Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Галиулин, С. Н. Михалёв, И. Х. Сабитов, Некоторые приложения формулы для объема октаэдра, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 1, 27–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm88>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:43:44

УДК 514.113.5

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОБЪЕМА ОКТАЭДРА

Р. В. Галиулин, С. Н. Михалёв, И. Х. Сабитов

Вводятся понятия комбинаторной, метрической и пространственной симметрий многогранника и в случае симметричных октаэдров приводятся явные виды канонических многочленов для объемов.

Библиография: 3 названия.

1. Введение. В [1] доказано, что для каждого многогранника P в $\mathbb{R}^3$ с треугольными гранями существует многочлен $Q(V)$ такой, что его коэффициенты определяются только комбинаторным строением P и полиномиально зависят от квадратов длин его ребер (с общим обозначением l^2), а объем многогранника является корнем этого многочлена. В [2] предлагается способ нахождения канонического (т.е. имеющего наименьшую возможную степень) многочлена для объема V октаэдра. Этот многочлен имеет вид

$$Q(V) = V^{16} + a_1(l^2)V^{14} + \dots + a_8(l^2). \quad (1)$$

Каждое слагаемое $a_i(l^2)V^{16-2i}$, $1 \leq i \leq 8$, многочлена (1) имеет одну и ту же размерность $|\text{см}|^{48}$, и поскольку в него, кроме объема, входят еще 12 переменных длин ребер, то количество мономов оказывается чрезвычайно большим (согласно оценке из [2] оно порядка 10^{10}), поэтому реально даже на мощном компьютере такой полином вычислен быть не может. С другой стороны, в некоторых частных случаях (например, когда имеется достаточно много равных ребер) вычисление этого многочлена оказывается вполне возможным. Такая ситуация имеет место, например, в кристаллографии, где работают с октаэдрами, имеющими некоторую симметрию.

В данной работе вводятся различные понятия симметрии многогранника, и для большинства симметричных октаэдров вычисляется канонический многочлен для его объема.

2. Три вида симметрии многогранников. Пусть дан некоторый симплицальный комплекс K с n вершинами. Мы скажем, что симплицальный комплекс K имеет *комбинаторную симметрию*, если существует автоморфизм множества его вершин, сохраняющий инцидентность вершин и ребер. Любой такой автоморфизм мы будем называть *комбинаторным преобразованием симметрии*. Очевидно, что комбинаторные преобразования симметрии комплекса K образуют группу относительно операции

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00867; работа второго и третьего авторов выполнена при поддержке фонда ИНТАС-РФФИ, грант № IR-97-01-71010.

композиции. Далее, пусть ребрам симплицеального комплекса K приписаны некоторые значения длин (с выполнением неравенства треугольника на гранях). Мы скажем, что полученный метрический симплицеальный комплекс обладает *метрической симметрией*, если существует комбинаторное преобразование симметрии, сохраняющее длины ребер. Если G_k – группа комбинаторной симметрии, G_m – группа метрической симметрии, то $G_m \subset G_k$. Пусть отображение $P: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ реализует метрический симплицеальный комплекс K в виде некоторого многогранника $P(K)$ в $\mathbb{R}^3$. Мы скажем, что комбинаторно симметричный симплицеальный комплекс K имеет реализацию в $\mathbb{R}^3$ в виде многогранника с *пространственной симметрией*, если существует движение (первого или второго рода), переводящее этот многогранник в себя.

Очевидно, что многогранник с пространственной симметрией является и комбинаторно, и метрически симметричным. Обратное, вообще говоря, неверно: реализация метрически симметричного симплицеального комплекса K в виде многогранника в $\mathbb{R}^3$ может не иметь никакой нетривиальной пространственной симметрии. Соответствующий пример строится так: рассмотрим выпуклый октаэдр P в $\mathbb{R}^3$ с плоским экватором, разделяющим P на две части P' и P'' , симметричные относительно плоскости экватора. Пусть P не имеет никакой другой пространственной симметрии. Рассмотрим теперь другой октаэдр P_1 , получаемый из P отражением относительно плоскости симметрии части P'' . Октаэдр P_1 , таким образом, совпадает с дважды покрытой частью P' исходного октаэдра P . Метрическая симметрия октаэдров P и P_1 одинакова, поскольку эти октаэдры изометричны (являются пространственными реализациями одного и того же метрического симплицеального комплекса), однако октаэдр P_1 не имеет никакой нетривиальной пространственной симметрии. Ниже мы покажем, что может существовать реализация, у которой группа пространственных симметрий нетривиальна, но меньше, чем группа метрической симметрии. Кроме того, можно сформулировать следующие нерешенные задачи.

1) Пусть метрически симметричный октаэдр допускает некоторую изометрическую реализацию в $\mathbb{R}^3$; *обязательно* ли найдется реализация без пространственной симметрии?

2) Существует ли метрически симметричный октаэдр, для которого никакая его изометрическая реализация в $\mathbb{R}^3$ не имеет пространственной симметрии?

