмотреть случай $|V(Q)| = 6$ с $i^*(Q) = 2$ (см. рис. 3, (b)). Тогда выполнено $u_3 \in H(v_1h_1; v_3)$, поскольку в противном случае $i^*(\Delta v_1u_3v_3) = 3$, а также $u_2 \in H(v_2u_1; v_3)$, поскольку в противном случае $i^*(\Delta u_2v_2v_3) = 3$. Таким образом, не существует ни 3-int ни 5-int подмножества, и легко видеть, что любое ребро множества P является ребром типа 1 и типа 2. Свойство 3) доказано.

ЛЕММА 2. Дефицитное точечное множество $P = P(3, 7, 3)$ имеет единственную конфигурацию, показанную на рис. 4, и выполняются следующие свойства:

- 1) каждый (x, y) -разделитель множества P является $(4, 2)$ -разделителем;
- 2) $|V(I(P))| = 6$;
- 3) каждое ребро множества P является ребром типа 1 и типа 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 1.

В дальнейшем, нам понадобятся следующие леммы.

Рис. 4. Дефицитное точечное множество $P(3, 7, 3)$

ЛЕММА РЕДУКЦИИ [3]. Пусть P – плоское точечное множество, имеющее $m \geq 3$ вершин и $s \geq 0$ внутренних точек. Тогда существует вершина v_i множества P такая, что $P' = P \setminus \{v_i\}$ имеет m' вершин, s' внутренних точек и либо

(a) $m' = m - 1$ и $s' = s$,

либо

(b) $m' = m + t$ и $s' = s - t - 1$, где $t = 0, 1, 2, \dots, \lfloor s/m \rfloor$.

Для удобства в дальнейшем при доказательстве последующих лемм мы всегда будем предполагать, что всякий треугольник Δ с $i^*(\Delta) = 6$ или 7 является дефицитным точечным множеством и не будем рассматривать (x, y) -разделители, если $x, y = 3$ или 5, поскольку иначе мы получим некоторое 3-int или 5-int подмножество, что очевидным образом завершает доказательство. Напомним введенные ранее обозначения: $m = |V(P)|$, $s = |I(P)|$.

ЛЕММА 3. Если $m = 3$ и $s = 8, 9$, то P имеет 3-int или 5-int подмножество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы проведем доказательство для случая $s = 8$ (для случая $s = 9$, доказательство аналогично).

Если P имеет $(5, 2)$ - или $(4, 3)$ -разделитель, то мы получим подмножество $Q \subset P$ с $i^*(Q) = 3$ или 5. Итак, осталось рассмотреть (x, y) -разделители типа $(7, 0)$ или $(6, 1)$.

Случай 1. Множество P имеет $(7, 0)$ -разделитель. Предположим, что $V(P) = \{uv_2, v_3\}$, v_1 – $(7, 0)$ -разделитель и $i^*(\Delta v_1 v_2 v_3) = 7$, как показано на рис. 5, (а), где $\Delta v_1 v_2 v_3$ – дефицитное точечное множество $P(3, 7, 3)$. Если $q \in H(uv_1; v_3)$, то $i^*(\Delta uv_2 q) = 5$. В противном случае $i^*(\Delta upv_3) = 3$.

Случай 2. Каждый (x, y) -разделитель множества P является $(6, 1)$ -разделителем. Пусть h_1 – $(6, 1)$ -разделитель. Предположим, что

$$i^*(\Delta v_1 h_1 v_3) = 1, \quad I^*(\Delta v_1 h_1 v_3) = \{h_2\},$$

где $h_2 \in H(v_2 h_1; v_3)$. Если $i^*(\Delta v_1 v_2 h_2) = 6$, то $i^*(\Delta h_1 v_2 h_2) = 5$. Итак, можно предположить, что $i^*(\Delta v_2 v_3 h_2) = 6$. Следовательно, $i^*(\Delta h_1 v_2 v_3 \cap \Delta v_2 v_3 h_2) = 6$, и оба множества $\Delta h_1 v_2 v_3$ и $\Delta v_2 v_3 h_2$ являются дефицитными точечными множествами $P(3, 6, 3)$.

Пусть $h_3 \in I^*(\Delta h_1 v_2 v_3 \cap \Delta v_2 v_3 h_2)$ такое, что $I^*(\Delta h_3 v_2 v_3) = \emptyset$, где h_3 – $(4, 1)$ -разделитель множества $\Delta h_1 v_2 v_3$ ($\Delta v_2 v_3 h_2$) и $(6, 1)$ -разделитель множества $\Delta v_1 v_2 v_3$.

