Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Кикоть, Об аксиоматике квадратов модальных логик с выделенной диагональю, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 2, 261–274

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8804>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 12:56:58

Об аксиоматике квадратов модальных логик с выделенной диагональю

С. П. Кикоть

В работе рассматриваются модальные логики квадратов шкал Крипке с выделенной диагональю. Показано, что многие такие логики, в отличие от обычных двумерных произведений, не могут быть аксиоматизированы формулами с конечным числом переменных. Используемый метод похож на тот, которым был установлен аналогичный результат для произведений модальных логик размерности ≥ 3 . В частности, в доказательстве используются обобщенные формулы Салквиста.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Каким образом комбинировать модальные логики с разнородными модальными операторами? Произведения модальных логик, т.е. логики декартовых произведений шкал Крипке, представляют собой один из возможных ответов на этот вопрос. Они были введены в 1970-х гг., и к настоящему времени о них известно достаточно много. Систематическое изложение теории произведений модальных логик можно найти в [1]. В одной из первых работ об аксиоматике произведений [2] показывается, что многие двумерные произведения обладают конечной аксиоматикой (см. также теорему 5.9 на с. 230 в [1]).

Главный результат этой работы заключается в том, что при добавлении в язык модальности δ , которая истинна в точности в точках диагонали, многие двумерные логики (например, $\mathbf{K} \times \mathbf{K}$, $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$, $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$, $\mathbf{K4} \times \mathbf{K4}$, $\mathbf{S4} \times \mathbf{S4}$) не только теряют конечную аксиоматизируемость, но и перестают быть аксиоматизируемыми при помощи конечного числа переменных.

Рассматриваемая в этой работе общая конструкция δ -квадрата модальной логики обобщает известное построение логики $\mathbf{S5}_{\delta}^2$, связанной с цилиндрическими алгебрами. Напомним, что *представимой цилиндрической алгеброй размерности n над множеством W* называется набор всех подмножеств множества кортежей длины n элементов W с операциями цилиндрификации

$$\exists_i(A) = \{b \mid b \equiv_i a \text{ для некоторого } a \in A\},$$

где запись $b \equiv_i a$ означает, что кортежи b и a совпадают на всех своих элементах, кроме, быть может, i -го, и выделенными элементами $d_{ij} = \{a \mid a_i = a_j\}$, где a_i

и a_j обозначают i -й и j -й элементы кортежа [3; с. 167]. Легко видеть, что модальная алгебра декартова квадрата шкалы $F = (W, W \times W)$ с отмеченной диагональю является цилиндрической алгеброй размерности 2. Поэтому логика $\mathbf{S5}_\delta^2$ непосредственно аксиоматизирует многообразие цилиндрических алгебр размерности 2. Используя аксиоматику для этой цилиндрической алгебры из [6], Иде Венема в [7] (см. также [4] и [5]) предъявил конечную аксиоматику для $\mathbf{S5}_\delta^2$, что также контрастирует с нашим результатом.

Используемая нами при доказательстве техника близка к технике из недавней работы [8], где показано, что многие произведения размерности ≥ 3 не могут быть аксиоматизированы формулами с конечным числом переменных.

2. Основные определения. Мы используем модальный язык $\mathcal{Ml}_\delta^2$, содержащий счетное множество пропозициональных переменных PV , две унарные модальности $\Diamond_h$ и $\Diamond_v$, одну модальную константу δ и логические связки $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$.

Шкалой Крипке (для языка $\mathcal{Ml}_\delta^2$) будем называть набор

$$F = (W, R_h, R_v, \Delta),$$

где $R_\lambda \subseteq W \times W$, $\lambda \in \{h, v\}$, $\Delta \subseteq W$. Отношения R_h и R_v будем называть соответственно *горизонтальным* и *вертикальным*. *Моделью Крипке* называется пара $M = (F, \theta)$, где F – шкала Крипке, а функция $\theta: W \times PV \rightarrow \{0, 1\}$ (*оценка*) для каждой точки шкалы Крипке задает, какие переменные в ней истинны. В этом случае говорят, что модель M *построена* на шкале F . В дальнейшем нам понадобятся представления оценки в виде

$$\theta_*: PV \rightarrow 2^W \quad \text{и} \quad \theta^*: W \rightarrow 2^{PV},$$

где 2^A обозначает множество всех подмножеств A .

Истинность формулы в точке модели определяется стандартным образом:

- в точке x переменная $p \in PV$ истинна, если $\theta(x, p) = 1$;
- значения булевых связок вычисляются в точке по классическим таблицам истинности;
- в точке x истинна формула $\Diamond_\lambda \phi$, $\lambda \in \{h, v\}$, если найдется такая точка $y \in R_\lambda(x)$, в которой истинна формула ϕ ;
- в точке x истинна формула δ , если и только если $x \in \Delta$.