3. Симметрии октаэдра. 1) *Комбинаторная симметрия.* Рассмотрим биективные отображения множества вершин октаэдра в себя такие, что сохраняется инцидентность вершин и ребер. Пусть вершины октаэдра пронумерованы от 1 до 6 как на рис. 1. Тогда любое такое отображение удобно рассматривать как некоторую перестановку

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 \end{pmatrix}$$

на множестве вершин. Очевидно, рассматриваемые отображения образуют группу G_k , изоморфную некоторой подгруппе группы перестановок S_6 . Оказывается, порядок G_k равен 48. В этом легко убедиться следующим образом. Любая перестановка $\sigma \in G_k$ должна сохранять также и неинцидентность вершин и ребер: если две вершины не соединены ребром, то их образы также не должны быть соединены ребром. Значит, каждая из пар вершин $(1, 6)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$ может перейти только в одну из пар $(1, 6)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$, причем разные пары переходят в разные пары; таким образом, имеется $6 = 3!$ вариантов для пар вершин. Кроме того, для каждой из трех пар вершин точки (i, j) могут перейти как в (k, l) , так и в (l, k) . Значит, внутри каждого из 6 случаев имеем еще $2^3 = 8$ вариантов. Всего, таким образом, в группе G_k получается не более $6 \cdot 8 = 48$ элементов.

Рис. 1

Простой проверкой легко убедиться, что все эти перестановки различны, лишних среди них нет, и порядок группы G_k , таким образом, действительно равен 48.

2) *Метрическая симметрия*. Требование, чтобы данный октаэдр обладал метрической симметрией G_m , является ограничением на его метрику: некоторые ребра должны иметь одинаковую длину. В частности, октаэдр, у которого все ребра различны, не имеет метрической симметрии (т.е. он обладает лишь тривиальной группой метрической симметрии). Для правильного октаэдра (все ребра которого равны между собой) группа метрической симметрии совпадает, очевидно, с группой G_k комбинаторной симметрии октаэдра.

3) *Пространственная симметрия*. Пусть теперь мы имеем некоторую конкретную реализацию октаэдра в $\mathbb{R}^3$. В случае, если у октаэдра имеется центр, (инверсионная) ось, или плоскость симметрии, мы говорим, что октаэдр имеет соответствующую пространственную симметрию. Принятые в кристаллографии обозначения элементов симметрии и соответствующих им преобразований симметрии приведены в таблице 1.

ТАБЛИЦА 1

элемент симметрии	преобразование симметрии	обозначение
ось симметрии 4-го порядка	поворот на $\pi/2$ вокруг оси	4
ось симметрии 3-го порядка	поворот на $2\pi/3$ вокруг оси	3
ось симметрии 2-го порядка	поворот на π вокруг оси	2
инверсионная ось симметрии 4-го порядка	композиция поворота на $\pi/2$ вокруг оси и инверсии относительно точки на оси	$\bar{4}$
инверсионная ось симметрии 3-го порядка	композиция поворота на $2\pi/3$ вокруг оси и инверсии относительно точки на оси	$\bar{3}$
центр симметрии	симметрия относительно центра	i
плоскость симметрии	отражение относительно плоскости	m

Различают *диагональные* и *координатные* оси симметрии. Ось симметрии называется *координатной* в том случае, когда она совпадает с одной из осей координат, и *диагональной*, если она является бисектриссой плоского угла между какими-то двумя осями координат. Аналогично, плоскости симметрии могут быть диагональными и координатными.

Очевидно, что любому пространственному преобразованию симметрии соответствует некоторый автоморфизм $\sigma \in G_k$; например, для элементов симметрии на рис. 1 получаем

$$\begin{aligned} 4_z &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}, & \bar{4}_z &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \\ 3_x &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, & \bar{3}_x &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \\ 2_z &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, & 2_{xy} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ m_x &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}, & m_{yx} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \\ i &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Группа G пространственной симметрии правильного октаэдра изоморфна группе G_k комбинаторной симметрии октаэдра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим изоморфизм $f: G \rightarrow G_k$. Для этого рассмотрим правильный октаэдр, стандартным образом расположенный в $\mathbb{R}^3$ (см. рис. 1). Всякое пространственное преобразование симметрии $s \in G$ по определению переводит октаэдр в себя, а значит, индуцирует некоторую перестановку $\sigma \in S_6$ множества вершин, причем $\sigma \in G_k \subset S_6$, т.е. сохраняется отношение инцидентности вершин и ребер. Положим $f(s) = \sigma$. Очевидно, что отображение f сохраняет операцию композиции. Докажем, что отображение f инъективно. Действительно, предположим, что два различных пространственных преобразования симметрии октаэдра $s_1, s_2 \in G$, $s_1 \neq s_2$, индуцируют одну и ту же перестановку $\sigma \in G_k$. Тогда $f(s_1^{-1} \cdot s_2) = f(s_1^{-1}) \cdot f(s_2) = \sigma^{-1} \cdot \sigma = e$, где $e \in S_6$ – тождественная перестановка, и пространственное преобразование $s_1^{-1} \cdot s_2$ оставляет неподвижными все 6 вершин октаэдра, среди которых, конечно, найдутся 4 точки, не лежащие на одной плоскости. А линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^3$, имеющее хотя бы 4 неподвижные точки, не лежащие на одной плоскости, является тождественным, поэтому тождественным преобразованием является и $s_1^{-1} \cdot s_2$, что невозможно для различных пространственных симметрий s_1 и s_2 октаэдра.

