Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков, Об аддитивной проблеме И. М. Виноградова, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 3, 325–339

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8807>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:58:58

Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков

Пусть набор $N_1, \dots, N_n$ допустим. Тогда в представлении

где неизвестные $p_1, p_2, \dots, p_k$ принимают значения простых чисел при условии $p_s > n + 1$, $s = 1, \dots, k$, число k имеет вид

$$k = k_0 + b(n)s,$$

где s — неотрицательное целое число. При этом, если $k_0 \geq a$, то в представлении для k можно положить $s = 0$, а если $k_0 \leq a - 1$, то при данном k_0 существуют допустимые наборы $(N_1, \dots, N_n)$, которые не представимы в виде k_0 слагаемых требуемого вида, но могут быть представлены в количестве $k_0 + b(n)$ слагаемых.

Библиография: 18 названий.

Светлой памяти профессора А.А. Карацубы посвящается

Нами решается аддитивная проблема Виноградова о величине $V_r = V(n_1, \dots, n_r)$ конечного порядка базиса последовательности векторов вида $p^{n_1}, \dots, p^{n_m}$, где $n_1, \dots, n_m$ – некоторые фиксированные натуральные числа и p пробегает последовательность всех простых чисел. При $r = 1$ – это проблема Варинга–Гольдбаха, решенная нами ранее. Основным результатом настоящей статьи является решение проблемы Виноградова при $n_1 = 1, \dots, n_r = r$, т.е. решение проблемы Гильберта–Камке в простых числах. Первые, не достаточно точные, результаты в этой проблеме даны в работах [1]–[8].

Более общая постановка этой проблемы содержится в книге Виноградова [9; с. 15]. Он писал: “Особый интерес представляют законы распределения значений функции $f(x_1, \dots, x_r)$, принимающей для точек $(x_1, \dots, x_r)$ совокупности Ω целочисленные значения. Здесь в отношении каждого данного целого N возникает вопрос: для скольких точек совокупности Ω это N будет служить значением функции $f(x_1, \dots, x_r)$; иными словами: каково будет число $I(N)$ решений неопределенного уравнения

$$f(x_1, \dots, x_r) = N. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 1. При $k \geq r(n) = [2n^2(2 \ln n + \ln \ln n + 5)]$ и при $P \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned}
 J(\bar{N}; k) &= \gamma \sigma P^{k-0,5n(n+1)} L^{-k} + O\left(P^{k-0,5n(n+1)} L^{-k-1} \ln L\right), \\
 \gamma &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (J(z))^k \exp\left(-2\pi i \left(\frac{N_n}{P^n} \alpha_n + \dots + \frac{N_1}{P} \alpha_1\right)\right) d\alpha_n \dots d\alpha_1, \\
 J(z) &= \int_0^1 \exp(2\pi i(\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x)) dx, \\
 \sigma &= \sigma(\bar{N}; k) = \sum_{Q=1}^{\infty} \sum_{\substack{q_n=1 \\ [q_n, \dots, q_1]=Q}}^{\infty} \dots \sum_{\substack{q_1=1 \\ [q_n, \dots, q_1]=Q}}^{\infty} A(q_n, \dots, q_1), \\
 A(q_n, \dots, q_1) &= \sum_{\substack{(a_n, q_n)=1 \\ 0 \leq a_n < q_n}} \dots \sum_{\substack{(a_1, q_1)=1 \\ 0 \leq a_1 < q_1}} T^k \exp\left(-2\pi i \left(\frac{a_n}{q_n} N_n + \dots + \frac{a_1}{q_1} N_1\right)\right), \\
 T &= T(\bar{a}, \bar{q}) = \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{\substack{(x, Q)=1 \\ 0 \leq x < Q}} \exp\left(2\pi i \left(\frac{a_n}{q_n} x^n + \dots + \frac{a_1}{q_1} x\right)\right).
 \end{aligned}$$

При этом $Q = [q_n, \dots, q_1]$.

Если особый ряд $\sigma = \sigma(k; N)$ будет отличен от нуля, то при фиксированном значении k приведенная выше формула отвечает на вопрос о представимости достаточно больших натуральных чисел N суммой ограниченного количества слагаемых вида p^n , где p пробегает значения простых чисел.

