Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Балабаев, Построение максимального числа линейно независимых векторных полей на сфере, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 5, 643–653

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm880>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:03:00

УДК 514.752.7

ПОСТРОЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА СФЕРЕ

В. Е. Балабаев

Строится в явном виде максимально возможное число линейно независимых векторных полей на сфере любой нечетной размерности, т.е. в общем случае. Исследуются дифференциально-геометрические свойства построенных полей, в частности, находятся их линии тока, вычисляются главные кривизны второго рода, исследуется голономность распределений этих полей.

Библиография: 3 названия.

Рассмотрим касательные векторные поля на сферах нечетной размерности, ибо, как известно, на сферах четной размерности таких полей не существует. Далее под векторными полями на сферах понимаются касательные векторные поля на сферах. Предложенный ранее подход к построению максимального числа ортонормальных векторных полей на сферах (см. монографию [1, гл. 11]) оказывается весьма сложным для реализации его на ЭВМ. При этом подходе векторные поля на сфере S^{m-1} ставятся в соответствие с нормализованными ортогональными умножениями $\mu: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, а те, в свою очередь, — с множеством всех представлений алгебры Клиффорда с $k-1$ образующими в ортогональной группе $O(m)$. Следуя этой схеме, трудно получить явные формулы для ортонормальных векторных полей на сферах любой нечетной размерности, что делает невозможным исследование геометрических свойств таких полей, имеющих важное значение в приложениях.

В данной работе предлагается новый более простой рекурсивный метод построения максимального числа ортонормальных векторных полей на сферах любой нечетной размерности в явном виде. Это позволяет изучить дифференциально-геометрические свойства построенных векторных полей, в частности, их голономность. До последнего времени проблема построения максимального числа линейно независимых полей на сферах в явном виде была решена лишь для сфер размерности 1, 3, 7, 15 (см. монографию [2, с. 187]), откуда нетрудно получить ее решение для сфер размерности $4l-3$, $8l-5$, $16l-9$, $32l-17$.

Настоящая работа опирается на работу [3], в которой построен и изучен класс канонических эллиптических систем первого порядка. При помощи свойств характеристических матриц этих систем удалось построить в общем случае максимальное число ортонормальных векторных полей на сферах в явном виде.

Заметим, что если на сфере размерности $2^b - 1$, где b — натуральное число, построено максимальное число $M(b)$ ортонормальных векторных полей, то на сфере размерности $l \cdot 2^b - 1$, где l нечетно, строится такое же число $M(b)$ ортонормальных векторных

$$\begin{aligned} V_{8i+3}^{4i+2}(x_1, \dots, x_{8m}) = \{ & -V_0^{4i-1}(x_{7m+1}, \dots, x_{8m}), -V_0^{4i-1}(x_{6m+1}, \dots, x_{7m}), \\ & V_0^{4i-1}(x_{5m+1}, \dots, x_{6m}), V_0^{4i-1}(x_{4m+1}, \dots, x_{5m}), \\ & -V_0^{4i-1}(x_{3m+1}, \dots, x_{4m}), -V_0^{4i-1}(x_{2m+1}, \dots, x_{3m}), \\ & V_0^{4i-1}(x_{m+1}, \dots, x_{2m}), V_0^{4i-1}(x_1, \dots, x_m)\}. \end{aligned}$$

При $b = 4i + 3$, т.е. на S^{16m-1} , строим $8i + 7$ ортонормальных векторных полей:

$$\begin{aligned} V_1^{4i+3}(x_1, \dots, x_{16m}) = \{ & V_1^{4i+2}(x_1, \dots, x_{8m}), -V_1^{4i+2}(x_{8m+1}, \dots, x_{16m})\}, \\ & \dots \dots \dots \\ V_{8i+3}^{4i+3}(x_1, \dots, x_{16m}) = \{ & V_{8i+3}^{4i+2}(x_1, \dots, x_{8m}), -V_{8i+3}^{4i+2}(x_{8m+1}, \dots, x_{16m})\}, \\ V_{8i+4}^{4i+3}(x_1, \dots, x_{16m}) = \{ & -V_0^{4i+2}(x_{8m+1}, \dots, x_{16m}), V_0^{4i+2}(x_1, \dots, x_{8m})\}, \\ V_{8i+5}^{4i+3}(x_1, \dots, x_{16m}) = \{ & -V_0^{4i-1}(x_{11m+1}, \dots, x_{12m}), -V_0^{4i-1}(x_{10m+1}, \dots, x_{11m}), \\ & V_0^{4i-1}(x_{9m+1}, \dots, x_{10m}), V_0^{4i-1}(x_{8m+1}, \dots, x_{9m}), \\ & -V_0^{4i-1}(x_{15m+1}, \dots, x_{16m}), -V_0^{4i-1}(x_{14m+1}, \dots, x_{15m}), \\ & V_0^{4i-1}(x_{13m+1}, \dots, x_{14m}), V_0^{4i-1}(x_{12m+1}, \dots, x_{13m}), \\ & -V_0^{4i-1}(x_{3m+1}, \dots, x_{4m}), -V_0^{4i-1}(x_{2m+1}, \dots, x_{3m}), \\ & V_0^{4i-1}(x_{m+1}, \dots, x_{2m}), V_0^{4i-1}(x_1, \dots, x_m), \\ & -V_0^{4i-1}(x_{7m+1}, \dots, x_{8m}), -V_0^{4i-1}(x_{6m+1}, \dots, x_{7m}), \\ & V_0^{4i-1}(x_{5m+1}, \dots, x_{6m}), V_0^{4i-1}(x_{4m+1}, \dots, x_{5m})\}, \\ V_{8i+6}^{4i+3}(x_1, \dots, x_{16m}) = \{ & -V_0^{4i-1}(x_{13m+1}, \dots, x_{14m}), -V_0^{4i-1}(x_{12m+1}, \dots, x_{13m}), \\ & V_0^{4i-1}(x_{15m+1}, \dots, x_{16m}), V_0^{4i-1}(x_{14m+1}, \dots, x_{15m}), \\ & V_0^{4i-1}(x_{9m+1}, \dots, x_{10m}), V_0^{4i-1}(x_{8m+1}, \dots, x_{9m}), \\ & -V_0^{4i-1}(x_{11m+1}, \dots, x_{12m}), -V_0^{4i-1}(x_{10m+1}, \dots, x_{11m}), \\ & -V_0^{4i-1}(x_{5m+1}, \dots, x_{6m}), -V_0^{4i-1}(x_{4m+1}, \dots, x_{5m}), \\ & V_0^{4i-1}(x_{7m+1}, \dots, x_{8m}), V_0^{4i-1}(x_{6m+1}, \dots, x_{7m}), \\ & V_0^{4i-1}(x_{m+1}, \dots, x_{2m}), V_0^{4i-1}(x_1, \dots, x_m), \\ & -V_0^{4i-1}(x_{3m+1}, \dots, x_{4m}), -V_0^{4i-1}(x_{2m+1}, \dots, x_{3m})\}, \\ V_{8i+7}^{4i+3}(x_1, \dots, x_{16m}) = \{ & -V_0^{4i}(x_{14m+1}, \dots, x_{16m}), -V_0^{4i}(x_{12m+1}, \dots, x_{14m}), \\ & V_0^{4i}(x_{10m+1}, \dots, x_{12m}), V_0^{4i}(x_{8m+1}, \dots, x_{10m}), \\ & -V_0^{4i}(x_{6m+1}, \dots, x_{8m}), -V_0^{4i}(x_{4m+1}, \dots, x_{6m}), \\ & V_0^{4i}(x_{2m+1}, \dots, x_{4m}), V_0^{4i}(x_m, \dots, x_{2m})\}. \end{aligned}$$

Таким образом, указан способ построения максимального числа линейно независимых векторных полей на сферах размерности $2^{4i} - 1, 2^{4i+1} - 1, 2^{4i+2} - 1, 2^{4i+3} - 1$. Линейная независимость построенных векторных полей следует из их ортонормированности, которая была установлена в [3]. Так как согласно теореме Адамса [1, с. 240] максимальное число $M(m-1)$ линейно независимых векторных полей на сфере S^{m-1} , где $m = (2d(m) + 1)2^{c(m)}16^{d(m)}$, $0 \leq c(m) \leq 3$, равно $2^{c(m)} + 8d(m) - 1$, во всех случаях число построенных выше векторных полей является максимально возможным.

Ортонормальные векторные поля на сфере S^{m-1} , построенные указанным выше способом, будем называть *каноническими*. Отметим также, что все эти поля линейны и, значит, класса C^ω .