Запись $M, x \models \phi$ означает “формула ϕ истинна в точке x модели M ”. Мы говорим, что формула ϕ *истинна в модели Крипке M* (обозначается $M \models \phi$), если она истинна во всех ее точках, и что формула ϕ *общезначима на шкале Крипке F* (обозначается $F \models \phi$), если ϕ истинна в каждой модели, построенной на шкале F . Мы говорим, что на шкале F *общезначимо множество формул L* (обозначается $F \models L$), если $F \models \phi$ для всех $\phi \in L$. *Модальной логикой шкалы F* (обозначается $\text{Log}(F)$) называется множество всех формул, общезначимых на шкале F . *Модальной логикой класса шкал $\mathcal{C}$* (обозначается $\text{Log}(\mathcal{C})$) называется множество модальных формул, общезначимых на всех шкалах класса $\mathcal{C}$. Модальная логика L называется *полной по Крипке*, если $L = \text{Log}(\{F \mid F \models L\})$.

Эти понятия очевидным образом переносятся на язык $\mathcal{Ml}$, который содержит PV , булевы связки и один модальный оператор $\Diamond$. Так как в работе основным языком

является $\mathcal{M}_\delta^2$, по умолчанию понятия шкалы и модели Крипке, нормальной модальной логики и т.п. относятся к этому языку. Если надо подчеркнуть, что речь идет о языке $\mathcal{M}$ с одной модальностью, мы будем использовать такие термины, как “1-шкала Крипке”, “нормальная 1-модальная логика” и т.п.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $F = (W, R)$ – 1-шкала Крипке. Через F_δ^2 обозначим шкалу $(W \times W, R_h, R_v, \Delta)$, где

$$\begin{aligned} (a, b)R_h(c, d) &\iff aRc \text{ и } b = d, \\ (a, b)R_v(c, d) &\iff a = c \text{ и } bRd, \\ \Delta &= \{(a, a) \mid a \in W\}. \end{aligned}$$

Такую шкалу мы будем называть δ -квадратом шкалы F .

Пусть $\mathcal{C}$ – класс 1-шал Крипке. Рассмотрим класс $\mathcal{C}_\delta^2 = \{F_\delta^2 \mid F \in \mathcal{C}\}$. Множество $\text{Log}(\mathcal{C}_\delta^2)$ мы будем называть *двумерной δ -логикой класса $\mathcal{C}$* , и оно будет представлять для нас основной объект исследования.

Напомним, что *нормальной модальной логикой* называется множество формул языка $\mathcal{M}_\delta^2$, содержащее все пропозициональные тавтологии, аксиомы

$$K_\lambda: \Box_\lambda(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box_\lambda p \rightarrow \Box_\lambda q), \quad \lambda \in \{h, v\},$$

и замкнутое относительно правил вывода Modus Ponens

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B},$$

правила подстановки и правила обобщения

$$\frac{A}{\Box_\lambda A}.$$

Известно, что для любого класса шал $\mathcal{C}$ $\text{Log}(\mathcal{C})$ является нормальной модальной логикой. Если L – нормальная модальная логика, то класс всех тех шал, на которых она общезначима, называется *многообразием логики L* .

Мы говорим, что множество формул Σ *аксиоматизирует* логику L , если L является минимальным множеством формул, содержащим все пропозициональные тавтологии, формулы K_h, K_v , множество формул Σ , и замкнутое относительно указанных правил вывода. Мы говорим, что логика L *аксиоматизируема формулами с конечным числом переменных*, если существует такое множество модальных формул Σ , что оно аксиоматизирует логику L и в формулы Σ входит лишь конечное число переменных.

Конструкцию двумерной δ -логики можно рассматривать как операцию на полных по Крипке 1-модальных логиках.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть L – нормальная 1-модальная логика, полная по Крипке. Тогда δ -квадратом логики L называется логика (в языке $\mathcal{M}_\delta^2$)

$$L_\delta^2 = \text{Log}(\mathcal{C}_\delta^2),$$

где $\mathcal{C}$ – многообразие логики L .