Построенное инъективное и сохраняющее групповую операцию отображение $f: G \rightarrow G_k$ является изоморфизмом, поскольку мощности множеств G и G_k совпадают: из кристаллографии известно (см. [3]), что группа пространственной симметрии правильного октаэдра имеет порядок 48, т.е. $|G| = |G_k| = 48$.

4. Многочлены для объемов метрически симметричных октаэдров. Как уже было сказано, количество мономов многочлена для объема (1) уменьшается в случае, если некоторые ребра октаэдра имеют одинаковую длину. Поэтому при вычислении многочлена для объема метрически симметричных октаэдров можно ожидать существенных упрощений.

Поступаем следующим образом. Перебираем все подгруппы группы G пространственных симметрий правильного октаэдра (полный список этих подгрупп позаимствован из кристаллографии, см. [3]). Для каждой подгруппы $G' \subset G$ берем соответствующую ей при построенном выше изоморфизме $f: G \rightarrow G_k$ группу $G'_k \subset G_k$ автоморфизмов на множестве вершин октаэдра. Полагаем группу G'_k группой метрической симметрии октаэдра. Выписываем соответствующее ограничение на метрику и вычисляем многочлен $Q(V)$ для объема соответствующего метрически симметричного октаэдра, используя предложенный в работе [2] способ.

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Построение многочлена $Q(V)$ для произвольного октаэдра основано на двух фактах (см. [2]). Во-первых, существует явная формула для вычисления квадрата объема октаэдра по длинам его ребер и диагоналей (в нашей задаче диагонали неизвестны). Во-вторых, для произвольной шестерки точек в $\mathbb{R}^3$ можно выписать некоторые полино-

миальные условия, которым удовлетворяют попарные расстояния между этими точками, т.е. длины ребер и диагоналей октаэдра не являются независимыми. Эти два обстоятельства позволили авторам работы [2] составить некоторую матрицу S порядка 8×8 , элементы которой являются многочленами от длин ребер октаэдра, такую, что квадрат объема соответствующего октаэдра является собственным значением этой матрицы, т.е. корнем собственного многочлена $Q(V)$ матрицы S . Многочлен $Q(V)$, старший коэффициент которого равен 1, имеет степень 8 и является минимальным по степени многочленом для объема октаэдра.

При вычислении многочленов $Q(V)$ для метрически симметричных октаэдров мы учитываем соответствующие равенства ребер еще в процессе формирования матрицы S и только после этого, уже для существенно упрощенной матрицы, вычисляем ее собственный многочлен, который и является минимальным многочленом для объема октаэдра с данной метрической симметрией.

ТАБЛИЦА 2

48	$m3m$ (полная группа пространственной симметрии)
24	$432, \bar{4}3m, m\bar{3}$
16	$4/mmm$
12	$23, \bar{3}m$
8	$422, 4mm, mmm, \bar{4}m2, \bar{4}2m, 4/m$
6	$312, 3m, \bar{3}$
4	$2/m, mm2, 222, 4, \bar{4}$
3	3
2	$i, 2, m$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Имеет смысл рассматривать только существенно различные подгруппы группы G и лишь для них вычислять многочлены. Имеется в виду следующее. Предположим, дан октаэдр в $\mathbb{R}^3$, имеющий некоторую пространственную симметрию, например, координатную ось симметрии 2-го порядка, и перпендикулярную ей координатную плоскость симметрии (группа $2|m$, см. рис. 2). Этой комбинаторной подгруппе $G_k^1 \subset G_k$ соответствует некоторая метрическая симметрия октаэдра. Но в качестве элементов симметрии можно выбрать другую координатную ось и перпендикулярную этой оси координатную плоскость симметрии (см. рис. 3). Группа $G_k^2 \subset G_k$ комбинаторной симметрии при этом будет изоморфной G_k^1 : $G_k^1 \cong G_k^2$. Метрическая же симметрия изменится; стало быть, изменится и формула для объема. Однако изменения формулы в этом случае сводятся, очевидно, к переобозначению переменных. С такой точки зрения, символ $2|m$ обозначает целый класс подгрупп группы $G_k \cong G$, приводящих к одинаковому с точностью до переобозначения переменных формулам. Изоморфные подгруппы G_k^1 и G_k^2 представлены наборами элементов симметрии одинаковых типов (координатная ось 2-го порядка и перпендикулярная ей координатная плоскость). Иначе говоря, во втором случае октаэдр можно расположить по-другому так, что элементы его симметрии будут теми же, что и в первом его расположении.

Наоборот, если мы выберем в качестве элементов симметрии перпендикулярные друг другу диагональную ось симметрии 2-го порядка и диагональную плоскость симметрии (рис. 4), то несмотря на то что группа $G_k^3 \subset G_k$ будет по-прежнему изоморфна группе G_k^1 : $G_k^1 \cong G_k^3$, порождающие их элементы симметрии имеют разный тип (диагональные и координатные соответственно). Формулы для объемов для случаев подгрупп

G_k^3 и G_k^1 отличаются существенно.

Перейдем теперь к перечислению подгрупп группы G с использованием принятых в кристаллографии обозначений. Как правило, символы, фигурирующие в обозначении подгруппы, соответствуют ее образующим. Для каждой подгруппы на чертеже изображены элементы симметрии, соответствующие ее образующим; для большинства подгрупп выписан полученный многочлен для объема соответствующего метрически симметричного октаэдра.