ЗАМЕЧАНИЕ. Построение максимального числа линейно независимых векторных полей на нечетномерных сферах неоднозначно, что вытекает из существования различных представлений алгебры Клиффорда с $k - 1$ образующими в ортогональной группе $O(m)$ [1, гл. 11]. Например, на S^{15} можно построить следующий максимальный набор ортонормальных векторных полей, отличающихся от рассмотренных выше канонических полей:

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \{x_2, -x_1, x_4, -x_3, x_6, -x_5, x_8, -x_7, x_{10}, -x_9, x_{12}, -x_{11}, x_{14}, -x_{13}, x_{16}, -x_{15}\}, \\ V_2(x) &= \{x_3, -x_4, -x_1, x_2, -x_7, x_8, x_5, -x_6, x_{11}, -x_{12}, -x_9, x_{10}, -x_{15}, x_{16}, x_{13}, -x_{14}\}, \\ V_3(x) &= \{x_4, x_3, -x_2, -x_1, x_8, x_7, -x_6, -x_5, x_{12}, x_{11}, -x_{10}, -x_9, x_{16}, x_{15}, -x_{14}, -x_{13}\}, \\ V_4(x) &= \{x_5, -x_6, x_7, -x_8, -x_1, x_2, -x_3, x_4, -x_{13}, x_{14}, -x_{15}, x_{16}, x_9, -x_{10}, x_{11}, -x_{12}\}, \\ V_5(x) &= \{x_6, x_5, -x_8, -x_7, -x_2, -x_1, x_4, x_3, -x_{14}, -x_{13}, x_{16}, x_{15}, x_{10}, x_9, -x_{12}, -x_{11}\}, \\ V_6(x) &= \{x_7, -x_8, -x_5, x_6, x_3, -x_4, -x_1, x_2, -x_{15}, x_{16}, x_{13}, -x_{14}, -x_{11}, x_{12}, x_9, -x_{10}\}, \\ V_7(x) &= \{x_8, x_7, x_6, x_5, -x_4, -x_3, -x_2, -x_1, x_{16}, x_{15}, x_{14}, x_{13}, -x_{12}, -x_{11}, -x_{10}, -x_9\}, \\ V_8(x) &= \{x_{16}, x_{15}, x_{14}, x_{13}, x_{12}, x_{11}, x_{10}, x_9, -x_8, -x_7, -x_6, -x_5, -x_4, -x_3, -x_2, -x_1\}, \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые дифференциально-геометрические свойства канонических полей.

ТЕОРЕМА 1. *Любое каноническое поле $V(x_1, \dots, x_m)$ является полем Киллинга на сфере S^{m-1} , а также в $\mathbb{R}^m$.*

Рассмотрим поле $V(x_1, \dots, x_m)$ в $\mathbb{R}^m$. Так как поле V порождается постоянной кососимметрической матрицей B , т.е. $V = Bx$, то

$$\frac{\partial V^i}{\partial x_j} + \frac{\partial V^j}{\partial x_i} = 0.$$

Поэтому производная Ли евклидовой метрики вдоль этого поля тождественно равна нулю, и значит, любое каноническое поле является полем Киллинга в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$. Из того, что $(dx, dV) = 0$, следует, что любое каноническое поле является полем Киллинга на сфере S^{m-1} (см. [2, с. 197]).

ТЕОРЕМА 2. *Для каждого канонического поля $V(x_1, \dots, x_m)$ линия тока, проходящая через некоторую точку, находящуюся на расстоянии $\rho > 0$ от начала координат, является большой окружностью на сфере S_ρ^{m-1} радиуса ρ с центром в начале координат.*

Так как ограничение поля V на S_ρ^{m-1} является касательным векторным полем на S_ρ^{m-1} , линия тока этого поля, проходящая через некоторую точку данной сферы, лежит на этой сфере. По построению поле V определяется как произведение некоторой постоянной ортогональной кососимметрической матрицы B на вектор $r = \{x_1, \dots, x_m\}$:

$V = Br$. Условие, что данная кривая $r = r(s)$ является линией тока поля V , означает, что она удовлетворяет системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{1}{\rho} Br(s), \quad (1)$$

где s – натуральный параметр. Дифференцируя по натуральному параметру это равенство и учитывая, что $B^2 = -E$, получим

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{1}{\rho} B \frac{dr}{ds} = \frac{1}{\rho^2} B^2 r = -\frac{1}{\rho^2} r. \quad (2)$$

Обозначим $dr/ds = \tau_1(s)$. Так как параметр s натурален, то $|\tau_1(s)| = 1$. Учитывая, что в силу (2) кривизна

$$k_1 = \left| \frac{d^2 r}{ds^2} \right| = \frac{1}{\rho},$$

согласно формулам Френе–Серре для кривой в $\mathbb{R}^m$ имеем

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{d\tau_1}{ds} = k_1 \tau_2(s) \frac{1}{\rho} \tau_2(s).$$