Это определение обобщает обычное двумерное произведение 1-модальных логик.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $F = (W, R)$ и $G = (W', R')$ – 1-шкалы Крипке. Тогда

- произведением шкал F и G называется шкала

$$F \times G = (W \times W', R_h, R_v),$$

где R_h и R_v такие же, как в определении 1;

- произведением классов 1-шкал Крипке $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ называется класс 2-шкал Крипке

$$\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 = \{F_1 \times F_2 \mid F_1 \in \mathcal{C}_1, F_2 \in \mathcal{C}_2\};$$

- произведением полных по Крипке нормальных 1-модальных логик L_1 и L_2 , многообразия шкал которых соответственно $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$, называется 2-логика

$$L_1 \times L_2 = \text{Log}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2).$$

Для доказательства основного результата нам понадобится несколько стандартных конструкций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть даны две модели Крипке

$$M = (W, R_h, R_v, \Delta, \theta) \quad \text{и} \quad M' = (W', R'_h, R'_v, \Delta', \theta').$$

Отношение $Z \subseteq M \times M'$ называется *бисимуляцией*, если

- (1) если xZx' , то $\theta^*(x) = \theta^*(x')$ и $x \in \Delta \iff x' \in \Delta'$;
- (2) если xZx' и $xR_\lambda y$ для некоторого $y \in W$, $\lambda \in \{h, v\}$, то найдется $y' \in W'$ такой, что $x'R'_\lambda y'$ и yZy' ;
- (3) если xZx' и $x'R'_\lambda y'$ для некоторого $y' \in W'$, то найдется $y \in W$ такой, что $xR_\lambda y$ и yZy' .

ЛЕММА 1 [9; с. 67]. Пусть Z – бисимуляция между моделями M и M' , и xZx' . Тогда в M , x истинны те же модальные формулы, что и в M' , x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть даны две шкалы Крипке

$$F = (W, R_h, R_v, \Delta) \quad \text{и} \quad F' = (W', R'_h, R'_v, \Delta').$$

Сюръективное отображение $f: W \rightarrow W'$ называется *p-морфизмом*, если

- (1) $f(x) \in \Delta' \iff x \in \Delta$;
- (2) если $xR_\lambda y$, то $f(x)R'_\lambda f(y)$ (условие монотонности);
- (3) если $f(x) = x'$ и $x'R'_\lambda y'$ для некоторого $y' \in W'$, то найдется $y \in W$ такой, что $xR_\lambda y$ и $f(y) = y'$ (условие подъема).

Ясно, что *p-морфизм* является частным случаем бисимуляции.

ЛЕММА 2 [9; с. 140]. Если шкала F' является *p-морфным* образом шкалы F , то всякая модальная формула, общезначимая на шкале F , общезначима и на шкале F' .

Нам понадобится следующее необходимое и достаточное условие *p-морфизма*.

ЛЕММА 3. Пусть даны две шкалы Крипке $F = (W, R_h, R_v, \Delta)$ и $F' = (W', R'_h, R'_v, \Delta')$. Для сюръективного отображения $f: W \rightarrow W'$ пара условий

- (1') $f(x) \in \Delta' \iff x \in \Delta$;

(2') для всех $x \in W$, $\lambda \in \{h, v\}$ выполнено $R'_\lambda(f(x)) = f(R_\lambda(x))$, является необходимой и достаточной для того, чтобы f было p -морфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лишь используемую нами достаточность. Проверим условие монотонности. Возьмем $x, y \in W$ и $\lambda \in \{h, v\}$. Тогда $f(y) \in f(R_\lambda(x))$. В силу (2'), найдется такая точка x' , что $f(x) = x'$ и $x'R'_\lambda f(y)$. То есть $f(x)R'_\lambda f(y)$. Проверим условие подъема. Возьмем $x', y' \in W'$, $x \in W$ и $\lambda \in \{h, v\}$ такие, что $f(x) = x'$. Это значит, что $y' \in R'_\lambda(f(x))$. Применяя (2'), получаем, что $y' \in f(R_\lambda(x))$, т.е. существует такая точка y , что $xR_\lambda y$ и $f(y) = y'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Множество $W' \subseteq W$ называется *устойчивым* в шкале Крипке F , если для любого $\lambda \in \{h, v\}$ $R_\lambda(W') \subseteq W'$. В этом случае шкала $F' = (W', R \cap (W' \times W'))$ называется *конусом* шкалы F . Если W' – наименьшее устойчивое подмножество, содержащее точку x , то шкала F' называется *конусом с вершиной x* .

ЛЕММА 4 [9; с. 140]. Если шкала F' является конусом шкалы F и некоторая модальная формула ϕ общезначима на шкале F , то ϕ общезначима и на шкале F' .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Несвязной суммой 1-шкал Крипке $F_1 = (W_1, R_1)$, $F_2 = (W_2, R_2)$ называется шкала

$$F_1 \sqcup F_2 = (W, R),$$

где $W = (W_1 \times \{1\}) \cup (W_2 \times \{2\})$ и

$$R = \{((a, 1), (b, 1)) \mid (a, b) \in R_1\} \cup \{((a, 2), (b, 2)) \mid (a, b) \in R_2\}.$$

ЛЕММА 5 [9; с. 140]. Для любой модальной формулы ϕ если $F_1 \models \phi$ и $F_2 \models \phi$, то $F_1 \sqcup F_2 \models \phi$.