По теореме Лагранжа порядки подгрупп группы G пространственной симметрии октаэдра могут быть следующими: 24, 16, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1. В таблице 2 представлены все различные подгруппы группы G (см. [3]).

Для экономии места мы в простых случаях вместо рисунка даем его словесное описание со ссылкой на следующую модель октаэдра (рис. 5).

Рис. 5

Начнем со случая, когда группа метрической симметрии совпадает со всей группой G_k комбинаторной симметрии, т.е. рассмотрим подгруппу $m3m$. В этом случае метрическая симметрия максимальна: все ребра октаэдра равны между собой, т.е.

$$l_{12} = l_{13} = l_{14} = l_{15} = l_{23} = l_{34} = l_{45} = l_{52} = l_{62} = l_{63} = l_{64} = l_{65} = a.$$

Тогда многочлен $Q(v)$ для объема имеет вид

$$Q(v) = v^8 - 8A^3v^7,$$

причем выражение для положительного корня уравнения $Q(v) = 0$ представляет собой известную формулу для объема правильного октаэдра.

Здесь и далее $v = 36V^2$, где V – объем октаэдра. Кроме того, мы будем придерживаться следующего соглашения: если длина некоторого ребра обозначена строчной латинской буквой, то квадрат длины этого ребра обозначается соответствующей заглавной буквой; так например, здесь $A = a^2$.

Переходим к подгруппам с меньшим числом элементов.

С точностью до изоморфизма в G имеется 3 подгруппы 24-го порядка: 432 , $\bar{4}3m$ и $m\bar{3}$. Оказывается, что и в каждом из этих случаев метрическая симметрия максимальна (все ребра равны между собой), поэтому одинаковыми будут и формулы для объемов. Таким образом, абстрактный октаэдр, группой метрической симметрии которого является одна из групп 24-го порядка (432 , $\bar{4}3m$ или $m\bar{3}$), автоматически имеет и большую метрическую симметрию, а именно, группой его метрической симметрии является вся группа $m\bar{3}m$. Тем же свойством обладают и октаэдры, имеющие в качестве групп метрической симметрии группы 23 и 312 (см. ниже случаи 6) и 14). Случай подгруппы 312 интересен по следующим причинам. Метрическая симметрия октаэдра по-прежнему максимальна – все ребра равны между собой. Но, оказывается, в $\mathbb{R}^3$ существует изометрическая реализация абстрактного октаэдра со всеми равными ребрами такая, что группой пространственной симметрии получаемого многогранника является в точности группа 312. Такой реализацией является восьмикратно покрытый равносторонний треугольник. Легко убедиться, что эта реализация обладает требуемыми свойствами.

Итак, приступаем к перечислению неизоморфных подгрупп группы $m\bar{3}m$.

2) 432 – в этом случае образующими¹ являются ось симметрии 4-го порядка (проходящая через вершины 1 и 6) и ось симметрии 3-го порядка (проходящая через центры граней 134 и 256), а метрическая симметрия максимальна:

$$l_{12} = l_{13} = l_{14} = l_{15} = l_{23} = l_{34} = l_{45} = l_{52} = l_{62} = l_{63} = l_{64} = l_{65} = a.$$

Многочлен для объема имеет следующий вид:

$$Q(v) = v^8 - 8A^3v^7.$$

В случаях 3) и 4) (и некоторых других, см. далее) метрическая симметрия также оказывается максимальной, поэтому многочлен $Q(V)$ получается такой же как в случае 2) (подгруппа 432)

3) $\bar{4}3m$ – образующими являются инверсионная ось симметрии 4-го порядка (проходящая через вершины 1 и 6) и ось симметрии 3-го порядка (проходящая через центры граней 134 и 256),

$$Q(v) = v^8 - 8A^3v^7.$$

4) $m\bar{3}$ – в этом случае см. рис. 6 и

$$Q(v) = v^8 - 8A^3v^7.$$

5) $4/m\bar{3}m$ – с точностью до изоморфизма это единственная подгруппа 16-го порядка. В этом случае см. рис. 7 и многочлен для объема октаэдра с такой группой симметрии имеет следующее выражение:

$$Q(v) = v^8 + (8B^3 - 16B^2A)v^7.$$

В группе G имеется две неизоморфные подгруппы 12-го порядка: 23 и $\bar{3}m$.

6) 23 – образующими являются ось симметрии 2-го порядка (проходящая через вершины 3 и 5) и ось симметрии 3-го порядка (проходящая через центры граней 134 и 256),

¹Здесь и далее мы позволяем себе некоторую вольность речи: на самом деле образующими групп преобразований являются, конечно, не сами геометрические элементы симметрии (оси и плоскости), а преобразования симметрии относительно этих элементов (вращения и отражения).

Рис. 6

Рис. 7

а метрическая симметрия максимальна; следовательно, многочлен $Q(V)$ такой же как в случае 2) (подгруппа 432):

$$Q(v) = v^8 - 8A^3v^7.$$

7) $\bar{3}m$ – в этом случае см. рис. 8 и

$$Q(v) = v^8 + (4A^3 - 12CA^2)v^7.$$

В G имеется 6 различных подгрупп 8-го порядка: 422 , $4mm$, mmm , $\bar{4}m2$, $\bar{4}2m$, $4/m$.