Рис. 5

Тогда $h_3 \notin C(v_1; h_1, h_2)$, поскольку в противном случае h_3 не будет $(6, 1)$ -разделителем множества $\triangle v_1 v_2 v_3$, что приводит к противоречию. Без ограничения общности предположим, что $h_3 \in H(v_1 h_1; v_2)$ (см. рис. 5, (b)). Если $i^*(\triangle v_2 h_3 h_2) = 4$, то $i^*(\{v_1, v_2, h_3, h_2\}) = 5$. Итак, имеем

$$i^*(\triangle v_2 h_3 h_2) = 1, \quad I^*(\triangle v_2 h_3 h_2) = \{u_1\},$$

где $u_1 \in H(v_3 h_3; v_1) \cap H(v_1 h_3; v_2)$. Пусть $u_2 \in I^*(\triangle h_3 v_3 h_2)$, так что $I^*(\triangle u_2 h_3 v_3) = \emptyset$, где u_2 – $(2, 1)$ -разделитель множества $\triangle h_3 v_3 h_2$.

(1) Пусть $u_2 \in H(v_1 h_2; v_2)$. Тогда предположим, что $i^*(\triangle h_3 u_2 h_2) = 1$; в противном случае имеем $i^*(\{v_1, h_3, u_2, h_2\}) = 3$. Если $u_2 \in H(v_2 h_3; v_3)$, то $i^*(\triangle v_2 u_2 h_2) = 3$. В противном случае имеем $i^*(\{v_1, v_2, h_3, u_2, h_2\}) = 3$.

Рис. 6. Либо четыре точки h_3, w_1, w_2, h_2 , либо четыре точки w_1, w_2, u_2, h_2 не находятся в выпуклом положении

(2) Пусть $u_2 \in H(v_1 h_2; v_3)$. Предположим, что $|V(\{h_3, v_2, v_3, u_2\})| = 4$. Если $i^*(\triangle h_3 u_2 h_2) = 1$, то $i^*(\triangle v_2 u_2 h_2) = 3$. Итак, имеем

$$\begin{aligned} i^*(\triangle h_3 u_2 h_2) &= 2, & I^*(\triangle h_3 u_2 h_2) &= \{w_1, w_2\}, \\ i^*(\triangle h_2 u_2 v_3) &= 1, & I^*(\triangle h_2 u_2 v_3) &= \{w\}, \end{aligned}$$

где $w \in H(v_1u_2; v_3)$. Тогда и $\Delta v_1h_3v_3$, и $\Delta v_1v_2u_2$ являются дефицитными точечными множествами $P(3, 6, 3)$. Но либо четырехточечное множество h_3, w_1, w_2, h_2 , либо четырехточечное множество w_1, w_2, u_2, h_2 не находятся в выпуклом положении, как показано на рис. 6, что нарушает свойство 2) леммы 1.

Предположим, что $|V(\{h_3, v_2, v_3, u_2\})| \neq 4$ (см. рис. 7, (а)). Если $i^*(\Delta h_3u_2h_2) = 2$, то $i^*(\{v_2, h_3, u_2, h_2\}) = 3$. Итак предположим, что $i^*(\Delta h_3u_2h_2) = 1$. Если две внутренних точки множества $\Delta u_2v_3h_2$ лежат в $H(v_1u_2; v_2)$ (или $H(v_1u_2; v_3)$), то $i^*(\Delta v_1h_3u_2) = 5$ (или 3). В противном случае имеем $i^*(\{v_1, v_2, h_3, u_2\}) = 5$.

Рис. 7

ЛЕММА 4. Если $m \geq 4$ и $s = 8, 9$, то P имеет 3-int или 5-int подмножество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство для случая $s = 8$ (для случая $s = 9$ доказательство аналогично).

Пусть $V(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, где $m = |V(P)|$. Произведем триангуляцию множества P , соединив вершину оболочки v_1 с каждой из других вершин оболочки, и таким образом получим $m - 2$ треугольника. Если существует треугольник Δ такой, что $i^*(\Delta) = 3$, или 5, или 8, то наше утверждение доказано. Если для любого треугольника Δ имеем $i^*(\Delta) \leq 2$, то легко проверить, что можно получить некоторое 3-int или 5-int подмножество множества P , соединяя смежные треугольники в единое множество. Если для одного треугольника $i^*(\Delta v_1v_iv_{i+1}) = 6$ или 7, то применяя свойство 3) леммы 1 или свойство 3) леммы 2, мы приходим к заключению, что P имеет 3-int или 5-int подмножество. Например, предположим, что $i^*(\Delta v_1v_iv_{i+1}) = 7$ и $i^*(\Delta v_1v_jv_{j+1}) = 1$. Тогда в силу свойства 3) леммы 2 ребро v_1v_{i+1} имеет тип 2 в $\Delta v_1v_iv_{i+1}$, т.е. существует подмножество Q с ребром v_1v_{i+1} таким, что $i^*(Q) = 2$, как показано в затененной области на рис. 7, (b), и $i^*(Q \cup \{v_j, v_{j+1}\}) = 3$. Итак, мы можем предположить, что существует, по крайней мере, один треугольник Δ с $i^*(\Delta) = 4$. Если каждый из других оставшихся треугольников содержит самое большее 2 внутренних точки множества P , то легко доказать, что P имеет 3-int или 5-int подмножество. Итак, достаточно рассмотреть случай, когда существуют два треугольника, каждый из которых содержит 4 внутренних точки множества P .

