Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Иванов, В. И. Иванов, Теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 1, 148–151

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8799>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 18:07:02

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом

А. В. Иванов, В. И. Иванов

Введение. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ – d -мерное евклидово пространство со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ и модулем $|x| = \sqrt{(x, x)}$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_i \geq -1/2$, $i = 1, \dots, d$, $\sigma(\lambda) = \lambda_1 + \dots + \lambda_d$,

$$v_\lambda(x) = \frac{1}{2^{\sigma(\lambda)+d} \prod_{i=1}^d \Gamma(\lambda_i + 1)} \prod_{i=1}^d |x_i|^{2\lambda_i+1}$$

– степенной вес в $\mathbb{R}^d$, $d\mu_\lambda(x) = v_\lambda(x)dx$, $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ – пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 d\mu_\lambda(x) \right)^{1/2} < \infty.$$

При $\lambda_i = -1/2$, $i = 1, \dots, d$, индекс λ в обозначениях будем опускать.

Пространство $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ гильбертово со скалярным произведением

$$(f, g)_\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \bar{g}(x) d\mu_\lambda(x).$$

Пусть $E_R(f)_2$ – величина наилучшего приближения функции f целыми функциями экспоненциального сферического типа $R > 0$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$,

$$\omega(\delta, f)_2 = \sup_{|t| \leq \delta} \|f(x+t) - f(x)\|_2$$

– ее модуль непрерывности, q_α – наименьший положительный нуль функции Бесселя $J_\alpha(x)$ порядка $\alpha \geq -1/2$. Хорошо известно точное неравенство Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$

$$E_R(f)_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \omega\left(\frac{2q_{d/2-1}}{R}, f\right)_2. \quad (1)$$

Оно было доказано Ибрагимовым, Насибовым [1] для $d = 1$, Поповым [2], [3] для $d = 1, 2, 3$, Бабенко [4] и Московским [5] для всех d . Неравенство (1) можно также вывести из общей теоремы Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{T}^d)$, доказанной Юдиным [6]. Аргумент в модуле непрерывности является наименьшим, при котором справедливо (1). Это было доказано Черных [7] для $d = 1$, Московским [5] для $d = 3$ и Горбачевым [8] для всех d . В весовых пространствах $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ точные неравенства Джексона известны только при

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00564).

$d = 1$. Для случая четных функций они были доказаны Бабенко [4] и Московским [5], а в общем случае – Чертовой [9]. Наша цель – получить аналог неравенства (1) для пространства $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ при $d > 1$. Гипотезы о виде основных результатов были предложены В. И. Ивановым, а доказательства проведены А. В. Ивановым.

1. Гармонический анализ в пространстве $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$. Пусть

$$j_\alpha(z) = 2^\alpha \frac{\Gamma(\alpha + 1) J_\alpha(z)}{z^\alpha}$$

– нормированная функция Бесселя. Гармонический анализ в пространстве $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ осуществляется с помощью операторов и преобразований Данкля. Дифференциально-разностные операторы Данкля имеют вид [10], [11]

$$D_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \left(\lambda_j + \frac{1}{2} \right) \frac{f(x) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_d)}{x_j}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Система

$$D_j f(x) = i y_j f(x), \quad f(0) = 1$$

имеет единственное решение, определяющее обобщенную систему экспонент

$$e_\lambda(x, y) = \prod_{j=1}^d e_{\lambda_j}(y_j x_j),$$

где

$$e_{\lambda_j}(y_j x_j) = j_{\lambda_j}(y_j x_j) - i j'_{\lambda_j}(y_j x_j), \quad j = 1, \dots, d.$$

Для них выполнены свойства

$$\begin{aligned} e_\lambda(x, y) &= e_\lambda(y, x), \quad e_\lambda(0, y) = 1, \quad |e_\lambda(x, y)| \leq 1, \quad e_\lambda(-x, y) = \overline{e_\lambda(x, y)}, \\ |e_\lambda(z, y)| &\leq e^{|y| |\operatorname{Im} z|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad z \in \mathbb{C}^d, \quad \operatorname{Im} z = (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_d). \end{aligned}$$