Поэтому в силу (2) находим, что

$$\tau_2(s) = \frac{1}{\rho} r(s), \quad \frac{d\tau_2}{ds} = -\frac{1}{\rho} \frac{dr}{ds} = -\frac{1}{\rho} \tau_1(s).$$

Но по формулам Френе–Серре

$$\frac{d\tau_2}{ds} = -k_1 \tau_1(s) + k_2 \tau_3(s).$$

Следовательно, $k_2 \equiv 0$ и кривая – линия тока – лежит в двумерной плоскости, проходящей через центр сферы, причем ее кривизна равна тождественно $1/\rho$. Значит, проходящая через некоторую точку сферы S_ρ^{m-1} линия тока любого канонического поля является большой окружностью на этой сфере.

ТЕОРЕМА 3. Любое каноническое поле $V(x_1, \dots, x_m)$ неголономно при $m > 2$ ни в одной области пространства $\mathbb{R}^m$, а при $m = 2$ оно голономно в $\mathbb{R}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим поле $V(x_1, \dots, x_m) = \{x_2, -x_1, \dots, x_m, -x_{m-1}\}$ и составим соответствующую этому полю форму Пфаффа:

$$\omega = x_2 dx_1 - x_1 dx_2 + \dots + x_m dx_{m-1} - x_{m-1} dx_m.$$

Внешний дифференциал формы ω равен

$$d\omega = 2(dx_2 \wedge dx_1 + \dots + dx_m \wedge dx_{m-1}). \quad (3)$$

Из уравнения Пфаффа

$$x_2 dx_1 - x_1 dx_2 + \dots + x_m dx_{m-1} - x_{m-1} dx_m = 0 \quad (4)$$

выразим один из дифференциалов, например dx_m , и подставим в (3). Получим

$$\begin{aligned} d\omega = 2 & \left(dx_2 \wedge dx_1 + \dots + dx_{m-2} \wedge dx_{m-3} \right. \\ & + \frac{1}{x_{m-1}} (x_2 dx_1 \wedge dx_{m-1} - x_1 dx_2 \wedge dx_{m-1} + \dots \\ & \left. + x_{m-2} dx_{m-3} \wedge dx_{m-1} - x_{m-3} dx_{m-2} \wedge dx_{m-1}) \right). \end{aligned}$$

При $m > 2$ $d\omega \neq 0$, а при $m = 2$, очевидно, $d\omega = 0$ в силу уравнения (4). Значит, согласно теореме Фробениуса [2, с. 147] поле $\mathbf{V}$ голономно лишь при $m = 2$. Так как любое каноническое поле в $\mathbb{R}^m$ может быть получено из поля $\mathbf{V}$ при помощи ортогонального преобразования, которое не изменяет его голономности или неголономности, откуда следует утверждение теоремы.

Изучим голономность распределений совокупности канонических полей. В силу теоремы Фробениуса [2, с. 147] распределение совокупности полей $\mathbf{A}_1 = \{a_1^1, \dots, a_m^1\}$, $\dots$, $\mathbf{A}_k = \{a_1^k, \dots, a_m^k\}$ голономно тогда и только тогда, когда внешние дифференциалы форм

$$\omega_1 = a_1^1 dx_1 + \dots + a_m^1 dx_m, \quad \dots, \quad \omega_k = a_1^k dx_1 + \dots + a_m^k dx_m,$$

т.е. $d\omega_1, \dots, d\omega_k$, равны нулю в силу системы $\omega_1 = 0, \dots, \omega_k = 0$.

Рассмотрим канонические векторные поля в $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{V}_1^2 = \{-x_2, x_1, x_4, -x_3\}, \quad \mathbf{V}_2^2 = \{-x_3, -x_4, x_1, x_2\}, \quad \mathbf{V}_3^2 = \{-x_4, x_3, -x_2, x_1\}.$$

ТЕОРЕМА 4. *Распределение каждой пары векторных полей: $\{\mathbf{V}_1^2, \mathbf{V}_2^2\}$, $\{\mathbf{V}_1^2, \mathbf{V}_3^2\}$ и $\{\mathbf{V}_2^2, \mathbf{V}_3^2\}$ голономно в $\mathbb{R}^4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для пары $\{\mathbf{V}_1^2, \mathbf{V}_2^2\}$, для остальных пар оно аналогично. Составим соответствующие полям $\mathbf{V}_1^2$ и $\mathbf{V}_2^2$ формы Пфаффа:

$$\omega_1 = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2 + x_4 dx_3 - x_3 dx_4, \quad \omega_2 = -x_3 dx_1 - x_4 dx_2 + x_1 dx_3 + x_2 dx_4.$$

