Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Барсегян, О некоторых приложениях неравенств типа Либа–Тирринга в спектральной теории, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 2, 173–177

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8801>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:20:38

О некоторых приложениях неравенств типа Либа–Тирринга в спектральной теории

Д. С. Барсегян

Установлены неравенства типа Либа–Тирринга. Даны приложения этих неравенств к оценкам спектра неограниченных операторов.

Библиография: 7 названий.

Ниже мы используем следующие обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, \dots$, – множество действительных чисел и N -мерное действительное координатное пространство соответственно, Δ – оператор Лапласа. Наконец, для функции $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ положим $f_+(z) = \max\{f(z), 0\}$.

В работе автора [1] с использованием метода работы Кашина [2] была установлена

ТЕОРЕМА А. *Существует абсолютная постоянная C такая, что для произвольной ортонормированной системы действительнзначных функций*

$$\Phi = \{\varphi_j(x, y)\}_{j=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^2), \quad N = 1, 2, \dots,$$

выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_\Phi^2 dx dy \leq C(\ln N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |xy| |\widehat{\varphi}_j|^2(x, y) dx dy; \quad (1)$$

в (1) и ниже

$$\rho_\Phi \equiv \sum_{j=1}^N \varphi_j^2(x, y)$$

и для функции $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$

$$\widehat{f}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(\xi, \eta) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Теорема А относится к группе неравенств для конечных ортонормированных систем, в которой первым результатом было следующее неравенство Либа–Тирринга (см. [3]).

ТЕОРЕМА В. Для произвольной ортонормированной системы $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_\Phi^2 dx dy \leq C \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2) |\widehat{\varphi}_j|^2(x, y) dx dy, \quad (2)$$

где C – абсолютная постоянная.

Неравенства типа Либа–Тирринга были предметом исследований многих авторов (см., в частности, [1], [2], [4], [5]). Хорошо известно, что эти неравенства находят применения в спектральной теории. Ниже теорема А применяется для доказательства следующего результата.

ТЕОРЕМА 1. Оператор $L\psi = -\Delta\psi + |xy|\psi$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет дискретный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ с $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $\lambda_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, и существует такая абсолютная положительная постоянная C , что выполняется оценка

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \geq C \frac{N^{3/2}}{(1 + \ln N)^{1/2}}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Дискретность спектра оператора L проверяется с помощью классического критерия Молчанова [6]. Имеет место

ЛЕММА. Пусть неотрицательный потенциал Q удовлетворяет следующему условию: для любого фиксированного числа α

$$\inf_{|x| \geq \alpha, |y| \geq R} Q(x, y) \rightarrow \infty, \quad \inf_{|y| \geq \alpha, |x| \geq R} Q(x, y) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty.$$

Тогда дифференциальный оператор

$$L: L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2), \quad L = -\Delta\psi + Q(x, y)\psi,$$

имеет дискретный спектр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 использует метод, сообщенный автору профессором Ари Лаптевым.

Пусть $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ – ортонормированная система собственных функций, соответствующих собственным числам λ_j . Тогда

$$-\Delta\psi_j + |xy|\psi_j = \lambda_j\psi_j. \quad (4)$$

Вычтем из правой и левой части (4) $\lambda\psi_j$. Затем умножим обе части на ψ_j , проинтегрируем и просуммируем. Используя основные свойства преобразования Фурье, получим

$$\sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2 - \lambda) |\widehat{\psi}_j|^2 dx dy + \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |xy| \psi_j^2 dx dy = \sum_{j=1}^N (\lambda_j - \lambda). \quad (5)$$

Следовательно,

$$-\sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} [\lambda - x^2 - y^2]_+ |\widehat{\psi}_j|^2 dx dy + \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |xy| \psi_j^2 dx dy \leq -\sum_{j=1}^N (\lambda - \lambda_j).$$

После применения неравенства Коши и теоремы А для системы $\{\widehat{\psi}_j\}_{j=1}^N$ имеем

$$-\left(\int_{\mathbb{R}^2} ([\lambda - x^2 - y^2]_+)^2 dx dy\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\widehat{\Psi}}^2 dx dy\right)^{1/2} + \frac{C}{1 + \ln N} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\widehat{\Psi}}^2 dx dy \\ \leq \sum_{j=1}^N (\lambda_j - \lambda).$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) := -\left(\int_{\mathbb{R}^2} [\lambda - x^2 - y^2]_+^2 dx dy\right)^{1/2} z + \frac{C}{1 + \ln N} z^2.$$

Нетрудно проверить, что минимум функции f достигается в точке

$$z_0 = \frac{1 + \ln N}{2C} \left(\int_{\mathbb{R}^2} [\lambda - x^2 - y^2]_+^2 dx dy\right)^{1/2}.$$

После подстановки значения функции в точке z_0 получим

$$C'(1 + \ln N)\lambda^3 \geq \sum_{j=1}^N (\lambda - \lambda_j). \quad (6)$$

Применим преобразование Лежандра (см. [7; с. 229]) к функции $g(\lambda) = C'(1 + \ln N)\lambda^3$ в точке $p = N$. После некоторых вычислений находим, что

$$\widetilde{g}(N) = \frac{2N^{3/2}}{3\sqrt{3C'}(1 + \ln N)}, \quad \text{где} \quad C' = \frac{1}{4C} \int_{\mathbb{R}^2} [1 - x^2 - y^2]_+^2 dx dy.$$

Следовательно, в силу неравенства (6)