Рис. 8

Рис. 9

8) 422 – в этом случае образующими являются ось симметрии 4-го порядка (проходящая через вершины 1 и 6) и диагональная ось симметрии 2-го порядка (проходящая через середины ребер 23 и 45),

$$l_{12} = l_{13} = l_{14} = l_{15} = l_{62} = l_{63} = l_{64} = l_{65} = a, \quad l_{23} = l_{34} = l_{45} = l_{52} = b$$

(в этом случае октаэдр автоматически обладает и большей группой метрической симметрии, а именно, $4/m\bar{m}m$). Многочлен для объема имеет следующий вид:

$$Q(v) = v^8 + (8B^3 - 16B^2A)v^7.$$

9) $4|m$ – этот случай аналогично предыдущему также сводится к случаю $4/m\bar{m}m$ (см. рис. 9) и

$$Q(v) = v^8 + (8B^3 - 16B^2A)v^7.$$

10) $4mm$ – в этом случае см. рис. 10 и

$$Q(v) = v^8 + (-8AC^2 + 8C^3 - 8BC^2)v^7 + (16B^2C^4 - 32C^4BA + 16C^4A^2)v^6.$$

Рис. 10

Рис. 11

11) $\bar{4}m2$ – в этом случае см. рис. 11 и

$$\begin{aligned} Q(v) = & v^8 + (-16CBA - 8BC^2 + 8B^3 - 8BA^2 + 8CA^2 \\ & + 8CB^2 + 8C^3 - 8B^2A - 8AC^2 + 8A^3)v^7 \\ & + (128B^3CA^2 - 64BC^3A^2 - 16A^6 - 192BA^4C + 128A^3B^2C \\ & + 64A^3C^3 - 240A^4B^2 + 96A^5B - 96A^4C^2 + 64A^5C + 128BA^3C^2 \\ & + 320A^3B^3 - 16B^6 - 16B^2C^4 + 64B^3C^3 - 16C^4A^2 + 64CB^5 \\ & - 240A^2B^4 + 32C^4BA - 192CB^4A - 64C^3AB^2 + 128C^2B^3A \\ & - 96B^4C^2 - 64B^2C^2A^2 + 96AB^5)v^6. \end{aligned}$$

Рис. 12

Рис. 13

Случай подгруппы mmm имеет два подслучая.

12а) mmm – образующие соответствуют трем координатным плоскостям (см. рис. 12) и

$$Q(v) = v^8 + (-8B^2A + 8A^3 + 8B^3 - 8AC^2 - 8CA^2 + 8C^3 + 16CBA - 8BA^2 - 8CB^2 - 8BC^2)v^7.$$

12б) mmm – образующие соответствуют двум диагональным и одной координатной плоскостям симметрии (см. рис. 13) и

$$Q(v) = v^8 + (-16CBA + 4BC^2 + 4CB^2)v^7.$$

13) $\bar{4}2m$ – в этом случае образующими являются инверсионная ось симметрии 4-го порядка (проходящая через вершины 1 и 6) и координатная ось симметрии 2-го порядка (проходящая через вершины 3 и 5), а метрическая симметрия и многочлен $Q(V)$ такие же, как в случае 5) (подгруппа $4|mmm$).

Переходим к подгруппам порядка 6 (подгруппы 312 , $3m$, $\bar{3}$).

14) 312 – в этом случае образующими являются ось симметрии 3-го порядка (проходящая через центры граней 134 и 256) и диагональная ось симметрии 2-го порядка (проходящая через середины ребер 34 и 25); метрическая симметрия максимальна; следовательно, многочлен $Q(V)$ такой же, как в случае 2) (подгруппа 432):

$$Q(v) = v^8 - 8A^3v^7.$$

15) $\bar{3}$ – в этом случае образующей является инверсионная ось симметрии 3-го порядка (проходящая через центры граней 134 и 256), а метрическая симметрия и, следовательно, многочлен $Q(V)$ такой же, как в случае 7) (подгруппа $\bar{3}m$):

$$Q(v) = v^8 + (4A^3 - 12CA^2)v^7.$$

Рис. 14

16) $3m$ – этот случай интересен тем, что, с одной стороны, все коэффициенты полинома $Q(v)$ оказываются ненулевыми, а, с другой стороны, этот полином разлагается на множители; см. рис. 14 и

$$Q(v) = \frac{1}{65536} (16v^2 + 24CB^2v + 8C^3v - 144CBAv + 24C^2Bv - 24AC^2v + 8B^3v - 24AB^2v + B^6 - 36BC^3A^2 + C^6 - 3CB^5 - 36B^3CA^2 - 2B^3C^3 + 18CB^4A - 12C^3AB^2 + 3B^2C^4 + 18C^4BA + 54B^2C^2A^2 + 9C^4A^2 - 12C^2B^3A + 3B^4C^2 + 9A^2B^4 - 3C^5B - 6AC^5 - 6AB^5) \times (16v^2 - 8CB^2v + 8C^3v + 48CBAv - 8C^2Bv - 24AC^2v + 8B^3v - 24AB^2v + B^6 - 36BC^3A^2 + C^6 - 3CB^5 - 36B^3CA^2 - 2B^3C^3 + 18CB^4A - 12C^3AB^2 + 3B^2C^4 + 18C^4BA + 54B^2C^2A^2 + 9C^4A^2 - 12C^2B^3A + 3B^4C^2 + 9A^2B^4 - 3C^5B - 6AC^5 - 6AB^5)^3.$$

Подгруппы 4-го порядка имеют следующие обозначения: $2/m$, $mm2$, 222 , 4 , $\bar{4}$. При рассмотрении первых трех из них будем выделять два подслучая.