Находим их внешние дифференциалы

$$d\omega_1 = 2(dx_1 \wedge dx_2 - dx_3 \wedge dx_4), \quad d\omega_2 = 2(dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_4). \quad (5)$$

Из системы Пфаффа

$$-x_2 dx_1 + x_1 dx_2 + x_4 dx_3 - x_3 dx_4 = 0, \quad -x_3 dx_1 - x_4 dx_2 + x_1 dx_3 + x_2 dx_4 = 0 \quad (6)$$

найдем дифференциалы dx_1 и dx_2 :

$$dx_1 = \frac{(x_1^2 + x_4^2) dx_3 + (x_1 x_2 - x_3 x_4) dx_4}{x_1 x_3 + x_2 x_4}, \quad dx_2 = \frac{(x_1 x_2 - x_3 x_4) dx_3 + (x_2^2 + x_3^2) dx_4}{x_1 x_3 + x_2 x_4}.$$

Подставив dx_1 и dx_2 в (5), получим, что $d\omega_1 \equiv 0$ и $d\omega_2 \equiv 0$ в силу системы (6). Согласно теореме Фробениуса это означает, что распределение пары $\{\mathbf{V}_1^2, \mathbf{V}_2^2\}$ голономно в $\mathbb{R}^4$.

ЛЕММА 1. *Распределения пар векторных полей $\{\mathbf{V}_0^2, \mathbf{V}_1^2\}$, $\{\mathbf{V}_0^2, \mathbf{V}_2^2\}$, $\{\mathbf{V}_0^2, \mathbf{V}_3^2\}$ неголономны ни в одной области $\mathbb{R}^4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, рассмотрим пару $\{\mathbf{V}_0^2, \mathbf{V}_1^2\}$. Составим для полей $\mathbf{V}_0^2$ и $\mathbf{V}_1^2$ формы Пфаффа:

$$\omega_0 = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4, \quad \omega_1 = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2 + x_4 dx_3 - x_3 dx_4.$$

Вычислим $d\omega_0$ и $d\omega_1$:

$$d\omega_0 \equiv 0, \quad d\omega_1 = 2(dx_1 \wedge dx_2 - dx_3 \wedge dx_4). \quad (7)$$

Из системы Пфаффа

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4 = 0, \quad -x_2 dx_1 + x_1 dx_2 + x_4 dx_3 - x_3 dx_4 = 0 \quad (8)$$

найдем dx_1 и dx_3 и подставим их в $d\omega_1$:

$$dx_1 = \frac{(x_1 x_3 - x_2 x_4) dx_2 - (x_3^2 + x_4^2) dx_4}{x_1 x_4 + x_2 x_3}, \quad dx_3 = \frac{-(x_1^2 + x_2^2) dx_2 + (x_1 x_3 - x_2 x_4) dx_4}{x_1 x_4 + x_2 x_3}.$$

Получим, что

$$d\omega_1 = \frac{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) dx_2 \wedge dx_4}{x_1 x_4 + x_2 x_3}.$$

Это значит, что $d\omega_1 \neq 0$ в силу системы (8), т.е. по теореме Фробениуса распределение пары $\{\mathbf{V}_0^2, \mathbf{V}_1^2\}$ неголономно ни в одной области $\mathbb{R}^4$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы 4 и леммы 1 следует, что в $\mathbb{R}^4$ имеются три примера ортогональных друг другу распределений пар векторных полей, одно из которых голономно, а другое неголономно:

- 1) $\{\mathbf{V}_1^2, \mathbf{V}_2^2\}$ и $\{\mathbf{V}_0^2, \mathbf{V}_3^2\}$;
- 2) $\{\mathbf{V}_1^2, \mathbf{V}_3^2\}$ и $\{\mathbf{V}_0^2, \mathbf{V}_2^2\}$;
- 3) $\{\mathbf{V}_2^2, \mathbf{V}_3^2\}$ и $\{\mathbf{V}_0^2, \mathbf{V}_1^2\}$.