3. Формулировка результатов. Введем три семейства шкал (см. рис. 1). Пусть $D_n^c = (W_n^c, R_n^c)$, где

$$W_n^c = \{0, \bar{1}, \dots, \bar{n}, 1, \dots, n, c\},$$

$$R_n^c = \{(0, \bar{i}) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(\bar{i}, j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{(\bar{i}, c) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Пусть $D_n^r = (W_n^r, R_n^r)$, где

$$W_n^r = \{r, 1, \dots, n\}, \quad R_n^r = \{(r, i) \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Пусть $D_n^{rc} = (W_n^{rc}, R_n^{rc})$, где

$$W_n^{rc} = W_n^c \cup \{r\}, \quad R_n^{rc} = R_n^c \cup \{(r, j) \mid 1 \leq j \leq n\} \cup \{(r, c)\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть класс $\mathcal{C}$ содержит все шкалы вида D_n^{rc} , или все их рефлексивные замыкания, или все их транзитивные замыкания, или все их рефлексивные транзитивные замыкания. Тогда $\text{Log}(\mathcal{C}_\delta^2)$ не аксиоматизируема формулами с конечным числом переменных.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть L – полная по Крипке 1-модальная логика, и многообразие ее шкал $\mathcal{C}$ содержит все шкалы вида D_n^c и D_n^r или все их замыкания, упомянутые в теореме 1. Тогда L_δ^2 не аксиоматизируема формулами с конечным числом переменных.

Рис. 1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{C}$, будучи многообразием, замкнуто относительно p -морфизмов, а шкала D_n^{rc} является p -морфным образом несвязной суммы шкал D_n^c и D_{n+1}^r , то $\mathcal{C}$ содержит все шкалы семейства D_n^{rc} , т.е. удовлетворяет условию теоремы.

Заметим, что так как включение логик $L_1 \subseteq L_2$ влечет обратное включение их многообразий $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$, то если условие следствия 1 выполняется для большей логики, то оно выполняется и для меньшей.

Пусть $\mathbf{K}$ обозначает минимальную нормальную 1-модальную логику. Если L – множество формул, а ϕ – модальная формула, то $L \oplus \phi$ обозначает минимальную нормальную 1-модальную логику, содержащую L и формулу ϕ . Нетрудно видеть, что условию следствия 1 удовлетворяют следующие стандартные 1-модальные логики:

$$\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus \Box p \rightarrow \Box \Box p,$$

$$\mathbf{GL} = \mathbf{K4} \oplus \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p,$$

$$\mathbf{Grz} = \mathbf{K4} \oplus \Box(\Box(p \rightarrow \Box p) \rightarrow p) \rightarrow p.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Дельта-квадраты любой полной по Крипке логики L такой, что

$$\mathbf{K} \subseteq L \subseteq \mathbf{GL} \quad \text{или} \quad \mathbf{K} \subseteq L \subseteq \mathbf{Grz},$$

не аксиоматизируемы формулами с конечным числом переменных.

4. Доказательство основной теоремы. Будем считать, что класс $\mathcal{C}$ содержит сами шкалы D_n^{rc} (в противном случае нужно рассмотреть соответствующие замыкания всех шкал, используемых в доказательстве).

Доказательство использует то, что все дельта-квадраты 1-шкал Крипке удовлетворяют следующему семейству первопорядковых условий (см. рис. 2):

$$\forall y_0 \forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_n \forall x_c$$

$$\left(y_0 R_v x_0 \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (x_0 R_h x_i) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (x_i R_h x_c) \wedge \Delta(x_c) \right. \\ \left. \rightarrow \exists y_1 \dots \exists y_n \exists y_c \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (y_0 R_h y_i) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (y_i R_h y_c) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (y_i R_v x_i) \right).$$

Рис. 2

Благодаря этому, верна следующая

ЛЕММА 6. В любом дельта-квадрате 1-шкалы Крипке $F = (W, R)$ общезначима модальная формула

$$\begin{aligned} c_n &= \Diamond_v \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Diamond_h(p_i \wedge \Diamond_h \delta) \right) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n-1} \Box_h(\Diamond_v p_i \rightarrow \Box_h q_i) \\ &\rightarrow \Diamond_h \left(\Diamond_v p_n \wedge \Diamond_h \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n-1} q_i \right) \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть дано множество W с бинарным отношением R . Пусть в некоторой точке (x, y) соответствующего δ -квадрата $(W \times W, R_h, R_v, \Delta)$ истинна посылка формулы c_n . Так как

$$(x, y) \models \Diamond_v \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Diamond_h(p_i \wedge \Diamond_h \delta) \right)$$

то найдется такая точка $y' \in R(y)$, что

$$(x, y') \models \Diamond_h(p_i \wedge \Diamond_h \delta), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Это значит, что для каждого i от 1 до n существуют такие точки x'_i и x''_i , что xRx'_i , $x'_iRx''_i$, $(x'_i, y') \models p_i$ и $(x''_i, y') \models \delta$. Но так как в слое вида $\{(t, y') \mid t \in W\}$ есть только одна точка, где истинна δ , то $x''_1 = \dots = x''_n$.