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \geq C'' \frac{N^{3/2}}{(1 + \ln N)^{1/2}} \quad \text{с константой} \quad C'' = \frac{2}{3\sqrt{3C'}}.$$

Имеют место следующие аналогии теоремы А и теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Для любого натурального числа p существует постоянная C_p такая, что для произвольной ортонормированной системы действительных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi}^{p+1} dx dy \leq C_p (\ln^p N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |x|^p |y|^p |\widehat{\varphi}_j|^2(x, y) dx dy. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 3. Для любого натурального числа p оператор $L\psi = -\Delta\psi + |xy|^p\psi$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет дискретный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ с $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $\lambda_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, и существует такая абсолютная положительная постоянная C'_p , что выполняется оценка

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \geq C'_p \frac{N^{(2p+1)/(p+1)}}{(1 + \ln^p N)^{1/(p+1)}}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 4. Для любого натурального числа $d \geq 2$ существует постоянная C_d такая, что для произвольной ортонормированной системы действительнзначных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\Phi}^2 dx_1 \dots dx_d \leq C_d (\ln^{d-1} N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^d} |x_1 \dots x_d| |\widehat{\varphi}_j|^2(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 5. Оператор $L\psi = -\Delta\psi + |x_1 \dots x_d|\psi$ в $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 2$, имеет дискретный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ с $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $\lambda_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, и существует такая абсолютная положительная постоянная C'_d , что выполняется оценка

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \geq C'_d \frac{N^{(4+d)/(2+d)}}{(1 + \ln N)^{(2d-2)/(2+d)}}, \quad N = 1, 2, \dots. \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 6. Для произвольной ортонормированной системы действительнзначных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ и любого $p \geq 1$, $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi}^{p+1} dx dy \leq C_p N^{\{p\}} (\ln^{[p]} N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |xy|^p |\widehat{\varphi}_j|^2(x, y) dx dy, \quad (11)$$

где постоянная C_p зависит только от указанного индекса p , $\{p\}$ и $[p]$ – дробная и целая части p соответственно.

ТЕОРЕМА 7. Оператор $L\psi = -\Delta\psi + |xy|^p\psi$ с числом $p \geq 1$, $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, в $L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет дискретный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ с $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $\lambda_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, и существует такая абсолютная положительная постоянная C'_p , что выполняется оценка

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \geq C'_p \frac{N^{(2p+1-\{p\})/(p+1)}}{(\ln^{[p]} N + 1)^{1/(p+1)}}, \quad N = 1, 2, \dots. \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 8. Для произвольных натуральных чисел $p \geq q$ существует абсолютная постоянная $C_{p,q}$ такая, что для произвольной ортонормированной системы действительнзначных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi}^{p+1} dx dy \leq C_{p,q} (\ln^q N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |xy|^q (x^2 + y^2)^{p-q} |\widehat{\varphi}_j|^2(x, y) dx dy. \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 9. Оператор $L\psi = -\Delta\psi + |xy|^q(x^2 + y^2)^{p-q}\psi$ с натуральными числами $p \geq q$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет дискретный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ с $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $\lambda_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, и существует такая абсолютная положительная постоянная $C'_{p,q}$, что выполняется оценка

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \geq C'_{p,q} \frac{N^{(2p+1)/(p+1)}}{(1 + \ln^q N)^{1/(p+1)}}, \quad N = 1, 2, \dots. \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 10. Для любых натуральных чисел p и q существует абсолютная постоянная $C_{p,q}$ такая, что для произвольной ортонормированной системы действительных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi}^{p+q+3/2} d\xi d\eta \leq C_{p,q} (\ln^p N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\xi\eta|^p (|\xi|^{2q+1} + |\eta|^{2q+1}) |\widehat{\varphi_j}|^2(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 11. Оператор $L\psi = -\Delta\psi + |xy|^p(|x|^{2q+1} + |y|^{2q+1})\psi$ с натуральными числами p и q в $L^2(\mathbb{R}^2)$ имеет дискретный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ с $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $\lambda_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, и существует такая абсолютная положительная постоянная $C'_{p,q}$, что выполняется оценка

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \geq C'_{p,q} \frac{N^{(4p+4q+4)/(2p+2q+3)}}{(1 + \ln^{p+1/2} N)^{2/(2p+2q+3)}}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Б. С. Кашину и профессору Ари Лаптеву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. С. Барсегян, “О возможности усиления неравенства Либа–Тирринга”, *Матем. заметки*, **86:6** (2009), 803–818.
- [2] Б. С. Кашин, “Об одном классе неравенств для ортонормированных систем”, *Матем. заметки*, **80:2** (2006), 204–208.
- [3] E. H. Lieb, W. E. Thirring, “Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities”, *Studies in Mathematical Physics. Essays in Honor of Valentine Bargmann*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1976, 269–303.
- [4] А. А. Ильин, “Интегральные неравенства Либа–Тирринга и их приложения к аттракторам уравнений Навье–Стокса”, *Матем. сб.*, **196:1** (2005), 33–66.
- [5] С. В. Асташкин, “Неравенство Либа–Тирринга для L_p -норм”, *Матем. заметки*, **83:2** (2008), 163–169.
- [6] А. М. Молчанов, “Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных операторов второго порядка”, *Труды ММО*, **2**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1953, 169–199.
- [7] *Математическая энциклопедия*. т. 3, Коо – Од, Советская энциклопедия, М., 1982.

Д. С. Барсегян

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: dianabar@bk.am

Поступило

25.03.2010