ЛЕММА 2. *Распределения пар канонических полей неголономны ни в одной области пространства $\mathbb{R}^{4k}$ размерности $4k > 4$ (k натуральное).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем это, например, для пары векторных полей

$$\mathbf{V}_1 = \{-x_2, x_1, x_4, -x_3, -x_6, x_5, x_8, -x_7, \dots, -x_{m-2}, x_{m-3}, x_m, -x_{m-1}\},$$

$$\mathbf{V}_2 = \{-x_3, -x_4, x_1, x_2, -x_7, -x_8, x_5, x_6, \dots, -x_{m-1}, -x_m, x_{m-3}, x_{m-2}\}$$

в пространстве $\mathbb{R}^m$ размерности $m > 4$ и кратной 4. Составим для полей $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ формы Пфаффа:

$$\omega_1 = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2 + x_4 dx_3 - x_3 dx_4 - x_6 dx_5 + x_5 dx_6 + x_8 dx_7 - x_7 dx_8 - \dots$$

$$- x_{m-2} dx_{m-3} + x_{m-3} dx_{m-2} + x_m dx_{m-1} - x_{m-1} dx_m,$$

$$\omega_2 = -x_3 dx_1 - x_4 dx_2 + x_1 dx_3 + x_2 dx_4 - x_7 dx_5 - x_8 dx_6 + x_5 dx_7 + x_6 dx_8 - \dots$$

$$- x_{m-1} dx_{m-3} - x_m dx_{m-2} + x_{m-3} dx_{m-1} + x_{m-2} dx_m.$$

Вычислим $d\omega_1$ и $d\omega_2$:

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= 2(dx_1 \wedge dx_2 - dx_3 \wedge dx_4 + dx_5 \wedge dx_6 - dx_7 \wedge dx_8 + \dots), \\ d\omega_2 &= 2(dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4 + dx_5 \wedge dx_7 + dx_6 \wedge dx_8 + \dots), \end{aligned} \quad (9)$$

где точками заменены члены, не содержащие $dx_1, \dots, dx_8$. Из системы Пфаффа

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0 \quad (10)$$

найдем dx_1 и dx_2 . Обозначая через $\Delta = x_1x_3 + x_2x_4$, имеем

$$\begin{aligned} dx_1 &= \Delta^{-1}((x_1^2 + x_4^2)dx_3 + (x_1x_5 + x_4x_8)dx_7 + \dots), \\ dx_2 &= \Delta^{-1}((x_1x_2 - x_3x_4)dx_3 + (x_2x_5 - x_3x_8)dx_7 + \dots), \end{aligned}$$

где точками заменены члены, не содержащие dx_3 и dx_7 . Подставляя найденные значения dx_1 и dx_2 в первое равенство (9), находим, что

$$d\omega_1 = 2\Delta^{-1}((x_1^2 + x_4^2)(x_2x_5 - x_3x_8) + (x_3x_4 - x_1x_2)(x_1x_5 + x_4x_8))dx_3 \wedge dx_7 + \dots,$$

где точками заменены члены, не содержащие $dx_3 \wedge dx_7$. Отсюда следует, что $d\omega_1 \neq 0$ в силу системы (10); значит, согласно теореме Фробениуса распределение пары полей $\{V_1, V_2\}$ не голономно ни в одной области пространства $\mathbb{R}^m$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично показывается, что распределение пары векторных полей $\{V_0, V_1\}$, где $V_0 = \{x_1, \dots, x_m\}$, $V_1 = \{x_2, -x_1, \dots, x_m, -x_{m-1}\}$, не голономно ни в одной области пространства $\mathbb{R}^m$, где $m > 2$ и четно.

Переходя к исследованию голономности распределений троек векторных полей, отметим, что в $\mathbb{R}^4$ распределение тройки любых из четырех векторных полей $V_0^2, V_1^2, V_2^2, V_3^2$ голономно. Это следует из того, что из системы Пфаффа, составленной для любой такой тройки, можно выразить все дифференциалы через один из них, например dx_1 , и, подставив их значения в выражения для внешних дифференциалов соответствующих форм Пфаффа, получить, что все они тождественно равны нулю в силу системы Пфаффа. Это означает согласно теореме Фробениуса, что каждое рассматриваемое распределение векторных полей голономно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Действуя так же, как и выше (см. также [2, с. 196]), можно показать, что пространство $\mathbb{R}^4$ в данном случае будет исключением. В пространствах большей размерности распределение любой тройки векторных полей из множества канонических полей и V_0 не голономно ни в одной области пространства $\mathbb{R}^m$, где $m > 4$ и кратно 4.

Рассмотрим векторные поля в $\mathbb{R}^8$. Так же, как и выше для троек полей в $\mathbb{R}^4$, можно установить, что распределение семерки любых из восьми векторных полей $V_0^3, V_1^3, \dots, V_7^3$ голономно.