17a) $2|m$ – образующим соответствуют координатная ось симметрии и диагональная плоскость симметрии (см. рис. 15) и

$$Q(v) = v^8 + (4C^2D - 4CB^2 + 8CBA - 8CBD - 4CA^2 - 8CAD + 4CD^2 + 8B^3 - 8B^2A - 4B^2D - 8BA^2 + 8BAD + 8A^3 - 4A^2D)v^7.$$

17b) $2|m$ – образующим соответствуют диагональная ось симметрии и координатная плоскость симметрии (см. рис. 16) и

$$Q(v) = v^8 + (4CD^2 - 8CBD - 8CAD + 4C^2D + 4A^2D - 8BAD + 4B^2D)v^7.$$

18a) $mm2$ – образующим соответствуют две диагональные плоскости симметрии (см. рис. 17) и

$$Q(v) = v^8 + (-8BAD - 8CBA + 4BA^2 + 4B^2A)v^7 + (-32CB^2A^2D + 16D^2A^2B^2 + 16B^2C^2A^2)v^6.$$

Рис. 15

Рис. 16

Рис. 17

Рис. 18

18b) $mm2$ – образующим соответствуют две координатные плоскости симметрии (см. рис. 18) и

$$\begin{aligned}
 Q(v) = & v^8 + (-4CE^2 + 4CA^2 - 8CAD - 8CBD + 4B^2D - 8EDB + 4BD^2 \\
 & + 4CB^2 - 8CBA + 4BC^2 - 8BAD + 8BCE + 8DAE + 4A^2D \\
 & + 4AD^2 + 8E^3 - 8CEA - 4BE^2 - 4DE^2 - 4AE^2 + 4AC^2)v^7 \\
 & + (-16BC^3A^2 + 32B^2AD^2E - 16BCD^2E^2 - 16AC^2DE^2 + 32C^2BA^2E \\
 & - 16CBA^2E^2 + 32A^2C^2DE - 64C^3DAB - 64D^3ABC + 16D^4AB \\
 & - 16B^3C^3 + 16C^4BA + 32C^3AB^2 - 16CB^3E^2 + 32CB^2E^3 \\
 & - 64A^3DCB - 64CB^3AD - 64A^2D^2EB + 32AD^2BCE - 32AD^3EB \\
 & - 64A^2D^2E^2 + 32A^2D^3E - 16AD^3E^2 - 64B^2C^2E^2 - 16BC^3E^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 32BC^2E^3 + 16CB^4D + 32A^3D^2E + 32A^2DBCE + 32BC^2DAE \\
& - 32A^3DCE - 64C^2B^2EA + 32AD^2E^3 - 16A^3DE^2 + 32A^2DE^3 \\
& + 16A^4DC - 64B^2C^2ED - 32CB^3ED - 64A^2D^2CE + 32B^2C^3E \\
& + 32AD^2BE^2 + 32AD^2CE^2 + 32C^2B^3E + 32A^2DBE^2 + 32A^2DCE^2 \\
& + 32CB^2DE^2 + 32BC^2DE^2 + 32BC^2AE^2 + 96AC^2D^2B + 16CDE^4 \\
& - 16BCE^4 - 32CBAE^3 + 96CB^2A^2D - 32ACDE^3 + 16ABE^4 \\
& - 16B^2ADE^2 - 32BADE^3 + 32B^2CD^2E - 32BCDE^3 + 32CB^2AE^2 \\
& - 16DAE^4 + 32CB^2DAE + 64C^2DA^2B - 80C^2DB^2A + 32CD^2A^3 \\
& - 16CD^2B^3 + 32C^2DB^3 - 16C^2DA^3 + 64CD^2B^2A - 16D^3A^3 \\
& - 80CD^2A^2B + 32D^3A^2B - 16D^3B^2A - 32C^3ABE)v^6.
\end{aligned}$$

19а) 222 – образующими являются координатные оси симметрии 2-го порядка 35 и 24. Метрическая симметрия в этом случае такова:

$$l_{23} = l_{34} = l_{45} = l_{52} = a, \quad l_{13} = l_{36} = l_{15} = l_{56} = b, \quad l_{12} = l_{26} = l_{14} = l_{46} = c,$$

а многочлен для объема имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
Q(v) = v^8 + (-8B^2A + 8A^3 + 8B^3 - 8AC^2 - 8CA^2 \\
+ 8C^3 + 16CBA - 8BA^2 - 8CB^2 - 8BC^2)v^7.
\end{aligned}$$

19б) 222 – образующими являются две диагональные оси симметрии 2-го порядка: ось, проходящая через середины ребер 23, 45 и ось, проходящая через середины ребер 34, 25. Метрическая симметрия в этом случае такова:

$$l_{34} = l_{25} = a, \quad l_{23} = l_{45} = b, \quad l_{13} = l_{15} = l_{62} = l_{64} = c, \quad l_{12} = l_{14} = l_{63} = l_{65} = d,$$

