Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Таламбуца, Достижимость минимального показателя экспоненциального роста для некоторых фуксовых групп, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 1, 152–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8800>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:00:36

Достижимость минимального показателя экспоненциального роста для некоторых фуксовых групп

А. Л. Таламбуца

Пусть группа G порождена конечным множеством элементов S . Функцией роста $F_{G,S}(m)$ группы G относительно S называется количество элементов группы G , выраженных групповыми словами длины не более m в алфавите S . Из очевидного неравенства $F_{G,S}(k+m) \leq F_{G,S}(k)F_{G,S}(m)$ следует (см. [1; предложение VI.C.56]), что существует предел

$$\lambda_{G,S} = \lim_{m \rightarrow \infty} (F_{G,S}(m))^{1/m}.$$

Этот предел называется *показателем экспоненциального роста* группы G относительно множества порождающих S . Так как далее будут рассматриваться только такие показатели роста, то слово “экспоненциальный” для краткости будем опускать. *Минимальным показателем роста* группы G называется точная нижняя грань $\lambda_G = \inf_S \lambda_{G,S}$ по всем конечным множествам порождающих S группы G .

В книге [1; VII.19.E] был поставлен вопрос: для каких классов групп экспоненциального роста минимальный показатель роста достигается на некотором множестве порождающих? Там же было приведено несложное рассуждение, показывающее, что в свободной группе ранга $k \geq 2$ минимальный показатель роста достигается и равен $2k - 1$.

По-видимому достижимость минимального показателя роста была доказана лишь для указанного выше примера свободных групп и свободных произведений $\mathbb{Z}_p * \mathbb{F}_k$ циклической группы простого порядка p на свободную группу ранга k (см. [2]). Также были найдены примеры групп, для которых минимальный показатель роста не достигается ни на каком множестве порождающих (см. [3]) и даже может быть равен 1 (см. [4]).

В работе будет доказано, что минимальный показатель роста достигается для групп

$$H_{g,n} = \langle s_1, t_1, \dots, s_g, t_g \mid ([s_1, t_1] \cdots [s_g, t_g])^n = 1 \rangle \quad \text{при } n > 1.$$

Эти группы естественным образом связаны с фундаментальными группами двумерных ориентируемых поверхностей, а также хорошо известны как фуксовы группы сигнатуры $(g; n)$. Действительно, добавив один порождающий элемент $z = ([s_1, t_1] \cdots [s_g, t_g])^{-1}$, указанное задание группы $H_{g,n}$ можно переписать как следующее каноническое задание фуксовой группы с одним эллиптическим элементом z порядка n :

$$\langle s_1, t_1, \dots, s_g, t_g, z \mid z[s_1, t_1] \cdots [s_g, t_g] = 1, z^n = 1 \rangle.$$

ЛЕММА. В любом конечном множестве, порождающем группу $G = H_{g,n}$, есть подмножество из $2g$ элементов, порождающее в G подгруппу, изоморфную $\mathbb{F}_{2g}$ или $H_{g,n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K = [G, G]$ и φ – естественный эпиморфизм $G \rightarrow G/K$. Ясно, что факторгруппа $G^{ab} = G/K$ изоморфна свободной абелевой группе ранга $2g$. Далее будет удобно рассматривать группу G^{ab} как модуль размерности $2g$ над кольцом целых чисел и понимать элементы группы еще и как векторы этого модуля.

Пусть группа G порождена некоторым множеством $S = \{a_1, \dots, a_m\}$; тогда G^{ab} порождается системой векторов $\varphi(S) = \{\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_m)\}$. Так как $\dim(G^{ab}) = 2g$, в системе $\varphi(S)$ существует линейно независимая подсистема $\{\varphi(a_{i_1}), \dots, \varphi(a_{i_{2g}})\}$. Докажем, что ее прообраз, множество $T = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_{2g}}\}$, удовлетворяет условию леммы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-65648.2010.1).

Обозначим через $\text{Gr}(T)$ подгруппу, порожденную множеством T в группе G . Через $\text{rank}(K)$, как обычно, обозначается ранг группы K , т.е. наименьшее возможное число порождающих для нее. В силу линейной независимости системы $\varphi(T)$ выполнены равенства

$$\text{rank}(\varphi(\text{Gr}(T))) = \text{rank}(\text{Gr}(T)) = 2g. \quad (1)$$

Будем использовать классический результат (см. [5; предложение III.7.4]) о том, что всякая подгруппа фуксовой группы бесконечного индекса является свободным произведением циклических групп, а подгруппа конечного индекса сама является фуксовой.