Перейдем к распределениям шестерок канонических полей в $\mathbb{R}^8$.

ЛЕММА 3. *Распределение шестерки любых из семи канонических полей $V_1^3, \dots, V_7^3$ голономно в $\mathbb{R}^8$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем доказательство, например, для шестерки $\{V_1^3, \dots, V_6^3\}$, при этом используем геометрическое определение голономности. Будем говорить, что распределение совокупности гладких векторных полей $\{A_1, \dots, A_k\}$ ($k < m$) голономно в области $G \subset \mathbb{R}^m$, если для любой точки области G существует $(m - k)$ -мерная поверхность в G , содержащая эту точку и ортогональная к $A_1, \dots, A_k$. В противном случае их распределение назовем неголономным.

Действительно, векторные поля V_0^3 и V_7^3 ортогональны к полям $V_1^3, \dots, V_6^3$ всюду в $\mathbb{R}^8$. Пусть M_0 – произвольная точка пространства $\mathbb{R}^8$, находящаяся на расстоянии $\rho > 0$ от начала координат. Рассмотрим сферу S_ρ^7 радиуса ρ с центром в начале координат. По доказанному выше в теореме 2 линия тока поля V_7^3 , проходящая через точку $M_0 \in S_\rho^7$, является большой окружностью на этой сфере. Так как данная большая окружность касается векторного поля V_7^3 , двумерная плоскость этой большой окружности ортогональна каждому из векторных полей $V_1^3, \dots, V_6^3$. Отсюда следует, что существует двумерная плоскость, проходящая через точку M_0 и ортогональная к $V_1^3, \dots, V_6^3$ в $\mathbb{R}^8$. Это означает, что распределение шестерки полей $\{V_1^3, \dots, V_6^3\}$ голономно в $\mathbb{R}^8$. Для остальных шестерок канонических полей доказательство аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из установленного выше следует, что в $\mathbb{R}^8$ можно привести семь примеров ортогональных друг другу распределений векторных полей, одно из которых – распределение шестерки канонических полей – голономно, а другое – распределение пары векторных полей – неголономно, в частности, распределение шестерки канонических полей $\{V_1^3, \dots, V_6^3\}$ голономно, а распределение пары векторных полей $\{V_0^3, V_7^3\}$ нет.

ТЕОРЕМА 5. Главными кривизнами второго рода любого нормированного канонического поля в $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ являются $\lambda = 0$ и $\lambda = \pm i/(x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}$, причем все нечетные симметрические функции этих кривизн равны нулю, а все четные определяются формулами $S_{2j} = C_{n-1}^j \rho^{-2j}$, $n = m/2$ ($j = 1, \dots, n - 1$).

Рассмотрим нормированное векторное поле

$$V = \frac{\{x_2, -x_1, \dots, x_m, -x_{m-1}\}}{(x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}},$$

определенное всюду в $\mathbb{R}^m$ кроме начала координат. Вычислим главные кривизны второго рода этого поля. Составим характеристическое уравнение

$$\det \left(\frac{\partial V^i}{\partial x_j} + \lambda \delta_{ij} \right) = 0,$$

где V^i – компоненты поля V . Несложный подсчет показывает, что характеристическое уравнение, определяющее главные кривизны второго рода для поля V , имеет вид

$$\lambda^2 (\lambda^2 + (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{-1})^{(m-2)/2} = 0. \quad (11)$$

Отсюда следует, что корни $\lambda = 0$ и $\lambda = \pm i/(x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}$ будут главными кривизнами второго рода для поля V , причем мнимые корни имеют кратность $(m - 2)/2$ (один из корней $\lambda = 0$, существующий всегда в силу единичности поля V , отбрасывается). Так как любое нормированное каноническое поле получается из поля V ортогональным преобразованием, главные кривизны второго рода такого поля будут те же, что и выше.

Обозначая $m = 2n$, $\rho = (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}$ и записывая характеристическое уравнение для определения главных кривизн второго рода $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1}$ подробнее, имеем

$$\lambda^{2n-1} + \frac{C_{n-1}^1 \lambda^{2n-3}}{\rho^2} + \dots + \frac{C_{n-1}^j \lambda^{2n-2j-1}}{\rho^{2j}} + \dots + \frac{\lambda}{\rho^{2n-2}} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты этого уравнения и уравнения, определяющего симметрические функции S_i этих кривизн:

$$\lambda^{2n-1} - S_1 \lambda^{2n-2} + S_2 \lambda^{2n-3} - \dots + (-1)^i S_i \lambda^{2n-i-1} + \dots - S_{2n-1} = 0,$$

убеждаемся, что все нечетные симметрические функции равны нулю, а четные определяются формулами $S_{2j} = C_{n-1}^j \rho^{-2j}$ ($j = 1, \dots, n-1$).

