Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Динь Чунг Хоа, О. Е. Тихонов, Взвешенные неравенства монотонности для следов на операторных алгебрах, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 2, 193–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8802>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:29:24

Взвешенные неравенства монотонности для следов на операторных алгебрах

Динь Чунг Хоа, О. Е. Тихонов

Изучаются неравенства

$$\tau(w(A)^{1/2}f(A)w(A)^{1/2}) \leq \tau(w(A)^{1/2}f(B)w(A)^{1/2}), \quad A \leq B,$$

где τ – след на алгебре фон Неймана или C^* -алгебре, A и B – самосопряженные элементы рассматриваемой алгебры, f и w – вещественные функции, причем “весовая” функция w неотрицательна.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. В работе [1] для эрмитовых матриц A , B , вещественных функций f и неотрицательных весовых функций w изучались неравенства

$$\text{Tr}(w(A)f(A)) \leq \text{Tr}(w(A)f(B)), \quad A \leq B.$$

Такие неравенства можно рассматривать как промежуточный случай между хорошо изученными матричными неравенствами, $f(A) \leq f(B)$, и неравенствами монотонности для следа $\text{Tr}(f(A)) \leq \text{Tr}(f(B))$.

Цель настоящей работы состоит в перенесении результатов [1] со случая следа на полной матричной алгебре на следы, в том числе неограниченные, на алгебрах фон Неймана и C^* -алгебрах [2], [3]. В работе получены условия на вещественную функцию f , достаточные для того, чтобы выполнялись соответствующие “взвешенные” неравенства монотонности (теорема 3 и следствие 2). Для весовой функции $w(x) = x$, $x \geq 0$, и точного нормального конечного следа τ на алгебре фон Неймана исчерпывающим образом описан класс функций f на $\mathbb{R}^+$, для которых выполняется неравенство

$$\tau(w(A)^{1/2}f(A)w(A)^{1/2}) \leq \tau(w(A)^{1/2}f(B)w(A)^{1/2})$$

как только $0 \leq A \leq B$ (теорема 1). В п. 4 список неравенств на операторных алгебрах, выделяющих следы в некоторых классах весов [4]–[7], пополнен взвешенными неравенствами.

2. Обозначения, некоторые определения и предварительные сведения.

Все рассматриваемые в работе C^* -алгебры будем считать (фактически для простоты изложения) обладающими единичными элементами, обозначаемыми I . Для C^* -алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\text{sa}}$ и $\mathcal{A}^+$ будем обозначать ее подмножества самосопряженных и положительных элементов соответственно. Для элемента $A \in \mathcal{A}^{\text{sa}}$ через $\sigma(A)$

обозначаем его спектр [2; 1.1.5], через A^+ и A^- – положительную и отрицательную части [2; 1.6.5]. Через $\mathcal{M}^{\text{pr}}$ будем обозначать множество проекторов из алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Для $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ через $P^\perp$ обозначаем $I - P$.

Напомним (см. [2; 6.1.1]), что *следом* на C^* -алгебре $\mathcal{A}$ называется отображение $\tau: \mathcal{A}^+ \rightarrow [0, +\infty]$ такое, что

$$\begin{aligned}\tau(A + B) &= \tau(A) + \tau(B), & A, B \in \mathcal{A}^+, \\ \tau(\lambda A) &= \lambda \tau(A), & A \in \mathcal{A}^+, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+\end{aligned}$$

(считаем $0 \cdot (+\infty) = 0$), и

$$\tau(AA^*) = \tau(A^*A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

Из последнего условия следует, что $\tau(U^*AU) = \tau(A)$ для любого $A \in \mathcal{A}^+$ и любого унитарного $U \in \mathcal{A}$. Заметим, что если τ – след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, то

$$\tau(PAP) \leq \tau(A) \quad (2.1)$$

для любых $A \in \mathcal{M}^+$ и $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$. Действительно, в этом случае $P - P^\perp$ – самосопряженный унитарный оператор и, следовательно,

$$\begin{aligned}2\tau(A) &= \tau((P + P^\perp)A(P + P^\perp)) + \tau((P - P^\perp)A(P - P^\perp)) \\ &= 2\tau(PAP + P^\perp AP^\perp) \geq 2\tau(PAP).\end{aligned}$$

Отметим еще, что конечный след на C^* -алгебре $\mathcal{A}$ однозначно продолжается до положительного линейного функционала на $\mathcal{A}$. Это позволяет отождествлять конечные следы и положительные *следовые* функционалы, т.е. такие положительные функционалы τ на $\mathcal{A}$, что $\tau(AB) = \tau(BA)$ для любых $A, B \in \mathcal{A}$.