Рассмотрим вначале случай $[G : \text{Gr}(T)] = \infty$. Тогда $\text{Gr}(T)$ имеет задание вида

$$\langle t_1, \dots, t_k, z_1, \dots, z_r \mid z_i^{c_i} = 1, i = 1, \dots, r \rangle, \quad (2)$$

ранг которого равен $k + r$ по следствию из теоремы Грушко–Неймана (см. [5; с. 246]). Таким образом, в силу (1) выполнено равенство $2g = k + r$.

Так как G^{ab} – группа без кручения, $\varphi(z_i) = 1$, и поэтому ранг $\varphi(\text{Gr}(T))$ не превосходит k . Отсюда сразу следует $k \geq 2g$, что вместе с неравенством $2g = k + r$ сразу влечет $k = 2g$ и $r = 0$. При этом, очевидно, задание (2) представляет собой задание свободной группы $\mathbb{F}_{2g}$, и лемма в этом случае доказана.

Пусть теперь $\text{Gr}(T)$ есть подгруппа конечного индекса в G , т.е. $[G : \text{Gr}(T)]$ есть некоторое натуральное число. Как уже было сказано, $\text{Gr}(T)$ есть фуксова группа и, значит, она обладает заданием вида

$$\langle x_1, y_1, \dots, x_h, y_h, z_1, \dots, z_r \mid [x_1, y_1] \cdots [x_h, y_h] z_1 z_2 \cdots z_r = 1, z_i^{c_i} = 1, i = 1, \dots, r \rangle. \quad (3)$$

Вначале опять заметим, что при отображении φ элементы z_i переходят в единицу и, значит, при абелизации G подгруппа $\text{Gr}(T)$ переходит в некоторую свободную абелеву группу ранга не более $2h$, откуда в силу равенства (1) получаем $h \geq g$.

Из теоремы 3 работы [6] следует, что ранг фуксовой группы вида (3) равен $2h + r - 1$ при $r > 0$ и равен $2h$ при $r = 0$. Так как $\text{rank}(\text{Gr}(T)) = 2g$, в обоих случаях отсюда следует, что полученное выше неравенство $h \geq g$ влечет точное равенство $h = g$. При этом для количества элементов конечного порядка в задании (3) остаются только два варианта: $r = 0$ или $r = 1$.

Покажем, что на самом деле случай $r = 0$ невозможен. Действительно, в этом случае формула Римана–Гурвица для подгруппы $\text{Gr}(T)$ в группе G имеет следующий вид:

$$2g - 2 = [G : \text{Gr}(T)] \cdot \left(2g - 2 - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right). \quad (4)$$

При $g = 1$ левая часть равенства обращается в 0, а правая – нет, получаем противоречие. При $g > 1$ величины $A = 2g - 2$ и $B = 2g - 2 - (1 - 1/n)$ обе больше единицы, но разница $A - B$ мала, и поэтому A и B не могут быть кратны друг другу с целым множителем $[G : \text{Gr}(T)] \neq 1$. Действительно, $A = 2g - 2 \geq 2$, при этом $B = 2g - 2 - (1 - 1/n) > 1$, а разница $A - B = 1 - 1/n < 1$.

Перейдем теперь к разбору случая $r = 1$. Для $g > 1$ формула Римана–Гурвица

$$2g - 2 - \left(1 - \frac{1}{c_1} \right) = [G : \text{Gr}(T)] \cdot \left(2g - 2 - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)$$

может быть выполнена только в тривиальном случае $[G : \text{Gr}(T)] = 1$, опять же в силу того, что числа $2g - 2 - (1 - 1/c_1)$ и $2g - 2 - (1 - 1/n)$ мало отличаются друг от друга.

При $g = 1$ формула Римана–Гурвица записывается как

$$1 - \frac{1}{c_1} = [G : \text{Gr}(T)] \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right). \quad (5)$$

Так как $1 - 1/c_1$ и $(1 - 1/n)$ – числа, лежащие в полуинтервале $[1/2, 1)$, то равенство (5) возможно лишь в случае $c_1 = n$. Получаем, что $\text{Gr}(T) \cong H_{1,n}$, и лемма в этом случае также верна.

ТЕОРЕМА 1. *Минимальный показатель роста группы $G = H_{g,n}$ при $n > 1$ достигается на некотором множестве порождающих, состоящем из $2g$ элементов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это рассуждение с незначительными изменениями повторяет доказательство основной теоремы из [2].