Обсуждению вопроса о положительности особого ряда $\sigma(k; N)$ посвящены статьи Хуа Ло-кена [11], [13] и Марджанишвили [14]. В этих работах, в частности, рассматривалась задача о совместном представлении набора чисел $N_1, \dots, N_m$ соответственно формами вида

$$p_1 + \dots + p_k, \quad \dots, \quad p_1^n + \dots + p_k^n.$$

Данная задача там была решена условно. Полное решение ее, т.е. решение проблемы Гильберта–Камке в простых числах, было дано Чубариковым [1], [3]. В этих работах он нашел “арифметические условия разрешимости”, относящиеся к данной проблеме. Они представляют собой разрешимость нескольких систем линейных сравнений по модулям, равным степеням простых чисел, относительно заданных величин $N_1, \dots, N_n$ и числа слагаемых k . Точная формулировка условий имеет следующий вид.

Набор $N_1, \dots, N_n$ и число слагаемых k удовлетворяют условиям p -разрешимости, если при фиксированном простом числе p разрешима система сравнений

$$\sum_{\substack{\nu=1 \\ (\nu, p)=1}}^{pl_p+r} t_{\nu, p} \nu^m \equiv N_m \pmod{p^{\delta_p}}, \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

где $t_{\nu, p}$ – неизвестные классы вычетов по модулю p^{δ_p} ,

$$n+1 = (p-1)l_p + r, \quad 0 \leq r < p, \quad l_p = \left\lceil \frac{n+1}{p-1} \right\rceil, \quad p^{\delta_p} \parallel (n+l_p)!$$

$(n-1)!$ на простые сомножители, и величина $W_0(p^h; k)$ – количество решений системы сравнений следующего вида:

[illegible]

неизвестные $x_1, \dots, x_k$ которой могут принимать значения из полной системы вычетов по модулю, равному p^h .

Установим теперь для набора $(N_1, \dots, N_n)$, удовлетворяющего условию p -разрешимости, оценку снизу для количества решений системы сравнений Виноградова по модулю степени простого числа.

ЛЕММА 5. Пусть $p \leq n + 1$, $k \geq n^{3 \cdot 2^{2n+20}} = k_2$ и набор $(N_1, \dots, N_n)$ удовлетворяет условию p -разрешимости. Тогда при любом натуральном h для количества $W_1(p^h; k)$ решений системы сравнений Виноградова по модулю степени простого числа справедлива оценка

$$W_1(p^h; k) \geq cp^{h(k-n)} > 0,$$

где $s > 0$ – некоторая постоянная и величина $W_1(p^h; k)$ – количество решений системы сравнений Виноградова следующего вида:

[illegible]

в которой неизвестные $x_1, \dots, x_k$ принимают значения из приведенной системы вычетов по модулю, равному p^h , т.е.

$$1 \leq x_s \leq p^\alpha, \quad (x_s, p) = 1, \quad 1 \leq s \leq k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ – наименьшие натуральные числа, взаимно простые с p , т.е. числа

$$1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1} = lp + r, \quad (a_s, p) = 1, \quad 1 \leq s \leq n + 1.$$

Тогда положим

$$M_s = N_s - A \sum_{r=1}^n a_r^s, \quad 1 \leq s \leq n, \quad A = 3n_1^3 2^{n_1} - n_1, \quad n_1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Набор $(M_1, \dots, M_n)$ так же, как и набор $(N_1, \dots, N_n)$, удовлетворяют условию p -разрешимости. Следовательно, по модулю p^{8n} найдутся вычеты $t_1, \dots, t_{n+1}$ такие, что выполняется следующая система сравнений:

$$\sum_{r=1}^{n+1} t_r a_r^s \equiv M_s \pmod{p^{8n}}, \quad s = 0, 1, \dots, n. \quad (2)$$

где $\mu_1, \dots, \mu_{n+1}$ – некоторые целые числа и $F, F(a_r)$ – следующие определители:

$$F = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 2a_1 & \dots & 2a_l & \dots & 2a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ na_1^{n-1} & \dots & na_l^{n-1} & \dots & na_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$F(a_r) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & a_r & 1 & \dots & 1 \\ 2a_1 & \dots & 2a_{l-1} & a_r^2 & 2a_{l+1} & \dots & 2a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ na_1^{n-1} & \dots & na_{l-1}^{n-1} & a_r^n & na_{l+1}^{n-1} & \dots & na_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель $F(a_r)$ по столбцу с номером l . По известной формуле имеем

$$F(a_r) = \sum_{s=1}^n a_r^s f_s(a_l),$$

где

$$f_s(a_l) = \frac{n!}{s} \prod_{\substack{i < j \\ i, j \neq l}} (a_j - a_i) \sigma_s(a_1, \dots, a_{l-1}, a_{l+1}, \dots, a_n),$$

функции $\sigma_s(a_1, \dots, a_{l-1}, a_{l+1}, \dots, a_n)$ – элементарные симметрические многочлены степени s от указанных переменных.