По поводу всех остальных используемых в статье понятий мы отсылаем читателя к монографиям [2], [3] и [8].

3. Неравенства для следов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть τ – точный, нормальный, положительный следовый функционал на некоммутативной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Пусть $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ – борелевская функция, ограниченная на ограниченных подмножествах $\mathbb{R}^+$. Тогда неравенство

$$\tau(A^{1/2}f(A)A^{1/2}) \leq \tau(A^{1/2}f(B)A^{1/2}) \quad (3.1)$$

имеет место для любой пары $A, B \in \mathcal{M}^+$ такой, что $A \leq B$, тогда и только тогда, когда функция $g(x) = xf(x)$ выпукла на $\mathbb{R}^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $g(x) = xf(x)$ выпукла на $\mathbb{R}^+$. Возьмем $A, B \in \mathcal{M}^+$ такие, что $A \leq B$. Как хорошо известно, найдется оператор $U \in \mathcal{M}$ такой, что $\|U\| \leq 1$ и $A^{1/2} = UB^{1/2}$. Воспользовавшись неравенством Йенсена для сжатий (см., например, [9; следствие 3] или [10; теорема 11]), получаем

$$\begin{aligned}\tau(A^{1/2}f(B)A^{1/2}) &= \tau(UB^{1/2}f(B)B^{1/2}U^*) = \tau(Ug(B)U^*) \geq \tau(g(UBU^*)) \\ &= \tau(A^{1/2}f(A)A^{1/2}).\end{aligned}$$

Докажем обратное утверждение. Возьмем произвольные операторы $A, C \in \mathcal{M}^+$. Неравенство (3.1) влечет

$$\begin{aligned}\tau(Af(A)) &\leq \tau(A^{1/2}f(A+C)A^{1/2}) = \tau(Af(A+C)), \\ \tau(Cf(C)) &\leq \tau(C^{1/2}f(A+C)C^{1/2}) = \tau(Cf(A+C)).\end{aligned}$$

Суммируя эти два неравенства, получим неравенство супераддитивности

$$\tau(g(A)) + \tau(g(C)) \leq \tau(g(A+C)).$$

Согласно [7; теорема 1] отсюда следует, что $g(x)$ выпукла на $\mathbb{R}^+$.

Доказательство следующих теорем 2 и 3 адаптировано из [11].

ТЕОРЕМА 2. Пусть τ – след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, $A \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$, функция $w: \sigma(A) \rightarrow \mathbb{R}^+$ ограничена и измерима по Борелю, и пусть $A = A_1 - A_2$ для некоторых $A_1, A_2 \in \mathcal{M}^+$. Тогда

$$\tau(w(A)^{1/2}A^+w(A)^{1/2}) \leq \tau(w(A)^{1/2}A_1w(A)^{1/2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $P = \chi_{(0,+\infty)}(A)$. Тогда $A^+ = PAP$. Учитывая перестановочность проектора P и оператора $w(A)$ и неравенство (2.1), имеем

$$\begin{aligned}\tau(w(A)^{1/2}A^+w(A)^{1/2}) &\leq \tau(w(A)^{1/2}PAPw(A)^{1/2}) + \tau(w(A)^{1/2}PA_2Pw(A)^{1/2}) \\ &= \tau(w(A)^{1/2}P(A+A_2)Pw(A)^{1/2}) \\ &= \tau(Pw(A)^{1/2}A_1w(A)^{1/2}P) \leq \tau(w(A)^{1/2}A_1w(A)^{1/2}).\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть τ – след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, операторы $A, B \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$ таковы, что $A \leq B$, и функция $w: \sigma(A) \rightarrow \mathbb{R}^+$ ограничена и измерима по Борелю. Тогда

$$\tau(w(A)^{1/2}A^+w(A)^{1/2}) \leq \tau(w(A)^{1/2}B^+w(A)^{1/2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что $A = B^+ - (B^- + (B - A))$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть τ – полунепрерывный снизу по норме след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, f – непрерывная неотрицательная выпуклая монотонно неубывающая функция на выпуклом подмножестве Ω числовой прямой, w – неотрицательная борелевская функция на Ω , ограниченная на компактных подмножествах Ω . Тогда

$$\tau(w(A)^{1/2}f(A)w(A)^{1/2}) \leq \tau(w(A)^{1/2}f(B)w(A)^{1/2})$$

для любой пары операторов $A, B \in \mathcal{M}^{\text{sa}}$ таких, что $\sigma(A), \sigma(B) \subset \Omega$ и $A \leq B$.