а многочлен для объема имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
Q(v) = v^8 + (-8CBA + 4BC^2 - 8BAD - 8CBD + 4AD^2 + 4BD^2 - 8CAD \\
- 8CD^2 + 4BA^2 + 8D^3 - 8C^2D + 8C^3 + 4B^2A + 4AC^2)v^7 \\
+ (32BC^3A^2 + 128C^3DAB + 128D^3ABC - 16C^6 - 96D^4AB \\
- 16D^6 + 64C^3AD^2 + 64C^3BD^2 - 96C^4BD - 96C^4AD \\
+ 64C^2D^3B + 320C^3D^3 - 240D^4C^2 + 64C^2D^3A - 96CD^4B \\
+ 96C^5D - 96CD^4A - 240C^4D^2 + 96D^5C + 32D^5B + 32D^5A \\
+ 32C^5B - 96C^4BA + 32C^3AB^2 - 16B^2C^2A^2 - 64AC^2D^2B \\
+ 32CB^2A^2D + 32AC^5 - 32C^2DA^2B - 32C^2DB^2A - 16D^2A^2B^2 \\
- 32CD^2B^2A - 32CD^2A^2B + 32D^3A^2B + 32D^3B^2A)v^6.
\end{aligned}$$

Рассмотрим оставшиеся подгруппы порядка 4.

20) 4 – образующим является ось симметрии 4-го порядка, проходящая через вершины 1 и 6. Метрическая симметрия в этом случае такова:

$$l_{12} = l_{13} = l_{14} = l_{15} = a, \quad l_{62} = l_{63} = l_{64} = l_{65} = b, \quad l_{23} = l_{34} = l_{45} = l_{52} = c,$$

а многочлен для объема имеет следующий вид:

$$Q(v) = v^8 + (-8AC^2 + 8C^3 - 8BC^2)v^7 + (16B^2C^4 - 32C^4BA + 16C^4A^2)v^6.$$

21) $\bar{4}$ -образующим является инверсионная ось симметрии 4-го порядка, проходящая через вершины 1 и 6. Метрическая симметрия в этом случае такова:

$$l_{13} = l_{15} = l_{62} = l_{64} = a, \quad l_{12} = l_{14} = l_{63} = l_{65} = b, \quad l_{23} = l_{34} = l_{45} = l_{52} = c,$$

а многочлен для объема имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Q(v) = & v^8 + (-16CBA - 8BC^2 + 8B^3 - 8BA^2 + 8CA^2 \\ & + 8CB^2 + 8C^3 - 8B^2A - 8AC^2 + 8A^3)v^7 \\ & + (128B^3CA^2 - 64BC^3A^2 - 16A^6 - 192BA^4C + 128A^3B^2C \\ & + 64A^3C^3 - 240A^4B^2 + 96A^5B - 96A^4C^2 + 64A^5C \\ & + 128BA^3C^2 + 320A^3B^3 - 16B^6 - 16B^2C^4 + 64B^3C^3 \\ & - 16C^4A^2 + 64CB^5 - 240A^2B^4 + 32C^4BA - 192CB^4A \\ & - 64C^3AB^2 + 128C^2B^3A - 96B^4C^2 - 64B^2C^2A^2 + 96AB^5)v^6. \end{aligned}$$

Подгруппа порядка 3 порождается осью симметрии третьего порядка.

22) 3-образующим является ось симметрии 3-го порядка (проходящая через центры граней 134 и 256). Метрическая симметрия в этом случае такова:

$$l_{13} = l_{34} = l_{13} = a, \quad l_{62} = l_{65} = l_{25} = b, \quad l_{12} = l_{45} = l_{63} = c, \quad l_{15} = l_{23} = l_{64} = d,$$

а многочлен $Q(V)$ содержит 7781 моном, поэтому выписывать его здесь не имеет смысла.

Следующие подгруппы имеют порядок 2: i , 2, m .

23) i -подгруппа порождена отражением относительно центра симметрии; метрически этот октаэдр устроен как изгибаемый октаэдр Брикара 1-го типа (см. рис. 19) и

$$\begin{aligned} Q(v) = & v^8 + (-4BAD + 4FCA - 4EAB - 4FED - 4EFA \\ & - 4CBD - 4CBA - 4EFB - 4EFC - 4CAD - 4CED \\ & + 4EF^2 + 4C^2D + 4DAE - 4FAB + 4FE^2 + 4DFB \\ & + 4BA^2 + 4BCE - 4DFC + 4CD^2 + 4B^2A)v^7. \end{aligned}$$

24а) 2-образующим является координатная ось симметрии 2-го порядка, проходящая через вершины 1 и 6; метрически этот октаэдр устроен как изгибаемый октаэдр Брикара 2-го типа (см. рис. 20) и

$$\begin{aligned} Q(v) = & v^8 + (4CEA - 4BAD - 4FAB - 4EAB + 4B^2A - 4BFC \\ & + 4DE^2 + 4CE^2 - 8FED - 8CED + 4FD^2 - 4FCA \\ & + 4EC^2 + 4DF^2 - 8DFC - 8EFC + 4DFB - 4CBA + 4BA^2 \\ & + 4DFA + 4BCE - 4DAE - 4EDB + 4ED^2 + 4F^2C + 4FC^2)v^7 \\ & + (16BCD^2E^2 - 32AC^2DE^2 + 16C^2BA^2E + 16CBA^2E^2 - 80C^2E^2DF \\ & - 80D^2F^2CE + 16CE^2DFA - 64CE^3FD + 96F^2E^2DC + 16EC^2DFB \end{aligned}$$

