Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Агибалова, О полноте систем корневых функций дифференциального оператора дробного порядка с матричными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 2, 317–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8806>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 06:28:53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О полноте систем корневых функций дифференциального оператора дробного порядка с матричными коэффициентами

А. В. Агibalова

1. Введение. Для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)y^{(k)} = \lambda y \quad (1.1)$$

произвольного целого порядка $n > 2$ исследование вопросов полноты и базисности системы собственных и присоединенных функций (СПФ) краевых задач восходит к классическим работам Г. Д. Биркгофа и Я. Д. Тамаркина. Ими детально изучены краевые задачи для уравнения (1.1) с регулярными краевыми условиями (см. [1; гл. III § 8]).

С другой стороны, задача с разделяющимися краевыми условиями для уравнения (1.1) в $L^2[0, 1]$ является регулярной лишь тогда, когда число краевых условий в нуле равно числу краевых условий в единице и, в частности, порядок уравнения четен. Для уравнений (1.1) полнота системы СПФ задачи с нерегулярными распадающимися граничными условиями впервые анонсирована Келдышем в [2], а доказана Шкаликовым (см. [3]) (для случая аналитических коэффициентов $p_k(\cdot)$ – несколько ранее Хромовым [4]). Вопросам полноты системы СПФ краевых задач для уравнений (1.1) с нерегулярными (не обязательно распадающимися) краевыми условиями посвящены также работы Рыхлова (см., например, [5] и цитируемую там литературу). Далее, в работе Маламуда и Оридороги (см. [6]) результат о полноте из [3] был распространен на случай уравнений дробного порядка $\alpha = n - \varepsilon$ вида

$$l_\alpha(D)y := D_x^{n-\varepsilon}y + \sum_{k=2}^n p_{n-k}(x)D_x^{n-k-\varepsilon}y = \lambda y. \quad (1.2)$$

Здесь $n \in \mathbb{Z}_+$, $n > 2$, $0 \leq \varepsilon < 1$ и $D_x^{k-\varepsilon}$ обозначает оператор дробного дифференцирования

$$D_x^{k-\varepsilon}y = \frac{d^k}{dx^k} J^\varepsilon y = y^{(k-\varepsilon)}(x), \quad J^\varepsilon y = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^x (x-t)^{\varepsilon-1} y(t) dt,$$

$$J^0 = s - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J^\varepsilon = I, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

В настоящей работе результаты работ Шкаликова [3], Маламуда и Оридороги [6] обобщены на случай векторного уравнения (1.2) с аналитическими матричными коэффициентами $P_k(x)$.

Именно, для векторного уравнения (1.2) установлен аналог теоремы Биркгофа (см. [1; гл. III § 8]) об асимптотике решений (для скалярного дифференциального уравнения дробного порядка такой аналог теоремы Биркгофа получен в [6]). Кроме того, доказаны

полнота в пространствах $L_1([0, 1], \mathbb{C}^p)$ и $L_2([0, 1], \mathbb{C}^p)$ системы СПФ для векторного уравнения (1.2) с распадающимися нормированными краевыми условиями вида

$$U_j(y) = I_p y^{(k_j - \varepsilon)}(0) + \sum_{k=0}^{k_j-1} A_{jk} y^{(k-\varepsilon)}(0) = 0, \quad j \in \{1, \dots, l\},$$

$$U_j(y) = I_p y^{(k_j - \varepsilon)}(1) + \sum_{k=0}^{k_j-1} B_{jk} y^{(k-\varepsilon)}(1) = 0, \quad j \in \{l+1, \dots, n\}.$$

Здесь $y = \text{col}(y_1, \dots, y_p)$,

$$n-1 \geq k_1 > k_2 > \dots > k_l \geq 0, \quad n-1 \geq k_{l+1} > k_{l+2} > \dots > k_n \geq 0,$$

$P_k(x)$ – $(p \times p)$ -матрицы-функции, A_{jk} и $B_{jk} \in \mathbb{C}^{p \times p}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, I_p – единичная матрица порядка p . Отметим также, что дифференциальным уравнениям целого порядка с матричными коэффициентами посвящены работы Лужиной (см., например, [7]), а уравнениям дробного порядка – работы Алероева (см., например, [8] и цитируемую там литературу).