Случай 1. Два смежных треугольника. Предположим, что

$$i^*(\Delta v_1v_2v_3) = i^*(\Delta v_1v_3v_4) = 4$$

(см. рис. 8, (а)). Пусть $h_1 \in I^*(\Delta v_1 v_2 v_3)$, так что $I^*(\Delta h_1 v_1 v_2) = \emptyset$, и $h_2 \in I^*(\Delta v_1 v_3 v_4)$, так что $I^*(\Delta v_1 h_2 v_4) = \emptyset$, где h_1 – $(2, 1)$ -разделитель множества $\Delta v_1 v_2 v_3$, и h_2 – $(2, 1)$ -разделитель множества $\Delta v_1 v_3 v_4$. Предположим, что

$$\begin{aligned} i^*(\Delta v_1 h_1 v_3) &= 2, & I^*(\Delta v_1 h_1 v_3) &= \{w_1, w_2\} \\ i^*(\Delta v_1 v_3 h_2) &= 2, & I^*(\Delta v_1 v_3 h_2) &= \{w_3, w_4\}; \end{aligned}$$

в противном случае существует 5-int подмножество множества P . Тогда

$$\begin{aligned} i^*(\Delta v_2 v_3 h_1) &= 1, & I^*(\Delta v_2 v_3 h_1) &= \{u_1\}, \\ i^*(\Delta h_2 v_3 v_4) &= 1, & I^*(\Delta h_2 v_3 v_4) &= \{u_2\}, \end{aligned}$$

за исключением

$$\begin{aligned} |V(\{v_1, w_1, w_2, v_3\})| &= |V(\{v_1, v_3, w_4, w_3\})| \\ &= |V(\{v_1, h_1, u_1, v_3\})| = |V(\{v_1, v_3, u_2, h_2\})| = 4, \end{aligned}$$

поскольку иначе P имеет 3-int или 5-int подмножество. Разобьем выпуклый четырехугольник $v_1 v_2 v_3 v_4$ на два треугольника, проведя диагональ $v_2 v_4$. Если для какого-нибудь из двух треугольников выполняется $i^*(\Delta v_1 v_2 v_4) = 0, 1, 2$ или 3, или $i^*(\Delta v_2 v_3 v_4) = 0, 1, 2$ или 3, то мы приходим к предыдущему случаю и наше утверждение доказано. Итак, предположим, что $i^*(\Delta v_1 v_2 v_4) = i^*(\Delta v_2 v_3 v_4) = 4$.

Рис. 8. Два треугольника, каждый из которых содержит 4 внутренних точки множества P

Если $i^*(\Delta v_1 v_2 v_3 \cap \Delta v_1 v_2 v_4) \geq 3$ (случай $i^*(\Delta v_1 v_2 v_3 \cap \Delta v_1 v_2 v_4) \leq 1$ рассматривается аналогично), то h_1 – $(2, 1)$ -разделитель множества $\Delta v_1 v_2 v_4$ и, следовательно, $i^*(\Delta h_1 v_3 v_4) = 5$ или $i^*(\{h_1, v_2, v_3, v_4\}) = 5$.

Теперь предположим, что $i^*(\Delta v_1 v_2 v_3 \cap \Delta v_1 v_2 v_4) = 2$. Если $h_1 \in H(v_2 v_4; v_1)$, то $i^*(\Delta h_1 v_3 v_4) = 5$ или $i^*(\{h_1, v_2, v_3, v_4\}) = 5$. В противном случае $i^*(\Delta w_1 v_2 v_3) = 3$.

Случай 2. Два несмежных треугольника. Предположим, что

$$i^*(\Delta v_1 v_i v_{i+1}) = i^*(\Delta v_1 v_j v_{j+1}) = 4.$$

Этот случай аналогичен случаю 1); мы пронумеруем восемь внутренних точек, как показано на рис. 8, (b).