В случае конечного следа условие неотрицательности функции f можно отбросить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем операторы A и B , удовлетворяющие условиям в формулировке теоремы, возьмем некоторый отрезок $[\alpha, \beta]$ такой, что $\sigma(A), \sigma(B) \subset [\alpha, \beta] \subset \Omega$, и всюду в дальнейшем доказательстве будем считать, не ограничивая этим общности, что $\Omega = [\alpha, \beta]$.

Рассмотрим прежде случай, когда $f(x) = (x - \lambda)^+$, где λ – некоторое действительное число. Положим $w_1(x) = w(x + \lambda)$. Согласно следствию 1 в этом случае имеем

$$\begin{aligned}\tau(w(A)^{1/2}f(A)w(A)^{1/2}) &= \tau(w_1(A - \lambda I)^{1/2}(A - \lambda I)^+w_1(A - \lambda I)^{1/2}) \\ &\leq \tau(w_1(A - \lambda I)^{1/2}(B - \lambda I)^+w_1(A - \lambda I)^{1/2}) \\ &= \tau(w(A)^{1/2}f(B)w(A)^{1/2}).\end{aligned}$$

Предположим теперь, что дополнительно к условиям в формулировке теоремы функция f на $[\alpha, \beta]$ кусочно линейна. Нетрудно понять, что она может быть представлена в виде

$$f(x) = \mu_0 + \sum_{i=1}^k \mu_i (x - \lambda_i)^+,$$

где $\alpha \leq \lambda_i \leq \beta$, $\mu_i \geq 0$. Тогда из предыдущей выкладки получаем

$$\begin{aligned}\tau(w(A)^{1/2}f(A)w(A)^{1/2}) &= \tau\left(w(A)^{1/2}\left(\mu_0 I + \sum_{i=1}^k \mu_i (A - \lambda_i I)^+\right)w(A)^{1/2}\right) \\ &= \mu_0 \tau(w(A)) + \sum_{i=1}^k \mu_i \tau(w(A)^{1/2}(A - \lambda_i I)^+w(A)^{1/2}) \\ &\leq \mu_0 \tau(w(A)) + \sum_{i=1}^k \mu_i \tau(w(A)^{1/2}(B - \lambda_i I)^+w(A)^{1/2}) \\ &= \tau(w(A)^{1/2}f(B)w(A)^{1/2}).\end{aligned}$$

Пусть, наконец, f – некоторая функция на $\Omega = [\alpha, \beta]$, удовлетворяющая условиям в формулировке теоремы. Мы всегда можем построить такую последовательность $\{f_n\}$ кусочно линейных функций на $[\alpha, \beta]$, удовлетворяющих упомянутым условиям, что эта последовательность поточечно монотонно не убывает и равномерно сходится к f на $[\alpha, \beta]$. Тогда

$$\tau(w(A)^{1/2}f_n(A)w(A)^{1/2}) \leq \tau(w(A)^{1/2}f_n(B)w(A)^{1/2})$$

для любого натурального n и из полунепрерывности следа τ получаем

$$\begin{aligned}\tau(w(A)^{1/2}f(A)w(A)^{1/2}) &= \lim_n \tau(w(A)^{1/2}f_n(A)w(A)^{1/2}) \leq \lim_n \tau(w(A)^{1/2}f_n(B)w(A)^{1/2}) \\ &= \tau(w(A)^{1/2}f(B)w(A)^{1/2}).\end{aligned}$$

Для частного случая конечного следа можно в предыдущих выкладках считать, что $\mu_0 \in \mathbb{R}$, и таким образом получить доказательство последнего утверждения теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть τ – полуконечный полунепрерывный снизу след на C^* -алгебре $\mathcal{A}$ [2; 6.1.1], f – непрерывная неотрицательная выпуклая монотонно неубывающая функция на выпуклом подмножестве Ω числовой прямой, w – неотрицательная непрерывная функция на Ω . Тогда

$$\tau(w(A)^{1/2}f(A)w(A)^{1/2}) \leq \tau(w(A)^{1/2}f(B)w(A)^{1/2})$$

для любой пары операторов $A, B \in \mathcal{A}^{\text{sa}}$ таких, что $\sigma(A), \sigma(B) \subset \Omega$ и $A \leq B$.