2. Вспомогательные утверждения. Рассмотрим сначала простейшее матричное дифференциальное уравнение

$$Z^{(\alpha)}(x, \lambda) = \lambda Z(x, \lambda) \quad (2.1)$$

порядка $\alpha = n - \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \varepsilon < 1$. Для него поставим задачу Коши

$$D_x^\alpha Z_k(x, \lambda) = \lambda Z_k(x, \lambda), \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (2.2)$$

$$D_x^{\alpha-j} Z_k(0, \lambda) = \delta_{jk} I_p, \quad j, k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (2.3)$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Решения этой задачи имеют вид

$$Z_k(x, \lambda) = x^{\alpha-k} E_{1/\alpha}(\lambda x^\alpha; \alpha - k + 1) I_p, \quad (2.4)$$

где

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\mu + j\rho^{-1})}, \quad \rho > 0, \quad \mu \in \mathbb{C},$$

функция типа Миттаг-Леффлера. Известно (см. [9]), что $E_\rho(z; \mu)$ – целая функция порядка ρ и типа 1.

Пусть

$$n_1 := \left\lfloor \frac{1-n+\varepsilon}{2} \right\rfloor, \quad n_2 := \left\lfloor \frac{n-\varepsilon}{2} \right\rfloor, \quad \omega_j = \exp\left(\frac{2\pi i j}{\alpha}\right), \quad j \in \{n_1, n_1+1, \dots, n_2\},$$

$$\beta = 2\pi \min\left\{\left\lfloor \frac{n-\varepsilon}{4} \right\rfloor, 1 - \left\lfloor \frac{n-\varepsilon}{4} \right\rfloor\right\},$$

где $[x]$ и $\{x\}$ обозначают соответственно целую и дробную части $x \in \mathbb{R}$.

В комплексной плоскости рассмотрим следующие секторы:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\beta^- &= \{\lambda \in \mathbb{C} : -\pi < \arg \lambda < -\beta\}, \\ S_\beta^- &= \{\lambda \in \mathbb{C} : -\beta < \arg \lambda < 0\}, \\ S_\beta^+ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \arg \lambda < \beta\}, \\ \tilde{S}_\beta^+ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \beta < \arg \lambda < \pi\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В каждом из этих секторов занумеруем числа $\{\omega_j\}_{n_1}^{n_2}$ так, чтобы

$$\text{Re}(\omega_{j_1} \lambda^{1/\alpha}) > \dots > \text{Re}(\omega_{j_q} \lambda^{1/\alpha}) > 0 > \text{Re}(\omega_{j_{q+1}} \lambda^{1/\alpha}) > \dots > \text{Re}(\omega_{j_n} \lambda^{1/\alpha}). \quad (2.6)$$

Здесь $\lambda^{1/\alpha}$ – ветвь многозначной в $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ функции, выделяемой начальным условием $1^{1/\alpha} := 1$.

3. Аналог теоремы Биркгофа. Следующая теорема распространяет известную теорему Биркгофа (см. [1; гл. III § 8]), а также [6; теорема 1] на случай матричного дифференциального уравнения дробного порядка

$$l_\alpha(D)Y = D_x^{n-\varepsilon}Y + \sum_{k=2}^n P_{n-k}(x)D_x^{n-k-\varepsilon}Y = \lambda Y. \quad (3.1)$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $P_j(x) \in C[0, 1] \times \mathbb{C}^{p \times p}$, $j \in \{2, \dots, n\}$, и пусть S – один из секторов S_β^+ , S_β^- , $\tilde{S}_\beta^+$ или $\tilde{S}_\beta^-$. Тогда существует фундаментальная система матричных решений $\{Y_k(x, \lambda)\}_1^n$ уравнения (3.1), голоморфная по $\lambda \in S_\beta(R_0) := \{\lambda \in S : |\lambda| > R_0\}$ и при достаточно большом R_0 допускающая асимптотическое представление