Соединим v_i и v_j . Если $i^*(\Delta v_1 v_i v_{i+1} \cap \Delta v_1 v_i v_j) = 4$, то мы имеем случай 1). Если $i^*(\Delta v_1 v_i v_{i+1} \cap \Delta v_1 v_i v_j) = 3$ или 1, то ясно, что существует 3-int или 5-int подмножество множества P . Теперь предположим, что $i^*(\Delta v_1 v_i v_{i+1} \cap \Delta v_1 v_i v_j) = 2$. Если $h_1 \in H(v_i v_j; v_1)$, и если $w_1 \in H(h_1 v_j; v_{i+1})$, то $i^*(\{h_1, v_i, v_{i+1}, v_j\}) = 3$; а если $w_1 \in H(h_1 v_j; v_1)$, то $i^*(\{v_1, h_1, v_j, v_{i+1}\}) = 5$. В противном случае $i^*(\Delta w_1 v_i v_{i+1}) = 3$. Наконец, предположим, что $i^*(\Delta v_1 v_i v_{i+1} \cap \Delta v_1 v_i v_j) = 0$. Если $w_1 \in H(h_1 v_j; v_1)$, то $i^*(\Delta w_1 v_i v_{i+1}) = 3$. Иначе имеем $i^*(\{v_1, h_1, w_2, v_j, v_{i+1}\}) = 5$.

ЛЕММА 5. Если $m \geq 3$ и $s = 10$, то P имеет 3-int или 5-int подмножество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m = 3, 4$ или 5, то доказательство аналогично случаю $s = 8$. Если $m \geq 6$ и $s = 10$, то из леммы редукции следует, что существует собственное подмножество P' , к которому можно применить процедуру индукции и затем получить следующий результат: если выполняется пункт (а) леммы редукции, то мы имеем собственное подмножество $P' \subset P$ с $i^*(P') = 9$, а если выполняется пункт (b) леммы редукции, то мы имеем собственное подмножество $P' \subset P$ с $i^*(P') = 10 - \lfloor 10/m \rfloor - 1 \geq 8$.

ЛЕММА 6. Если $m \geq 3$ и $s \geq 11$, то P имеет 3-int или 5-int подмножество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $s = 11$. Если $m = 3$, то доказательство аналогично предыдущему. При $m \geq 4$ применим лемму редукции и процедуру индукции, как и раньше. Для случая $s = 12$ доказательство аналогично доказательству в случае $s = 11$. Наконец, если $m \geq 3$ и $s \geq 13$, то мы имеем $s - \lfloor s/m \rfloor - 1 \geq 8$ и, таким образом, результат получается по индукции из леммы редукции.

3. Основной результат и его доказательство. Докажем теперь основной результат.

ТЕОРЕМА. Число $h(3) = 8$, т.е. 8 является наименьшим целым числом таким, что любое плоское точечное множество P с $|I(P)| \geq 8$ имеет подмножество $Q \subset P$ с $i^*(Q) = 3$ или 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из существования множества $P(3, 7, 3)$ следует, что $h(3) \geq 8$. Поэтому, для доказательства равенства $h(3) = 8$ достаточно доказать, что $h(3) \leq 8$. По определению $h(3)$ мы должны только доказать, что для любого точечного множества P с $|I(P)| \geq 8$ всегда существует некоторое 3-int или 5-int подмножество $Q \subset P$. Объединяя леммы 3–6, мы получаем $h(3) \leq 8$, что и требовалось доказать и, следовательно, $h(3) = 8$. Основной результат данной работы доказан.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Erdős, G. Szekeres, “A combinatorial problem in geometry”, *Compositio Math.*, **2** (1935), 463–470.
- [2] J. Horton, “Sets with no empty 7-gons”, *Canad. Math. Bull.*, **26**:4 (1983), 482–484.
- [3] D. Avis, K. Hosono, M. Urabe, “On the existence of a point subset with a specified number of interior points”, *Discrete Math.*, **241**:1–3 (2001), 33–40.
- [4] T. Fevens, “A note on point subsets with a specified number of interior points”, *Discrete and Computational Geometry*, Lecture Notes in Comput. Sci., **2866**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 152–158.

- [5] Хианглин Вей, Рен Динг, “О плоских точечных подмножествах с заданным числом внутренних точек”, *Матем. заметки*, **83**:5 (2008), 752–756.
- [6] T. Bisztriczky, K. Hosono, G. Károlyi, M. Urabe, “Constructions from empty polygons”, *Period. Math. Hungar.*, **49**:2 (2004), 1–8.
- [7] K. Hosono, “On the existence of a convex point subset containing one triangle in the plane”, *Discrete Math.*, **305**:1–3 (2005), 201–218.
- [8] D. Avis, K. Hosono, M. Urabe, “On the existence of a point subset with 4 or 5 interior points”, *Discrete and Computational Geometry* (Tokyo, 1998), Lecture Notes in Comput. Sci., **1763**, Springer-Verlag, Berlin, 2000, 57–64.

Хианглин Вей

Hebei University of Science and Technology, KHP

E-mail: wxlhebtu@126.com

Поступило

30.12.2007

Венхуа Лан

Hebei Polytechnic University, KHP

E-mail: lanandshuo@126.com

Рен Динг

Hebei Polytechnic University, KHP

E-mail: rending@hebtu.edu.cn