ТЕОРЕМА 6. Вектор кривизны $\mathbf{P}$ любого нормированного канонического поля $\mathbf{V}$ в $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ равен $\mathbf{r}/\rho^m$.

Как известно [2, с. 134], вектор кривизны $\mathbf{P}$ единичного поля $\mathbf{V}$ может быть выражен через симметрические функции главных кривизн второго рода S_j ($j = 1, \dots, m-1$) по формуле

$$\mathbf{P} = (-1)^{m-1} (S_{m-1} \mathbf{V} + S_{m-2} \mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_{m-1}), \quad (12)$$

где векторы $\mathbf{k}_i$ ($i = 1, \dots, m-1$) определяются последовательно: $\mathbf{k}_0 = \mathbf{V}$, $\mathbf{k}_1 = \nabla_{\mathbf{V}} \mathbf{V}$, $\mathbf{k}_2 = \nabla_{\mathbf{k}_1} \mathbf{V}$, $\dots$, $\mathbf{k}_{i+1} = \nabla_{\mathbf{k}_i} \mathbf{V}$, $\dots$, $\mathbf{k}_{m-1} = \nabla_{\mathbf{k}_{m-2}} \mathbf{V}$. Здесь через $\nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ обозначается вектор с компонентами

$$\left\{ \sum_{j=1}^m \frac{\partial b_i}{\partial x_j} a_j \right\}$$

(производная вектора $\mathbf{b}$ вдоль вектора $\mathbf{a}$). Вычисляя $\mathbf{k}_1 = \{k_1^1, \dots, k_1^m\}$, находим, что

$$k_1^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial V_i}{\partial x_j} V_j = -\frac{x_i}{\rho^2}.$$

Значит, $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{r}/\rho^2$. Векторное поле $\mathbf{V}$ вдоль радиуса сферы не меняется, поэтому $\mathbf{k}_2 = \nabla_{\mathbf{k}_1} \mathbf{V} = 0$, $\mathbf{k}_i = 0$ ($i = 2, \dots, m-1$). Учитывая, что m четно, и так как нечетные симметрические функции главных кривизн второго рода для поля $\mathbf{V}$ равны нулю, по формуле (12) получаем, что

$$\mathbf{P} = -S_{m-2} \mathbf{k}_1 = -\rho^{2-m} \left(-\frac{\mathbf{r}}{\rho^2} \right) = \frac{\mathbf{r}}{\rho^m}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко установить, что дивергенция вектора кривизны $\mathbf{P}$ любого нормированного канонического поля равна нулю в $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

ТЕОРЕМА 7. Степень d отображения сферы S_R^{m-1} радиуса R на единичную сферу S^{m-1} , которое порождается нормированным каноническим полем $\mathbf{V}$, равна 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, искомую степень d порождаемого полем $\mathbf{V}$ отображения сферы S_R^{m-1} на единичную сферу S^{m-1} можно определить формулой [2, с. 133]

$$d = \frac{1}{\omega_{m-1}} \int_{S_R^{m-1}} (\mathbf{P}, \boldsymbol{\nu}) d\sigma, \quad (13)$$

где ω_{m-1} – объем сферы S^{m-1} , $\boldsymbol{\nu}$ – единичная нормаль к S_R^{m-1} . Подставляя в (13) $(\mathbf{P}, \boldsymbol{\nu}) = (\mathbf{r}/R^m, \mathbf{r}/R) = R^{1-m}$ и учитывая, что объем сферы S_R^{m-1} равен $\omega_{m-1} R^{m-1}$, получим, что $d = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно показать, что дивергенция любого нормированного канонического поля $\mathbf{V}$ равна нулю в $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

Автор выражает искреннюю благодарность В. А. Ильину, Е. И. Моисееву и А. А. Дезину за обсуждение работы на семинаре и дружескую поддержку, а также И. Р. Шафаревичу и А. Л. Онищику за ряд полезных советов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.
- [2] Аминов Ю. А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990.
- [3] Балабаев В. Е. Канонические эллиптические системы первого порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 12. С. 2082–2094.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

Поступило

23.01.1997

Исправленный вариант

15.06.1999