Они являются собственными функциями лапласиана Данкля

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda f(x) &= \sum_{j=1}^d D_j^2 f(x) \\ &= \sum_{j=1}^d \left\{ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j^2} + \frac{(2\lambda_j + 1)}{x_j} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \frac{f(x) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_d)}{2x_j} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Имеем

$$-\Delta_\lambda e_\lambda(x, y) = |y|^2 e_\lambda(x, y).$$

Разложение функций из $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ осуществляется с помощью прямого и обратного преобразований Данкля [11], [12]

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{e_\lambda(y, x)} d\mu_\lambda(x), \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(y) e_\lambda(x, y) d\mu_\lambda(y).$$

При этом справедливо равенство Парсеваля

$$\|f\|_{2,\lambda} = \|\widehat{f}\|_{2,\lambda}.$$

Для $t \in \mathbb{R}^d$ определим оператор обобщенного сдвига

$$\tau_\lambda^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e_\lambda(t, y) \widehat{f}(y) e_\lambda(x, y) d\mu_\lambda(y). \quad (2)$$

Он действует из $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ в $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ и его норма равна 1. Если все $\lambda_i = -1/2$, то $\tau_\lambda^t f(x) = f(x + t)$.

ЛЕММА 1. Если $\lambda_i > -1/2$, $i = 1, \dots, d$, то для (2) справедливо интегральное представление

$$\tau_\lambda^t f(x) = \frac{c_\lambda}{2^d} \int \dots \int \sum_{\varepsilon \in E_2^d} \prod_{i=1}^d (1 + \varepsilon_i C_i) f(\varepsilon A) \prod_{i=1}^d (1 - \cos \theta_i) (\sin \theta_i)^{2\lambda_i} d\theta_1 \dots d\theta_d,$$

где $\varepsilon A = (\varepsilon_1 A_1, \dots, \varepsilon_d A_d)$, $E_2 = \{1, -1\}$, $c_\lambda = c_{\lambda_1} \dots c_{\lambda_d}$,

$$c_{\lambda_i} = \frac{\Gamma(\lambda_i + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda_i + 1/2)}, \quad A_i = \sqrt{x_i^2 + t^2 - 2xt \cos \theta_i}, \quad C_i = \frac{x_i + t_i}{A_i},$$

причем считаем $C_i = 0$, если $x_i = t_i = 0$.

Одномерный случай леммы 1 см. в [9], [13]. Многомерный случай получается итерацией одномерного.

2. Теорема Джексона в $L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$. Пусть $R > 0$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq R\}$, $E_{2,\lambda}^R$ – множество целых функций $g \in L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ экспоненциального сферического типа R , для которых носитель $\text{supp } \widehat{g} \subset B_R$,

$$E_R(f)_{2,\lambda} = \inf \{ \|f - g\|_{2,\lambda} : g \in E_{2,\lambda}^R \}$$

– величина наилучшего приближения функции $f \in L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$,

$$\omega_1(\delta, f)_{2,\lambda} = \sup_{|t| \leq \delta} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (\tau_\lambda^t |f(y) - f(x)|^2)_{|y=x} d\mu_\lambda(x) \right)^{1/2}, \quad \delta > 0,$$

– ее модуль непрерывности.

Имеем

$$E_R^2(f)_{2,\lambda} = \int_{|y| \geq R} |\widehat{f}(y)|^2 d\mu_\lambda(y),$$

$$\omega_1^2(\delta, f)_{2,\lambda} = 2 \sup_{|t| \leq \delta} \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \text{Re } e_\lambda(t, y)) |\widehat{f}(y)|^2 d\mu_\lambda(y).$$

Если все $\lambda_i = -1/2$, то $\omega_1(\delta, f)_{2,\lambda} = \omega(\delta, f)_2$.

ТЕОРЕМА 1. Если $\lambda_i \geq -1/2$, $i = 1, \dots, d$, то для любой $f \in L_{2,\lambda}(\mathbb{R}^d)$ справедливо точное неравенство

$$E_R(f)_{2,\lambda} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_1 \left(\frac{2q_{\sigma(\lambda)+d-1}}{R}, f \right)_{2,\lambda}. \quad (3)$$

Аргумент $2q_{\sigma(\lambda)+d-1}/R$ в модуле непрерывности наименьший, при котором справедливо (3).