В случае конечного следа условие неотрицательности функции f можно отбросить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π – представление $\mathcal{A}$, связанное со следом τ [2; 6.6.4]. Тогда для “естественного” точного нормального полуконечного следа $\hat{\tau}$ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M} = \pi(\mathcal{A})''$, порожденной $\pi(\mathcal{A})$ [2; A60], выполняется соотношение $\hat{\tau}(\pi(A)) = \tau(A)$, $A \in \mathcal{A}^+$ [2; предложение 6.6.5 (i)], и для любой пары операторов $A, B \in \mathcal{A}^{\text{sa}}$ таких, что $\sigma(A), \sigma(B) \subset \Omega$ и $A \leq B$, имеем

$$\begin{aligned} \tau(w(A)^{1/2}f(A)w(A)^{1/2}) &= \hat{\tau}(w(\pi(A)^{1/2})f(\pi(A))w(\pi(A)^{1/2})) \\ &\leq \hat{\tau}(w(\pi(A)^{1/2})f(\pi(B))w(\pi(A)^{1/2})) \\ &= \tau(w(A)^{1/2}f(B)w(A)^{1/2}). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неравенства теоремы 3 и следствия 2, очевидно, выполняются для любой операторно монотонной функции f на Ω . Отметим, что класс таких функций кардинально отличается от рассмотренных в теореме 3 и следствии 2. В частности, из монотонности операции перехода к носителю на множестве положительных операторов нетрудно вывести, что в теореме 2 требование непрерывности f является излишним и в случае, когда Ω есть, скажем, отрезок $[\alpha, \beta]$, функция f может иметь разрыв в точке β .

4. Характеризация следов взвешенными неравенствами. Заметим, что для следового функционала τ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ и любых операторов $A \in \mathcal{M}^+$, $C \in \mathcal{M}$ выполняется равенство

$$\frac{1}{2}\tau(AC + CA) = \tau(A^{1/2}CA^{1/2}).$$

Поэтому следующее предложение дополняет теорему 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть нормальный положительный функционал φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ и борелевская функция $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, ограниченная на ограниченных подмножествах $\mathbb{R}^+$, таковы, что

$$\varphi(Af(A)) \leq \frac{1}{2}\varphi(Af(B) + f(B)A) \quad (4.1)$$

для любых $A, B \in \mathcal{M}^+$, удовлетворяющих $A \leq B$. Тогда либо f постоянна на $(0, +\infty)$, либо функционал φ следовый.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (4.1) влечет, что для любых $A, C \in \mathcal{M}^+$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \varphi(Af(A)) &\leq \frac{1}{2}\varphi(Af(A+C) + f(A+C)A), \\ \varphi(Cf(C)) &\leq \frac{1}{2}\varphi(Cf(A+C) + f(A+C)C). \end{aligned}$$

Суммируя их, получаем

$$\varphi(g(A)) + \varphi(g(C)) \leq \varphi(g(A + C)),$$

где $g(x) = xf(x)$, и для завершения доказательства остается применить [7; теорема 1].

Всюду далее будем считать, что r – некоторое неотрицательное число. Как частные случаи теоремы 3 и следствия 2 имеем выполнение неравенства

$$\tau(A^{2r+2}) \leq \tau(A^r B^2 A^r), \quad 0 \leq A \leq B,$$

если τ – нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана или конечный след на C^* -алгебре.

ЛЕММА 1. Пусть φ – такой нормальный положительный функционал на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, что

$$\varphi(A^{2r+2}) \leq \varphi(A^r B^2 A^r) \quad (4.2)$$

для любых $A, B \in \mathcal{M}^+$, удовлетворяющих $A \leq B$. Тогда функционал φ следовый.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для полной матричной алгебры $M_n(\mathbb{C})$ утверждение леммы доказано в [12] и [13] ($r = 0$) и [1; теорема 6] ($r > 0$). Ниже показывается, что аналогично тому, как было проделано в ряде других подобных случаев (см. [4] или [7]), доказательство для произвольной алгебры фон Неймана сводится к случаю алгебры $M_2(\mathbb{C})$.