$$Y_k(x; \lambda) = (I_p + O(|\lambda|^{-1/\alpha}))\mathcal{E}_k(x; \lambda), \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.2)$$

$$D_x^{\nu-\varepsilon}(Y_k(x; \lambda)) = (I_p + O(|\lambda|^{-1/\alpha}))D_x^{\nu-\varepsilon}\mathcal{E}_k(x; \lambda), \quad \nu \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad (3.3)$$

где $\mathcal{E}_k(x; \lambda)$ – фундаментальная система матричных решений простейшего уравнения (2.1), удовлетворяющая асимптотическим соотношениям

$$\mathcal{E}_{j_s}(x; \lambda) = \exp(\omega_{j_s} x \lambda^{1/(n-\varepsilon)})I_p + O(x^{-1}|\lambda|^{-1/(n-\varepsilon)})I_p, \quad 1 \leq s \leq q,$$

$$\mathcal{E}_{j_s}(x; \lambda) = O(\min\{x^{-\varepsilon}|\lambda|^{-\varepsilon/(n-\varepsilon)}, x^{-1}|\lambda|^{-1/(n-\varepsilon)}\})I_p, \quad q < s \leq n,$$

$$D_x^{\nu-\varepsilon}(\mathcal{E}_{j_s}(x; \lambda)) = \omega_{j_s}^{\nu-\varepsilon} \lambda^{(\nu-\varepsilon)/\alpha} \exp(\omega_{j_s} x \lambda^{1/\alpha})I_p + O(x^{-\nu-n+\varepsilon}|\lambda|^{-1/\alpha})I_p, \quad 1 \leq s \leq q,$$

$$D_x^{\nu-\varepsilon}(\mathcal{E}_{j_s}(x; \lambda)) = O(\min\{|\lambda|^{(\nu-\varepsilon)/\alpha}, x^{-\nu-n+\varepsilon}|\lambda|^{-1/\alpha}\})I_p, \quad q < s \leq n.$$

4. Теорема о полноте. В пространстве $L_2([0, 1], \mathbb{C}^p)$ рассмотрим уравнение

$$l_\alpha(D)y := D_x^{n-\varepsilon}y + \sum_{k=2}^n P_{n-k}(x)D_x^{n-k-\varepsilon}y = \lambda y, \quad y = \text{col}(y_1, \dots, y_p), \quad (4.1)$$

с распадающимися нормированными граничными условиями

$$U_j(y) = I_p y^{(k_j-\varepsilon)}(0) + \sum_{k=0}^{k_j-1} A_{jk} y^{(k-\varepsilon)}(0) = \vec{0}, \quad j \in \{1, \dots, l\}, \quad (4.2)$$

$$U_j(y) = I_p y^{(k_j-\varepsilon)}(1) + \sum_{k=0}^{k_j-1} B_{jk} y^{(k-\varepsilon)}(1) = \vec{0}, \quad j \in \{l+1, \dots, n\}. \quad (4.3)$$

Здесь $\vec{0}$ – нулевой вектор-столбец высоты p ,

$$n-1 \geq k_1 > k_2 > \dots > k_l \geq 0, \quad n-1 \geq k_{l+1} > k_{l+2} > \dots > k_n \geq 0,$$

$P_k(x)$ – $(p \times p)$ -матрицы-функции, A_{jk} и $B_{jk} \in \mathbb{C}^{p \times p}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Обозначим через L оператор, порожденный дифференциальным выражением $l_\alpha(D)$ и граничными условиями (4.2)–(4.3).