Рис. 19

Рис. 20

$$\begin{aligned}
 &+ 16EC^2DFA - 16DFCBA^2 - 64EC^3DF + 16EF^2C^2B - 16EC^3BF \\
 &- 16EC^3FA + 64FE^2D^2C + 16EF^2C^2A + 16DF^2BCE + 16DF^2CEA \\
 &+ 16DF^2C^2B - 64DF^3EC + 16DF^2AB^2 + 64DF^2C^2E + 16FE^2D^2B \\
 &+ 16FE^2D^2A - 16EA^2BFC - 16DF^3AB - 16EAB^2FC + 16CE^2DFB \\
 &+ 16DF^2C^2A - 16DF^3CA - 16E^3C^3 - 32C^2E^2FA - 32C^2E^2BF \\
 &+ 96D^2FC^2E - 32D^2F^2EB - 32D^2F^2AE - 32F^2D^2CA - 16DF^3BC \\
 &+ 16FD^2BCE - 64FD^3CE + 16FD^2CEA - 16DFCAB^2 - 16FD^3EB \\
 &- 16FD^3AE - 32F^2D^2BC + 16B^2AD^2F - 16BAD^3F + 16DF^2BA^2 \\
 &+ 16BA^2D^2F - 16EAB^2DF - 16EA^2BDF - 16AD^2BCE + 16BC^3E^2 \\
 &+ 16BC^2E^3 - 16A^2DBCE + 32BC^2DAE + 16C^2B^2EA + 16AD^2CE^2 \\
 &- 32BC^2DE^2 - 64BC^2AE^2 + 16CDE^4 - 16CBAE^3 + 16CB^2A^2D \\
 &- 16ACDE^3 - 16BCDE^3 + 16CB^2AE^2 - 16EA^2CB^2 - 16CB^2DAE \\
 &- 16EABF^2C + 32EABF^2D + 32E^2ABFC - 16E^2ABFD + 32EABFD^2 \\
 &+ 32EABFC^2 + 16FD^4E + 16D^2F^3A + 16EA^2FB^2 + 16D^2F^3B \\
 &+ 16DF^4C - 16BADFC^2 + 32BAD^2FC + 32BADF^2C - 64BAD^2F^2 \\
 &- 16A^2DFB^2 + 16EC^4F + 32E^2ABCD + 16E^2C^3A + 16C^2E^3A \\
 &+ 32F^2D^3E + 32C^2E^3D - 16EF^2C^3 + 16F^2D^3A \\
 &+ 16F^2D^3B - 16FD^3E^2 + 32C^3E^2F - 16DF^3C^2 \\
 &- 16CE^3D^2 + 32D^2F^3C - 16C^3ABE - 16D^3F^3)v^6.
 \end{aligned}$$

Следующие случаи приведены лишь для полноты изложения: полином в каждом из этих случаев получается, по-видимому, весьма сложным, и вычислить его в общем виде не удалось.

24b) 2 – образующим является диагональная ось симметрии 2-го порядка, проходя-

шая через середины ребер 23 и 45. Метрическая симметрия в этом случае такова:

$$\begin{aligned} l_{12} = l_{63} = a, \quad l_{13} = l_{62} = b, \quad l_{15} = l_{64} = c, \quad l_{14} = l_{65} = d, \\ l_{34} = l_{25} = e, \quad l_{23} = f, \quad l_{45} = g. \end{aligned}$$

25а) m – образующим является диагональная плоскость симметрии, проходящая через вершины 1 и 6 и середины ребер 25 и 34. Метрическая симметрия в этом случае такова:

$$\begin{aligned} l_{13} = l_{14} = a, \quad l_{63} = l_{64} = b, \quad l_{62} = l_{65} = c, \quad l_{12} = l_{15} = d, \\ l_{23} = l_{45} = e, \quad l_{34} = f, \quad l_{25} = g. \end{aligned}$$

25б) m – образующим является координатная плоскость симметрии, проходящая через вершины 2, 3, 4, 5. Метрическая симметрия в этом случае такова:

$$\begin{aligned} l_{12} = l_{62} = a, \quad l_{13} = l_{63} = b, \quad l_{14} = l_{64} = c, \quad l_{15} = l_{65} = d, \\ l_{23} = e, \quad l_{34} = f, \quad l_{45} = h, \quad l_{52} = g. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сабитов И. Х. Обобщенная формула Герона–Тарталья и некоторые ее следствия // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 10. С. 105–134.
- [2] Астрелин А. В., Сабитов И. Х. Минимальный по степени многочлен для объема октаэдра // УМН. 1995. Т. 50. № 5. С. 245–246.
- [3] Галиулин Р. В. Лекции по геометрическим основам кристаллографии. Челябинск: Изд-во Челябинского университета, 1989.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: mihalyov@mtu-net.ru

Поступило
 20.02.2001
 Исправленный вариант
 22.07.2002