Пусть $\mu_G = \inf_S \lambda_{G,S}$, где S пробегает только те множества порождающих группы G , которые состоят из $2g$ элементов. Покажем, что для любого множества S порождающих группы G выполнено неравенство

$$\lambda_{G,S} \geq \mu_G. \quad (6)$$

Воспользовавшись леммой, выберем в множестве S подмножество T из $2g$ элементов, такое, что $\text{Gr}(T) \cong H_{g,n}$ или $\text{Gr}(T) \cong \mathbb{F}_{2g}$. В обоих случаях выполнено неравенство

$$\lambda_{\text{Gr}(T),T} \geq \mu_G. \quad (7)$$

Действительно, в случае $\text{Gr}(T) \cong H_{g,n}$ оно является следствием определения μ_G , а в случае $\text{Gr}(T) \cong \mathbb{F}_{2g}$ оно вытекает из оценки $\lambda_{\text{Gr}(T),T} = 4g - 1 \geq \mu_G$. Объединив (7) с очевидным неравенством $\lambda_{G,S} \geq \lambda_{\text{Gr}(T),T}$, получим требуемое неравенство (6).

Очевидно, из (6) следует, что $\lambda_G = \mu_G$, а это значит, что для доказательства теоремы осталось показать, что минимальный показатель роста группы G достигается в классе множеств порождающих, состоящих из $2g$ элементов.

Известно (см. [7; теорема 5]), что всякое множество S порождающих группы $H_{g,n}$, состоящее из $2g$ элементов, может быть приведено цепочкой нильсоновских преобразований к стандартному множеству порождающих $S_0 = \{s_1, t_1, \dots, s_g, t_g\}$. Отсюда следует, что в порождающих $S = \{a_1, \dots, a_{2g}\}$ группа $H_{g,n}$ имеет задание

$$\langle a_1, \dots, a_{2g} \mid R_S(a_1, \dots, a_{2g})^n = 1 \rangle. \quad (8)$$

Для группы с заданием вида (8) в работе [2] была доказана следующая нижняя оценка на показатель экспоненциального роста:

$$\lambda_{G,S} \geq (4g - 1)^{1 - (1 + \lceil \log_3 |R| \rceil) / \lfloor (n-1)|R|/3 \rfloor}. \quad (9)$$

Так как в стандартном задании группы G используется $2g$ порождающих и есть нетривиальное соотношение, из жесткости роста свободных групп (см. [3; теорема 1.1]) следует, что для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено равенство $\lambda_{G,S_0} = (4g - 1)^{1-\varepsilon}$. Пусть тогда l_0 – такое натуральное число, что

$$\varepsilon > \frac{1 + \lceil \log_3 l_0 \rceil}{\lfloor (n-1)l_0/3 \rfloor}; \quad (10)$$

оно существует, так как правая часть неравенства монотонно убывает к 0 при $l_0 \rightarrow \infty$. Тогда получаем, что если в задании (8) длина слова R_S больше l_0 , то выполнено строгое неравенство

$$\lambda_{G,S_R} > \lambda_{G,S_0}. \quad (11)$$

Существует лишь конечное число различных заданий $\mathcal{P}$ группы G с $2g$ порождающими и единственным соотношением, длина которого не превосходит l_0 , и поэтому на множестве $\mathcal{P}$ минимум показателей роста достигается, а из неравенства (11) следует, что этот минимум будет больше, чем у остальных заданий группы G .

В случае $g = 1$ теорему 1 можно уточнить следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. *Минимальный показатель роста группы $G = H_{1,n}$ при $n > 1$ достигается на любом двухэлементном множестве порождающих и равен $1/z_0$, где z_0 – единственный корень многочлена $P_n(z) = z^{2n+1} - 3z^{2n} + 3z - 1$, лежащий в интервале $(1/3, 1/2)$.*

Доказательство. В силу теоремы 1 минимальный показатель роста группы $H_{1,n}$ достигается на некотором множестве порождающих, состоящем из двух элементов.

Пусть $S = \{u, v\}$ – некоторое такое множество порождающих группы G ; тогда, как уже отмечалось, S может быть переведено в S_0 цепочкой нильсеновских преобразований. Каждое такое преобразование переводит коммутатор $W = [x, y]$ в слово вида $KW^\varepsilon K^{-1}$, где $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Значит, в порождающих S группа G имеет задание $G = \langle u, v \mid [u, v]^n = 1 \rangle$. Очевидно, что тогда $F_{G,S}(m) = F_{G,S_0}(m)$ для всех m , и поэтому $\lambda_{G,S} = \lambda_{G,S_0}$.