Доказательство неравенства (3) основано на построении весовой функции $h(x)$, для которой выполнены свойства

- 1) $h(x) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} h(x) d\mu_\lambda(x) > 0$;
- 2) $\text{supp } h \subset B_{2\delta_R}$, $\delta_R = q_{\sigma(\lambda)+d-1}/R$;
- 3) $\widehat{h}(y) \leq 0$, $|y| \geq R$.

Следуя Юдину [6], рассмотрим задачу на собственные значения

$$-\Delta_\lambda^q u = \mu u, \quad u \in L_{2,\lambda}(B_{\delta_R}), \quad u|_{\partial B_{\delta_R}} = 0,$$

где ∂B_{δ_R} – граница шара B_{δ_R} ,

$$\Delta_\lambda^q u(x) = \sum_{j=1}^d \left\{ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} + \frac{(2\lambda_j + 1)}{x_j} \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right\}.$$

Как и в случае оператора Лапласа (все $\lambda_i = -1/2$), она имеет радиальные собственные функции. Если $u_1(x) = j_{\sigma(\lambda)+d-1}(R|x|)$ – собственная функция, отвечающая минимальному собственному значению $\mu_1 = R^2$, то

$$h(x) = - \int_{\partial B_{\delta_R}} \tau_{\lambda}^t u_1(x) \frac{\partial u_1(t)}{\partial n} v_{\lambda}(t) dS(t),$$

где $\partial u_1 / \partial n$ – производная по внешней нормали к ∂B_{δ_R} .

Доказательство минимальности аргумента в модуле непрерывности следует подходу Горбачева [8] и использует следующую лемму.

ЛЕММА 2. Если $\lambda_i \geq -1/2$, $i = 1, \dots, d$, $x \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{C}$, то

$$\int_{\partial B_1} e_{\lambda}(zx, y) v_{\lambda}(y) dS(y) = j_{\sigma(\lambda)+d-1}(z|x|) \int_{\partial B_1} v_{\lambda}(y) dS(y).$$

В случае, когда все $\lambda_i = -1/2$, это равенство хорошо известно и часто используется в гармоническом анализе. Аналог леммы 2 справедлив и для более общего веса, связанного с конечной группой отражений в $\mathbb{R}^d$ [14].

Авторы благодарят Д. В. Горбачева за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. И. Ибрагимов, Ф. Г. Насибов, *Докл. АН СССР*, **194**:5 (1970), 1013–1016.
 [2] В. Ю. Попов, *Изв. вузов. Матем.*, 1972, №6, 65–73. [3] В. Ю. Попов, *Изв. вузов. Матем.*, 1981, №12, 67–78. [4] А. Г. Бабенко, Тр. ИММ УрО РАН, **5**, ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 1998, 183–198. [5] А. В. Московский, *Изв. ТулГУ. Сер. Матем., мех., информ.*, **3**:1 (1997), 44–70. [6] В. А. Юдин, *Матем. заметки*, **29**:2 (1981), 309–315. [7] V. V. Arestov, N. I. Chernykh, *Approximation and Function Spaces* (Gdan'sk, 1979), North-Holland, Amsterdam, 1981, 25–43. [8] Д. В. Горбачев, *Матем. заметки*, **68**:2 (2000), 179–187. [9] Д. В. Чертова, *Изв. ТулГУ. Сер. Естеств. науки*, 2009, №3, 100–116. [10] C. F. Dunkl, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **311**:1 (1989), 167–183. [11] M. Rösler, *Orthogonal Polynomials and Special Functions* (Leuven, 2002), Lecture Notes in Math., **1817**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 93–135. [12] M. F. E. de Jeu, *Invent. Math.*, **113**:1 (1993), 147–162. [13] M. Rösler, *Probability Measures on Groups and Related Structures, XI* (Oberwolfach, 1994), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995, 292–304. [14] Y. Xu, *Bull. London Math. Soc.*, **32**:4 (2000), 447–457.

А. В. Иванов

Тулский государственный университет
 E-mail: d_bringer@mail.ru

Поступило
 20.12.2009

В. И. Иванов

Тулский государственный университет
 E-mail: ivaleryi@mail.ru