Для того чтобы доказать, что функционал φ следовый, достаточно показать, что $\varphi(P_1) = \varphi(P_2)$ для любой пары P_1, P_2 взаимно ортогональных эквивалентных проекторов [4] (см. также [7; лемма 2]). Чтобы сделать это, возьмем произвольный ненулевой частично изометрический оператор V из $\mathcal{M}$, положим $P_1 = V^*V$, $P_2 = VV^*$ и рассмотрим в редуцированной алгебре $(P_1 + P_2)\mathcal{M}(P_1 + P_2)$ *-подалгебру $\mathcal{N}$, порожденную оператором V . Тогда $\mathcal{N}$ изоморфна $M_2(\mathbb{C})$, а неравенство (4.2) остается справедливым для операторов из $\mathcal{N}$ и ограничения функционала φ на $\mathcal{N}$. Согласно упомянутым выше результатам такое ограничение является следовым функционалом на $\mathcal{N}$, поэтому $\varphi(P_1) = \varphi(P_2)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть φ – такой нормальный полуконечный вес (см. [8; определение VII.1.1] или, например, [6]) на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, что

$$\varphi(A^{2r+2}) \leq \varphi(A^r B^2 A^r)$$

для любых $A, B \in \mathcal{M}^+$, удовлетворяющих $A \leq B$. Тогда φ – след.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что для любого проектора P с конечным весом редуцированный вес φ_P на редуцированной алгебре $P\mathcal{M}P$ является следом. Поэтому φ – след по [6; лемма 2].

ТЕОРЕМА 5. Пусть φ – такой положительный функционал на C^* -алгебре $\mathcal{A}$, что

$$\varphi(A^{2r+2}) \leq \varphi(A^r B^2 A^r) \quad (4.3)$$

для любых $A, B \in \mathcal{A}^+$, удовлетворяющих $A \leq B$. Тогда функционал φ следовый.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к универсальной обертывающей алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ [3; III.2]. Пусть π – соответствующее универсальное представление C^* -алгебры $\mathcal{A}$ и $\widehat{\varphi}$ – положительный нормальный функционал на $\mathcal{M}$ такой, что $\widehat{\varphi}(\pi(A)) = \varphi(A)$ для $A \in \mathcal{A}$. Возьмем операторы $\widehat{A}, \widehat{B} \in \mathcal{M}^+$, удовлетворяющие $\widehat{A} \leq \widehat{B}$, и положим $\widehat{C} = \widehat{B} - \widehat{A}$. Из теоремы Капланского о плотности следует, что в $\mathcal{A}^+$ найдутся ограниченные сети $\{A_\alpha\}$ и $\{C_\alpha\}$ такие, что $\pi(A_\alpha) \rightarrow \widehat{A}$ и $\pi(C_\alpha) \rightarrow \widehat{C}$ в сильной операторной топологии. Используя (4.3) и непрерывность соответствующих операций в сильной операторной топологии, теперь несложно убедиться, что $\widehat{\varphi}(\widehat{A}^{2r+2}) \leq \widehat{\varphi}(\widehat{A}^r \widehat{B}^2 \widehat{A}^r)$. По лемме 1 $\widehat{\varphi}$ – следовый функционал на $\mathcal{M}$, поэтому φ – следовый функционал на $\mathcal{A}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть C^* -алгебра $\mathcal{A}$ такова, что

$$A^{2r+2} \leq A^r B^2 A^r$$

для любых $A, B \in \mathcal{A}^+$, удовлетворяющих $A \leq B$. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого положительного функционала φ на $\mathcal{A}$ выполняется неравенство (4.3). Это влечет, что любой положительный функционал на $\mathcal{A}$ следовый, и, значит, алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна.

Заметим, что при $r = 0$ следствие 3 есть не что иное как известный критерий Огасавары коммутативности C^* -алгебры [14]. Подчеркнем еще, что теоремы 4 и 5 в случае $r = 0$ показывают, что выполнение неравенства $\varphi(A^2) \leq \varphi(B^2)$, $0 \leq A \leq B$, выделяет следы среди нормальных полуконечных весов на алгебре фон Неймана и следовые функционалы среди положительных функционалов на C^* -алгебре.