Из основной теоремы работы [8] легко можно вычислить производящую функцию для сферической функции роста группы $H_{g,n}$ относительно стандартного множества порождающих. В случае $g = 1$ она принимает следующий вид:

$$\Delta_n(z) = \frac{1 + 2z + 2z^2 + \dots + 2z^{2n-2} + 2z^{2n-1} + z^{2n}}{1 - 2z - \dots - 2z^{2n-1} + z^{2n}}.$$

Производящая функция $\Sigma_n(z)$ обычной (шаровой) функции роста $f_{G,S_0}(m)$ получается из $\Delta_n(z)$ делением на $(1 - z)$, и поэтому может быть записана как

$$\Sigma_n(z) = \frac{1 + 2z + 2z^2 + \dots + 2z^{2n-2} + 2z^{2n-1} + z^{2n}}{1 - 3z + 3z^{2n} - z^{2n+1}}. \quad (12)$$

Тогда показатель роста λ_{G,S_0} есть $1/\beta$, где β – радиус круга сходимости ряда Маклорена, задаваемого функцией (12). В нашем случае, когда функция $\Sigma_n(z)$ рациональная, этот радиус совпадает с минимальным абсолютным значением всех полюсов функции.

Напомним, что многочлен из знаменателя дроби (12) отличается от многочлена $P_n(z)$ только знаком, и поэтому имеет те же корни. Легко проверяется, что для любого $n > 1$ на концах интервала $(1/3, 1/2)$ многочлен $P_n(z)$ меняет знак, и поэтому у него есть некоторый действительный корень z_0 , лежащий в этом интервале.

Рассмотрим на комплексной плоскости круг радиуса $1/2$ с центром в точке 0. Для этого круга и монома первой степени многочлена $P_n(z)$ применима теорема Руше о количестве комплексных корней многочлена (см. [9]). Действительно, при $n > 1$ выполнено неравенство

$$3 \cdot \frac{1}{2} > 1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}.$$

Это означает, что внутри круга у многочлена $P_n(z)$ существует ровно один корень, а именно, найденный выше действительный корень z_0 .

Заметим, что многочлен из числителя дроби (12) может быть представлен в виде

$$(z + 1)(z^{2n-1} + \dots + z + 1) = \frac{(z + 1)(z^{2n} - 1)}{z - 1},$$

откуда очевидно, что все его комплексные корни лежат на единичной окружности, и среди них нет z_0 . Таким образом, точка z_0 является минимальным по модулю полюсом функции $\Sigma_n(z)$, что завершает доказательство теоремы.

Приведем вычисленные приближенно значения минимальных показателей роста групп $H_{1,n}$ для $n = 2, \dots, 6$:

$$\begin{aligned} \lambda_{H_{1,2}} &\approx 2,890054, & \lambda_{H_{1,3}} &\approx 2,988825, & \lambda_{H_{1,4}} &\approx 2,998777, \\ \lambda_{H_{1,5}} &\approx 2,999864, & \lambda_{H_{1,6}} &\approx 2,999985. \end{aligned}$$

Имеет место предельное равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{H_{1,n}} = 3$, которое следует из теоремы 2 и нижней оценки показателя роста (9), примененной к множеству порождающих S_0 .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. de la Harpe, *Topics in Geometric Group Theory*, Chicago Lectures in Math., Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 2000. [2] А. Л. Таламбуца, *Матем. заметки*, **78**:4 (2005), 614–618. [3] A. Sambusetti, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **35**:4 (2002), 477–488. [4] J. S. Wilson, *Invent. Math.*, **155**:2 (2004), 287–303. [5] Р. Линдон, П. Шупп, *Комбинаторная теория групп*, Мир, М., 1980. [6] N. Peczynski, G. Rosenberger, H. Zieschang, *Invent. Math.*, **29**:2 (1975), 161–180. [7] G. Rosenberger, *Monatsh. Math.*, **84**:1 (1977), 55–68. [8] M. Stall, *Some Group Presentations with Rational Growth*, <http://www.faculty.jacobs-university.de/mstoll/papers/ratgrow.dvi>. [9] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*. т. I: *Начала теории*, Наука, М., 1967.

А. Л. Таламбуца

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: altal@mi.ras.ru

Поступило

18.02.2010