Пусть $x'' = x''_1 = \dots = x''_n$. Так как

$$(x, y) \models \bigwedge_{1 \leq i \leq n-1} \Box_h(\Diamond_v p_i \rightarrow \Box_h q_i),$$

то для каждого $1 \leq i \leq n-1$ $(x'_i, y) \models \Diamond_v p_i \rightarrow \Box_h q_i$. Следовательно, так как в δ -квадрате $(x'_i, y)R_v(x'_i, y')$ и $(x'_i, y') \models p_i$, то $(x'_i, y) \models \Box_h q_i$. Отсюда $(x'', y) \models q_i$.

Итак, мы получили, что

$$(x'', y) \models \bigwedge_{1 \leq i \leq n-1} q_i.$$

А так как

$$(x, y)R_h(x'_n, y)R_h(x'', y), \quad (x'_n, y)R_v(x'_n, y'), \quad (x'_n, y') \models p_n,$$

то

$$(x, y) \models \Diamond_h \left(\Diamond_v p_n \wedge \Diamond_h \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n-1} q_i \right) \right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 [10]. Модель $M = (F, \theta)$ будем называть *m-порожденной*, если число пропозициональных переменных p , для которых $\theta_*(p) \neq \emptyset$, не более чем m .

Доказательство основной теоремы опирается на следующую лемму.

ЛЕММА 7 [10]. Пусть $L = \text{Log}(C_\delta^2)$ и существует последовательность шкал Крипке $F_n = (W_n, (R_v)_n, (R_h)_n, \Delta_n)$ такая, что

$$F_n \not\models L, \quad (1)$$

но

$$\text{на каждой } m\text{-порожденной модели, основанной на шкале } F_n \text{ при } n > 2^m, \quad (2)$$

L общезначима.

Тогда L не аксиоматизируема формулами с конечным числом переменных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество формул Σ аксиоматизирует логику L и Σ содержит m пропозициональных переменных. Рассмотрим шкалу F_{2^m+1} и произвольную модель M , основанную на этой шкале. Пусть M_m будет другой моделью, основанной на шкале F_{2^m+1} , оценка в которой совпадает с оценкой в модели M на переменных, встречающихся в Σ , и равна $\emptyset$ в противном случае. Тогда M_m будет m -порожденной, и $M_m \models \Sigma$ тогда и только тогда, когда $M \models \Sigma$. Но в силу (2) $M_m \models \Sigma$; следовательно $M \models \Sigma$. Так как M была произвольной моделью, основанной на шкале F_{2^m+1} , то $F_{2^m+1} \models \Sigma$. Следовательно, в предположении, что Σ аксиоматизирует логику L , имеем $F_{2^m+1} \models L$. Это находится в противоречии со свойством (1) шкал F_n .

Итак, для доказательства теоремы 1, нам остается предъявить последовательность шкал F_n , удовлетворяющих условиям (1) и (2) леммы 7. Положим $F_n = (W_n, (R_v)_n, (R_h)_n, \Delta_n)$, где (см. рис. 3)

$$\begin{aligned} W_n &= \{d_0, \bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n, d_1, \dots, d_n, u_0, u_0^1, \dots, u_0^n, u_1, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_n, u_\delta, u_{-\delta}\}, \\ (R_h)_n &= \{(d_0, \bar{d}_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(\bar{d}_i, d_j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \cup \{(u_0, u_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \\ &\quad \cup \bigcup_{1 \leq i \leq n} \left(\{(u_0^i, u'_i)\} \cup \{(u_0^i, u_j) \mid j \neq i\} \right) \\ &\quad \cup \{(u'_i, u_{-\delta}) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(u_i, u_\delta) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(u_i, u_{-\delta}) \mid 1 \leq i \leq n\}, \\ (R_v)_n &= \{(d_0, u_0)\} \cup \{(d_0, u_0^i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(\bar{d}_i, u_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(\bar{d}_i, u'_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \\ &\quad \cup \{(d_i, u_\delta) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(d_i, u_{-\delta}) \mid 1 \leq i \leq n\}, \\ \Delta_n &= \{u_\delta\}. \end{aligned}$$

Рис. 3

Чтобы проверить (1), в силу леммы 6 достаточно убедиться в том, что $F_n \not\models c_n$. Для этого рассмотрим оценку θ , где $\theta_*(p_i) = \{u_i\}$ для $1 \leq i \leq n$, $\theta_*(q_i) = (R_h)_n(\bar{d}_i) = \{d_j \mid j \neq i\}$ для $1 \leq i \leq n-1$. Ясно, что при этой оценке

$$d_0 \models \Diamond_v \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Diamond_h(p_i \wedge \Diamond_h \delta) \right) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n-1} \Box_h(\Diamond_v p_i \rightarrow \Box_h q_i),$$

но единственная точка, в которой истинны все q_i – это d_n , а единственная точка, в которой истинна формула $\Diamond_v p_n$ – это $\bar{d}_n$. Но неверно, что $\bar{d}_n(R_h)_n d_n$.