Линейное отображение T из C^* -алгебры $\mathcal{A}$ в некоторое векторное пространство будем называть *следовым*, если $T(AB) = T(BA)$ для любых $A, B \in \mathcal{A}$ (ср. [15; предложение 8.1.1]). В приведенном ниже следствии мы считаем, что $\mathcal{E}$ – упорядоченное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, причем конус $\mathcal{K}$ его положительных элементов таков, что дуальный к нему конус $\mathcal{K}'$ положительных линейных функционалов на $\mathcal{E}$ разделяет точки из $\mathcal{E}$ и определяет порядок на $\mathcal{E}$. Через $\mathcal{E}_{\mathbb{C}} = \mathcal{E} \oplus i\mathcal{E}$ обозначаем комплексификацию $\mathcal{E}$. Рассматриваем $\mathcal{E}$ как подмножество $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ и отождествляем функционалы из $\mathcal{K}'$ с их продолжениями по линейности на $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Положительное линейное отображение T из C^* -алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ является следовым тогда и только тогда, когда

$$T(A^{2r+2}) \leq T(A^r B^2 A^r) \quad (4.4)$$

для любых $A, B \in \mathcal{A}^+$, удовлетворяющих $A \leq B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что утверждение следствия 2 обобщается со случая конечного следа на положительные следовые отображения (при тех ограничениях, которые были указаны выше). Пусть положительное отображение $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ следовое, а функции w , f и операторы A , B такие же, как в формулировке следствия 2. Тогда для любого $\psi \in \mathcal{K}'$ суперпозиция $\psi \circ T$ есть следовый функционал на $\mathcal{A}$, поэтому

$$\psi(T(w(A)^{1/2} f(A) w(A)^{1/2})) \leq \psi(T(w(A)^{1/2} f(B) w(A)^{1/2})).$$

При наложенных ограничениях отсюда следует, что

$$T(w(A)^{1/2}f(A)w(A)^{1/2}) \leq T(w(A)^{1/2}f(B)w(A)^{1/2}).$$

Пусть теперь T – отображение, для которого выполняется неравенство (4.4). Тогда для любого $\psi \in \mathcal{H}'$ выполняется неравенство $\psi(T(A^{2r+2})) \leq \psi(T(A^r B^2 A^r))$, и по теореме 5 $\psi \circ T$ – следовый функционал на $\mathcal{A}$. Отсюда заключаем, что отображение T следовое.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dinh Trung Hoa, O.E. Tikhonov, “Weighted trace inequalities of monotonicity”, *Lobachevskii J. Math.*, **26** (2007), 63–67.
- [2] Ж. Диксмье, *C*-алгебры и их представления*, Наука, М., 1974.
- [3] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras*. v.I, Springer-Verlag, New York, NY, 1979.
- [4] L. T. Gardner, “An inequality characterizes the trace”, *Canad. J. Math.*, **31**:6 (1979), 1322–1328.
- [5] D. Petz, J. Zemánek, “Characterizations of the trace”, *Linear Algebra Appl.*, **111** (1988), 43–52.
- [6] А. И. Столяров, О. Е. Тихонов, А. Н. Шерстнев, “Характеризация нормальных следов на алгебрах фон Неймана неравенствами для модуля”, *Матем. заметки*, **72**:3 (2002), 448–454.
- [7] O.E. Tikhonov, “Subadditivity inequalities in von Neumann algebras and characterization of tracial functionals”, *Positivity*, **9**:2 (2005), 259–264.
- [8] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras*, Operator Algebras and Non-Commutative Geometry, 6. v. II, Encyclopaedia Math. Sci., **125**, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [9] О. Е. Тихонов, “Выпуклые функции и неравенства для следа”, Конструктивная теория функций и функциональный анализ, **6**, КГУ, Казань, 1987, 77–82.
- [10] L. G. Brown, H. Kosaki, “Jensen’s inequality in semi-finite von Neumann algebras”, *J. Operator Theory*, **23**:1 (1990), 3–19.
- [11] O.E. Tikhonov, “Trace inequalities for spaces in spectral duality”, *Studia Math.*, **104**:1 (1993), 99–110.
- [12] A. M. Bikchentaev, O.E. Tikhonov, “Characterization of the trace by monotonicity inequalities”, *Linear Algebra Appl.*, **422**:1 (2007), 274–278.
- [13] T. Sano, T. Yatsu, “Characterizations of tracial property via inequalities”, *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **7**:1 (2006), Article No. 36.
- [14] T. Ogasawara, “A theorem on operator algebras”, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A*, **18** (1955), 307–309.
- [15] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*. v. II, Pure Appl. Math., **100**, Advanced Theory, Academic Press, Orlando, Fl, 1986.

Динь Чунг Хоа

Казанский государственный университет
E-mail: dinhtrunghoa@yahoo.com

Поступило

20.05.2009

О. Е. Тихонов

Казанский государственный университет
E-mail: Oleg.Tikhonov@ksu.ru