Следовательно, знаменатель дроби в (7) является делителем чисел

$$sb = s(a_l - a_1) \cdots (a_l - a_{l-1})(a_l - a_{l+1}) \cdots (a_l - a_n).$$

Оценим показатель числа p , входящий множителем в число sb . Имеем

$$\begin{aligned} \delta_p(sb) &= \delta_p(s) + \delta_p(b) \leq \delta_p(s) + \delta_p((lp+r)!) \\ &\leq \gamma + \left\lfloor \frac{lp+r}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{lp+r}{p^2} \right\rfloor + \dots \leq \gamma + \frac{lp+r}{p-1}. \end{aligned}$$

Отсюда получим, что показатель степени числа p в (7) неотрицателен при условии $\alpha - 16 - \gamma - \gamma_1 - \delta \geq 0$. Тем самым доказана разрешимость системы сравнений (6) в числах u_r, v_l .

Теперь оценим сверху число слагаемых k , при которых разрешима система сравнений (3). Находим

$$\begin{aligned} k &= nA + b_1 + \dots + b_{n+1} \leq nA + (n+1)p^\alpha \leq nA + (n+1)p^{(lp+r)/(p-1)+\gamma+\gamma_1+16} \\ &\leq nA + (n+1)n^2 p^{((n+1)p)/((p-1)^2)+16}. \end{aligned}$$

Пусть $p = 2$. Тогда получим

$$k \leq n^4 2^{n/2} - n^2 + (n+1)n^2 2^{2(n+1)+16} \leq n^3 2^{2n+20}.$$

Пусть $p = 3$. Тогда имеем

$$k \leq n^4 2^{n/2} - n^2 + (n+1)n^2 3^{(3(n+1))/4+16} \leq n^3 2^{2n+20}.$$

Пусть, наконец, $p \geq 5$. Тогда находим

$$p^{((n+1)p)/((p-1)^2)+16} \leq 2^{2n+16}.$$

Отсюда имеем, что при любом простом числе p справедливо неравенство $k = k_1 \leq n^3 2^{2n+20}$. Таким образом, при $k \geq k_1$ и $\alpha \leq 8n$ разрешима система сравнений

$$\sum_{r=1}^k x_r^s \equiv N_s \pmod{p^\alpha}, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Положим

$$\alpha = 2\gamma + 2\delta + 3 \leq 8n, \quad \beta = \gamma + \delta + 2, \quad \delta = \delta_p((lp + r)!), \quad p^\gamma \leq n < p^{\gamma+1}.$$

Оценим снизу величину $W_1(p^{\alpha+1}; k)$ – число решений системы сравнений

$$\sum_{r=1}^k z_r^s \equiv N_s \pmod{p^{\alpha+1}}, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где неизвестные z_r , $1 \leq r \leq k$, принимают значения из приведенной системы вычетов по модулю $p^{\alpha+1}$. Пусть

$$z_r = x_r + p^\beta y_r, \quad 0 \leq y_r < p, \quad 1 \leq r \leq k, \quad 2\beta \leq \alpha + 1, \quad 2 \leq \beta \leq \alpha.$$

Тогда покажем, что для любых наборов $(y_{n+1}, \dots, y_k)$ можно найти $y_1, \dots, y_n$ такие, что набор $(z_1, \dots, z_k)$ будет решением системы сравнений (9). Подставим указанные выше значения $(z_1, \dots, z_k)$ в систему сравнений (9). Получим

$$\sum_{r=1}^k sp^\beta x_r^{s-1} y_r \equiv N_s - \sum_{r=1}^k x_r^s \pmod{p^{\alpha+1}}, \quad s = 1, \dots, n.$$