Докажем, что для последовательности F_n выполнено условие (2).

Рассмотрим шкалу

$$F_n^c = (W_n^c, (R_h)_n^c, (R_v)_n^c, \Delta_n^c),$$

где

$$\begin{aligned} W_n^c &= W_n \cup \{d_c\}, \\ (R_h)_n^c &= (R_h)_n \cup \{(\bar{d}_i, d_c) \mid 1 \leq i \leq n\}, \\ (R_v)_n^c &= (R_v)_n \cup \{(d_c, u_\delta)\} \cup \{(d_c, u_{-\delta})\}, \\ \Delta_n^c &= \Delta_n = \{u_\delta\}. \end{aligned}$$

Пусть модель M – m -порожденная, и основана на шкале F_n , где $n > 2^m$. В силу принципа Дирихле, в модели M найдутся две такие точки d_i и d_j , что $\theta^*(d_i) = \theta^*(d_j)$. Рассмотрим модель $M' = (F_n^c, \theta')$, оценка в которой определяется соотношениями

$$\theta'^*(x) = \theta^*(x), \quad x \in W_n, \quad \theta'^*(d_c) = \theta^*(d_i) = \theta^*(d_j).$$

Тогда модель M будет находиться в отношении бисимуляции

$$Z = \{(w, w) \mid w \in W_n\} \cup \{(d_i, d_c), (d_j, d_c)\}$$

с моделью M' . Мы докажем, что F_n^c является p -морфным образом конуса δ -квадрата, и отсюда по леммам 2 и 4 будет следовать, что $M' \models L$, а по лемме 1 – что $M \models L$.

Докажем, что шкала F_n^c является образом конуса шкалы $(D_n^{rc})_\delta^2$, с вершиной в точке $(0, r)$. Далее этот конус будем обозначать $F_n^s = (W_n^s, (R_h)_n^s, (R_v)_n^s, \Delta_n^s)$. Видно, что $W_n^s = W_n^c \times \{r, 1, 2, \dots, n, c\}$.¹ Шкала F_n^s изображена на рис. 4.

Рис. 4

Определим отображение $f: W_n^s \rightarrow W_n^c$ следующим образом:

$$\begin{aligned} f(*, r) &= d_*, & * \in \{0, \bar{1}, \dots, \bar{n}, 1, \dots, n, c\}, & \text{ считаем, что } d_{\bar{i}} = \bar{d}_i, \\ f(0, i) &= u_0^i, & 1 \leq i \leq n, \\ f(\bar{i}, i) &= u_i', & 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

¹Это утверждение остается верным при переходах к рефлексивным, транзитивным, и рефлексивным транзитивным замыканиям шкал, но теряет свою силу для симметричного замыкания.

$$\begin{aligned}
 f(\bar{j}, i) &= u_j, & 1 \leq i \leq n, & \quad 1 \leq j \leq n, \quad j \neq i, \\
 f(i, i) &= u_\delta, & 1 \leq i \leq n, & \\
 f(j, i) &= u_{-\delta}, & 1 \leq i \leq n, & \quad 1 \leq j \leq n, \quad j \neq i, \\
 f(c, i) &= u_{-\delta}, & & \\
 f(0, c) &= u_0, & & \\
 f(\bar{i}, c) &= u_i & & \\
 f(i, c) &= u_{-\delta}, & & \\
 f(c, c) &= u_\delta. & &
 \end{aligned}$$

На рис. 5 изображена шкала F_3^s , рядом с каждой точкой которой написано значение ее образа под действием f . На рис. 6 приведена шкала F_3^c .

Рис. 5

Докажем, что f является p -морфизмом.

Рис. 6

Для этого в силу леммы 3 достаточно проверить, что для всех $x \in W_n^s$, $\lambda \in \{h, v\}$ выполнено $(R_\lambda)_n^c(f(x)) = f((R_\lambda)_n^s(x))$. Это видно из следующих таблиц.