ЛЕММА 4.1. Пусть $\{\Phi_j(x, \lambda)\}_1^n$ – фундаментальная система $(p \times p)$ -матричных решений уравнения (3.1), удовлетворяющая начальным условиям

$$D_x^{\nu-1-\varepsilon}\Phi_j(0, \lambda) = \delta_{\nu j}I_p, \quad j, \nu \in \{1, \dots, n\}. \quad (4.4)$$

В этом случае множество собственных значений $\sigma(L)$ оператора L совпадает с множеством $\{\lambda_m\}_1^\infty$ нулей целой функции

$$\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda; \Phi) = \det \begin{pmatrix} U_1(\Phi_1(x, \lambda)) & U_1(\Phi_2(x, \lambda)) & \dots & U_1(\Phi_n(x, \lambda)) \\ U_2(\Phi_1(x, \lambda)) & U_2(\Phi_2(x, \lambda)) & \dots & U_2(\Phi_n(x, \lambda)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(\Phi_1(x, \lambda)) & U_n(\Phi_2(x, \lambda)) & \dots & U_n(\Phi_n(x, \lambda)) \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Кроме того, размерность корневого подпространства, соответствующего $\lambda_0 \in \sigma(L)$, равна кратности корня λ_0 как нуля целой функции $\Delta(\lambda)$.

Эта лемма доказывается так же, как для уравнений целого порядка. Как и в случае $\alpha = n \in \mathbb{N}$, целую функцию $\Delta(\lambda)$ вида (4.5) будем называть *характеристическим определителем* задачи (4.1)–(4.3).

ЛЕММА 4.2. Пусть $\sigma(L) = \{\lambda_m\}_1^\infty$ – множество нулей целой функции $\Delta(\lambda)$, и пусть ν_m – кратность нуля λ_m . Обозначим через $\Delta_j(x, \lambda; \Phi)$, $j \in \{1, \dots, pn\}$, определитель, полученный заменой j -й строки характеристического определителя $\Delta(\lambda; \Phi)$ столбцами матриц Φ_k , $k \in \{1, \dots, n\}$. Тогда для каждого $j \in \{1, \dots, pn\}$ система функций

$$\Delta_j(x, \lambda_m; \Phi), \quad D_\lambda \Delta_j(x, \lambda; \Phi)|_{\lambda=\lambda_m}, \quad \dots, \quad \frac{1}{(\nu_m - 1)!} D_\lambda^{\nu_m - 1} \Delta_j(x, \lambda; \Phi) \Big|_{\lambda=\lambda_m}$$

образует систему СПФ, соответствующую $\lambda_m \in \sigma(L)$.

Следующая теорема является основным результатом работы.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $P_j(x)$, $j \in \{2, \dots, n\}$, – аналитические матрицы-функции, $x \in \mathbb{R}$ и $2l \geq n$. Тогда система собственных и присоединенных функций граничной задачи (4.1)–(4.3) полна в пространстве $L_2([0, 1], \mathbb{C}^p)$.

При доказательстве теоремы используются треугольные операторы преобразования, существование которых доказано в [10].

В заключение автор выражает благодарность М. М. Маламуду за постановку задачи, а также ему и Л. Л. Оридоре за полезные советы в процессе работы над статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
 [2] М. В. Келдыш, *Докл. АН СССР*, **77:1** (1951), 11–14. [3] А. А. Шкаликов, *Функц. анализ и его прил.*, **10:4** (1976), 69–80. [4] А. П. Хромов, *Матем. сб.*, **70:3** (1966), 310–329. [5] В. С. Рыхлов, *Уч. записки ТНУ. Сер. матем., мех., информ., кибернет.*, **16:1** (2003), 176–182. [6] М. М. Malamud, L. L. Oridoroga, *Russ. J. Math. Phys.*, **8:3** (2001), 287–308. [7] Л. М. Лужина, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Матем., мех.*, 1988, № 1, 31–35. [8] Т. С. Алероев, Х. Т. Алероева, *Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. АН*, **10:2** (2008), 9–13. [9] М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966. [10] М. М. Маламуд, *Тр. ММО*, **55**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1994, 73–148.

А. В. Агибалова

Донецкий национальный университет

E-mail: agannette@rambler.ru

Поступило

11.11.2009