Далее, поскольку набор $(x_1, \dots, x_k)$ удовлетворяет (8), при некоторых фиксированных λ_s , $s = 1, \dots, n$ получим следующую систему сравнений:

$$\sum_{r=1}^n sp^\beta x_r^{s-1} y_r \equiv \lambda_s p^{\alpha-\beta} - \sum_{r=n+1}^k s x_r^{s-1} y_r \pmod{p^{\alpha-\beta+1}}, \quad s = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Зафиксируем любые значения переменных $y_{n+1}, \dots, y_k$ и найдем оставшиеся переменные $y_1, \dots, y_n$ из линейной системы сравнений (10). При $1 \leq m \leq n$ имеем

$$y_m \equiv p^{\alpha-\beta} \sum_{s=1}^n \frac{\lambda_s \sigma_{n-s}(x_1, \dots, x_n)}{s(x_m - x_1) \cdots (x_m - x_{m-1})(x_m - x_{m+1}) \cdots (x_m - x_n)} - \sum_{l=n+1}^k \frac{y_l (x_l - x_1) \cdots (x_l - x_{l-1})(x_l - x_{l+1}) \cdots (x_l - x_n)}{(x_m - x_1) \cdots (x_m - x_{m-1})(x_m - x_{m+1}) \cdots (x_m - x_n)} \pmod{p^{\alpha-\beta+1}}.$$

Заметим, что по выбору чисел $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ они удовлетворяют условиям $\alpha - \beta - \gamma - \delta \geq 0$,

$$\delta \geq \delta_p((x_m - x_1) \cdots (x_m - x_{m-1})(x_m - x_{m+1}) \cdots (x_m - x_n)).$$

Следовательно,

$$W_1(p^{\alpha+1}; k) \geq p^{k-n}.$$

Аналогично осуществляем переход от системы сравнений по модулю $p^{\alpha+1}$ к системе сравнений по модулю $p^{\alpha+2}$ и т.д. Таким образом, при $h \geq \alpha$ находим

$$W_1(p^h; k) \geq p^{(h-\alpha)(k-n)} = c_1 p^{h(k-n)}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. При $p > n + 1$ справедливы следующие утверждения:

- 1) при $k \geq [32n^2 \ln n] = k_3$ имеем оценку $W_1(p; k) \geq 1$;
- 2) при $k \geq [32n^2 \ln n] + 2n = k_4$ выполнено $W_1(p^h; k) \geq p^{n-k_4} p^{h(k-n)}$.

Доказательства этих утверждений проводятся аналогично соответствующим утверждениям статей [15], [18].

ЛЕММА 7. При $k \geq n^2 + n + 1$ имеем $\sigma_p = 1 + O(p^{-1-\nu})$, $\nu = 1/n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя оценку полной рациональной тригонометрической суммы, получим

$$\sum_{\substack{q_n=1 \\ [q_n, \dots, q_1]=p^l}}^{\infty} \cdots \sum_{\substack{q_1=1 \\ [q_n, \dots, q_1]=p^l}}^{\infty} |A(q_n, \dots, q_1)| \leq \sum_{q_n|p^l} \cdots \sum_{q_1|p^l} \varphi(q_n) \cdots \varphi(q_1) p^{-lk\nu} = p^{l(n-k\nu)}.$$

Отсюда при $k \geq n^2 + n + 1$ находим

$$\sigma_p = 1 + O\left(\sum_{l=1}^{\infty} p^{l(n-k\nu)}\right) = 1 + O(p^{n-k\nu}) = 1 + O(p^{-1-\nu}).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $k \geq n^{3/2} 2^{n+20} = k_2$ и набор $N_n, \dots, N_1$ удовлетворяет условию разрешимости. Тогда особый ряд асимптотической формулы для количества решений системы Виноградова будет положителен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим особый ряд σ в следующем виде:

$$\sigma = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3, \quad \varphi_1 = \prod_{p \leq n+1} \sigma_p, \quad \varphi_2 = \prod_{n+1 < p \leq c_1(n)} \sigma_p, \quad \varphi_3 = \prod_{p > c_1(n)} \sigma_p,$$

причем постоянная $c_1(n)$ определяется из леммы 6 так, чтобы при $p > c_1(n)$ выполнялось неравенство $\sigma_p = 1 + O(p^{-1-\nu}) > 0$. Выбор постоянной $c_1(n)$ обеспечивает положительность φ_3 . Положительность φ_1 следует из леммы 5, а положительность φ_2 обеспечивает лемма 7. Лемма доказана.

Таким образом, в лемме 8 установлено, что если какое-либо k вместе с набором $N_1, \dots, N_n$ удовлетворяют арифметическим и вещественным условиям разрешимости и при этом k превосходит некоторую постоянную $a = a(n)$, то

- 1) система уравнений Виноградова разрешима при данном k и растущих допустимых наборах $N_1, \dots, N_n$;

Подобные арифметические условия разрешимости с ограничением $p \leq n + 1$ позволяют дать эффективное решение проблемы Варинга–Гольдбаха.