ТАБЛИЦА 1

x	$(R_h)_n^s(x)$	$f((R_h)_n^s(x))$	$f(x)$	$(R_h)_n^c(f(x))$
$(0, r)$	$\{(\bar{k}, r) \mid 1 \leq k \leq n\}$	$\{\bar{d}_k \mid 1 \leq k \leq n\}$	d_0	$\{\bar{d}_k \mid 1 \leq k \leq n\}$
$(\bar{j}, r)$	$\{(k, r) \mid k \neq j\} \cup \{(c, r)\}$	$\{d_k \mid k \neq j\} \cup \{d_c\}$	$\bar{d}_j$	$\{d_k \mid k \neq j\} \cup \{d_c\}$
(j, r)	$\emptyset$	$\emptyset$	d_j	$\emptyset$
(c, r)	$\emptyset$	$\emptyset$	d_c	$\emptyset$
$(0, i)$	$\{(\bar{k}, i) \mid 1 \leq k \leq n\}$	$\{u_k \mid k \neq i\} \cup \{u'_i\}$	u_0^i	$\{u_k \mid k \neq i\} \cup \{u'_i\}$
$(\bar{i}, i)$	$\{(c, i)\} \cup \{(k, i) \mid k \neq i\}$	$\{u_{-\delta}\}$	u'_i	$\{u_{-\delta}\}$
$(\bar{j}, i)$	$\{(c, i)\} \cup \{(k, i) \mid k \neq j\}$	$\{u_{-\delta}, u_{\delta}\}$	u_j	$\{u_{-\delta}, u_{\delta}\}$
$(j \neq i)$				
(i, i)	$\emptyset$	$\emptyset$	u_{δ}	$\emptyset$
(j, i)	$\emptyset$	$\emptyset$	$u_{-\delta}$	$\emptyset$
$(j \neq i)$				
(c, i)	$\emptyset$	$\emptyset$	$u_{-\delta}$	$\emptyset$
$(0, c)$	$\{(\bar{k}, c) \mid 1 \leq k \leq n\}$	$\{u_j \mid 1 \leq j \leq n\}$	u_0	$\{u_j \mid 1 \leq j \leq n\}$
$(\bar{j}, c)$	$\{(k, c) \mid k \neq j\} \cup \{(c, c)\}$	$\{u_{\delta}, u_{-\delta}\}$	u_j	$\{u_{\delta}, u_{-\delta}\}$
(j, c)	$\emptyset$	$\emptyset$	$u_{-\delta}$	$\emptyset$
(c, c)	$\emptyset$	$\emptyset$	u_{δ}	$\emptyset$

Теорема 1 доказана.

5. Обсуждение результатов.

5.1. Рассматриваемая в этой статье конструкция δ -квадрата является частным случаем более общей конструкции, предложенной Куруш в [10].

ТАБЛИЦА 2

x	$(R_v)_n^s(x)$	$f((R_v)_n^s(x))$	$f(x)$	$(R_v)_n^c(f(x))$
$(0, r)$	$\{(0, i)\} \cup \{(0, c)\}$	$\{u_0^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ $\cup \{u_0\}$	d_0	$\{u_0^i \mid 1 \leq i \leq n\}$ $\cup \{u_0\}$
$(\bar{j}, r)$	$\{(\bar{j}, i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(\bar{j}, c)\}$	$\{u'_j, u_j\}$	$\bar{d}_j$	$\{u'_j, u_j\}$
(j, r)	$\{(j, i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(j, c)\}$	$\{u_\delta, u_{-\delta}\}$	d_j	$\{u_\delta, u_{-\delta}\}$
(c, r)	$\{(c, i) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(c, c)\}$	$\{u_\delta, u_{-\delta}\}$	d_c	$\{u_\delta, u_{-\delta}\}$
др.	$\emptyset$	$\emptyset$		$\emptyset$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть $F_1 = (W_1, R_1)$, $F_2 = (W_2, R_2)$ две шкалы Крипке. Тогда их δ -произведением называется шкала

$$F_1 \times_\delta F_2 = (W_1 \times W_2, R_h, R_v, \Delta),$$

где $(a, b)R_h(c, d)$ тогда и только тогда, когда aR_1c и $b = d$; $(a, b)R_v(c, d)$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и bR_2d , а $\Delta = \{(a, a) \mid a \in W_1 \cap W_2\}$.

Если L_1 и L_2 две полные по Крипке 1-модальные логики, и $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ соответствующие им многообразия шкал, то δ -произведением этих логик называется логика $\text{Log}(\mathcal{C}_1 \times_\delta \mathcal{C}_2)$, где

$$\mathcal{C}_1 \times_\delta \mathcal{C}_2 = \{F_1 \times_\delta F_2 \mid F_1 \in \mathcal{C}_1, F_2 \in \mathcal{C}_2\}.$$

Наш результат переносится на случай такого δ -произведения. При этом мы можем непосредственно использовать в доказательстве шкалы F_n^s , которые являются δ -произведением шкал D_n^c и D_{n+1}^r .