Оказывается, что для каждого достаточно большого $N > N_0$ всегда можно подобрать $k \leq V(n)$ такое, что при некотором фиксированном $c > 0$ выполняется условие $\sigma = \sigma(k; N) \geq c$. По существу это означает, что при $N > N_0$ каждое натуральное число N является суммой не более, чем $V(n)$ слагаемых вида p^n .

Отметим, что ранее нами было доказано существование функции $V(n)$ и найдены ее оценки.

Определим неотрицательную функцию $\alpha = \alpha(n, p)$, заданную следующим образом: $p^\alpha \parallel n, (p - 1) \mid n$. Положим

$$M(n) = \begin{cases} 2 \prod_{p \leq 2n} p^{\alpha+1}, & \text{если } n \text{ четное,} \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n \geq 2$ – фиксированное натуральное число, $p_1, p_2, \dots, p_k$ пробегают значения простых чисел, превосходящих $2n$. Тогда существует функция $V(n)$ такая, что при $k \leq V(n)$ для всех достаточно больших N имеет место представление

$$N = p_1^n + p_2^n + \dots + p_k^n.$$

Более того, справедливы неравенства

$$n + M(n) < V(n) \leq M(n) + G_1(n) - 1,$$

кроме того, имеем, что $G_1(n) \leq 4n \ln n + 16 \ln \ln n + 8n$.

Оценка значения $G_1(n)$ содержится в работе [18].

Отметим, что для четного числа n функция $M(n)$ ведет себя весьма нерегулярно и ее величина может быть очень большой. Таблица значений функции $M(n)$ при четных n , не превосходящих 100, содержится в статье Хуа [11].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Чубариков, *Многомерные проблемы теории простых чисел*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Новосибирск, 1989.
- [2] Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков, “Об арифметических условиях разрешимости нелинейных систем диофантовых уравнений”, *Докл. АН СССР*, **284**:1 (1985), 16–21.
- [3] В. Н. Чубариков, “Об одновременном представлении натуральных чисел суммами степеней простых чисел”, *Докл. АН СССР*, **286**:4 (1986), 828–831.
- [4] Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков, “О числе слагаемых в проблеме Гильберта–Камке в простых числах”, *Докл. РАН*, **330**:4 (1993), 407–408.
- [5] Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков, “Об асимптотике числа слагаемых в многомерной оддитивной задаче с простыми числами”, *Докл. РАН*, **331**:1 (1993), 5–6.
- [6] Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков, “О числе слагаемых в проблеме Виноградова и ее обобщениях”, *IV Международная конференция “Современные проблемы теории чисел и приложения”, посвященная 180-летию П. Л. Чебышёва и 110-летию И. М. Виноградова* (Тула, 10–15 сентября, 2001), Актуальные проблемы. Ч. 1, Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, М., 2002, 5–38.
- [7] Е. А. Бурлакова, “О проблеме Варинга в простых числах”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2008, № 5, 61–62.

- [8] В. Н. Чубариков, “К проблеме Варинга–Гольдбаха”, *Докл. РАН*, **427**:1 (2009), 24–27.
- [9] И. М. Виноградов, *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*, Тр. МИАН СССР, **23**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1947.
- [10] P. Erdős, “On the easier Waring problem for powers of primes. I”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **33** (1937), 6–12.
- [11] L.-K. Hua, “On the representation of numbers as the sums of the powers of primes”, *Math. Z.*, **44**:1 (1938), 335–346.
- [12] И. М. Виноградов, “Некоторые общие теоремы, относящиеся к теории простых чисел”, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, **3**, 1938, 1–33.
- [13] L.-K. Hua, *Additive Primzahltheorie*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959.
- [14] К. К. Марджанишвили, “Об одной задаче аддитивной теории чисел”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **4**:2 (1940), 193–214.
- [15] Г. И. Архипов, “О значении особого ряда в проблеме Гильберта–Камке”, *Докл. АН СССР*, **259**:2 (1981), 265–267.
- [16] Г. И. Архипов, “О проблеме Гильберта–Камке”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:1 (1984), 3–52.
- [17] Хуа Ло-Кен, *Аддитивная теория простых чисел*, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **22**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1947.
- [18] Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков, *Теория кратных тригонометрических сумм*, Наука, М., 1987.

Г. И. Архипов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: arkh@mi.ras.ru

Поступило

29.12.2009

В. Н. Чубариков

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: chubarik2009@live.ru, chubarik1@mech.math.msu.su