5.2. Также было бы интересно установить границы полученного результата, и найти логики с конечно аксиоматизируемыми δ -квадратами. В частности, вопрос открыт для логик глубины 1, логик с ограниченным ветвлением и логик с аксиомой симметричности $\Diamond \Box p \rightarrow p$.

5.3. Весьма трудны и интересны алгоритмические вопросы, связанные с δ -квадратами. Недавно Куруш [10] показала, что многие δ -квадраты (среди которых логика $\mathbf{K}_\delta^2$) не финитно аппроксимируемы. В самое последнее время автором совместно с Куруш была установлена неразрешимость логики $\mathbf{K}_\delta^2$, но вопрос о разрешимости логик $\mathbf{D}_\delta^2$ и $\mathbf{T}_\delta^2$ пока открыт.

5.4. Наряду с модальностью δ можно рассматривать связки соответствующие симметрии относительно диагонали $\otimes$ и проекциям на диагональ вдоль координатных осей $\ominus$ и $\oplus$, введенные Сегербергом в [11], моделирующие операторы подстановки переменных в цилиндрических алгебрах. Их семантика в δ -квадрате такова:

$$\begin{aligned} (x, y) \models \otimes \phi &\iff (y, x) \models \phi, \\ (x, y) \models \oplus \phi &\iff (x, x) \models \phi, \\ (x, y) \models \ominus \phi &\iff (y, y) \models \phi. \end{aligned}$$

Было бы интересно изучить разнообразные двумерные логики с этими связками.

5.5. Рассматриваемые в статье логики соответствуют различным фрагментам логики предикатов. А именно, рассмотрим перевод $(\cdot)^T$ формулы ϕ модального языка $\mathcal{M}l_\delta^2$ в формулы с двумя свободными переменными языка первого порядка, содержащего бинарные предикатные символы P_i , R и $=$. Имеем

$$\begin{aligned}(p_i)^T &= P_i(x, y), & (\delta)^T &= (x = y), \\ (\phi_1 * \phi_2)^T &= \phi_1^T * \phi_2^T & (* - \text{булева связка } \wedge, \vee \text{ или } \rightarrow), \\ (\neg \phi_1)^T &= \neg(\phi_1^T), \\ (\Diamond_h \phi)^T &= \exists x'(xRx' \wedge \phi^T[x'/x]), & (\Diamond_v \phi)^T &= \exists y'(yRy' \wedge \phi^T[y'/y]).\end{aligned}$$

Пусть фрагмент языка первого порядка Lf – образ перевода $(\cdot)^T$. Этот фрагмент можно определить и безотносительно модальной логики. Нетрудно показать, что ϕ лежит в логике $\mathbf{K}_\delta^2$ тогда и только тогда, когда ϕ^T выводима в классической логике предикатов. Поэтому логика $\mathbf{K}_\delta^2$ полиномиально эквивалентна некоторому фрагменту логики первого порядка, а именно, общезначимым формулам из Lf .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. M. Gabbay, A. Kurucz, F. Wolter, M. Zakharyashev, *Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications*, Stud. Logic Found. Math., **148**, North-Holland Publ., Amsterdam, 2003.
- [2] В. Б. Шехтман, “Двумерные модальные логики”, *Матем. заметки*, **23:5** (1978), 759–772.
- [3] R. Hirsch, I. Hodkinson, *Relational Algebras by Games*, Stud. Logic Found. Math., **147**, North-Holland Publ., Amsterdam, 2002.
- [4] M. Marx, Y. Venema, *Multi-Dimensional Modal Logic*, Appl. Log. Ser., **4**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [5] Y. Venema, “Cylindric modal logic”, *J. Symbolic Logic*, **60:2** (1995), 591–623.
- [6] L. Henkin, J. D. Monk, A. Tarski, *Cylindric Algebras*, Part I, Stud. Logic Found. Math., **64**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1971.
- [7] I. Venema, *Many-Dimensional Modal Logic*, PhD Thesis, Amsterdam, 1991.
- [8] A. Kurucz, “On axiomatising products of Kripke frames, part II”, *Advances in Modal Logic*, **7**, College Publ., 2008, 219–230, <http://www.aiml.net/volumes/volume7/Kurucz.pdf>.
- [9] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge Tracts Theoret. Comput. Sci., **53**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [10] A. Kurucz, “Products of modal logics with diagonal constant lacking the finite model property”, *Frontiers of Combining Systems*, Lecture Notes in Comput. Sci., **5749**, Springer-Verlag, Berlin, 2009, 279–286.
- [11] K. Segerberg, “Two-dimensional modal logic”, *J. Philos. Logic*, **2:1** (1973), 77–96.

С. П. Кикоть

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: staskikotx@gmail.com

Поступило

26.01.2009

Исправленный вариант

11.01.2010