Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. Б. Фридлендер, Г. Иванец, Сведение сумм характеров к суммам Клоостермана, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 3, 476–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8808>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 09:37:56

Сведение сумм характеров к суммам Kloostermana

Дж. Б. Фридлендер, Г. Иванец

Оценка очень короткой суммы Kloostermana специального вида, принадлежащая А. А. Карацубе, применяется к оценке среднего значения суммы характеров Дирихле.

Библиография: 3 названия.

Памяти Анатолия Алексеевича Карацубы

1. Введение. Настоящая статья написана под влиянием работы Карацубы [1], в которой изучаются билинейные формы вида

$$K_{\alpha\beta}(m) = \sum_{(u,v)=1} \alpha_u \beta_v e\left(a \frac{\overline{uv}}{m}\right), \quad (1.1)$$

где $e(z) = e^{2\pi iz}$, а символом $\bar{b}$ обозначается вычет, обратный к b по модулю m . Попытки получения нетривиальных оценок таких сумм в случае, когда переменные u, v пробегают интервалы, длины которых очень малы по сравнению с модулем m , наталкиваются на серьезные препятствия. Наша цель – продемонстрировать новое приложение следующего частного случая замечательной оценки Карацубы (доказательство см. в [2; предложение 13.5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть α_u, β_v – комплексные числа, удовлетворяющие условиям $|\alpha_u|, |\beta_v| \leq 1$ для простых u и v , $P \leq u, v \leq 2P$. Пусть, далее, d – целое число с условием

$$d(2P)^{2d-1} < m. \quad (1.2)$$

Тогда если m – простое число и $(a, m) = 1$, то

$$|K_{\alpha\beta}(m)| \leq (dP)^2 (mP^{-2d})^{1/2d^2}. \quad (1.3)$$

Используемое нами в статье предположение о том, что все числа u, v, m простые, не является принципиальным в наших рассуждениях и делается лишь для того, чтобы упростить изложение. Заметим, что тривиальная оценка имеет вид $|K_{\alpha\beta}| \leq P^2$. Оценка (1.1) нетривиальна лишь на промежутке

$$P^{2d-1} \ll m \ll P^{2d}. \quad (1.4)$$

Работа первого автора выполнена при поддержке гранта NSERC A5123; работа второго автора выполнена при поддержке гранта NSF DMS-08-02246.

Несмотря на наличие такого рода ограничений, Карацуба с успехом применил свой результат к задаче о диофантовых приближениях специального вида. В работе [3; с. 85–93] мы дали еще одно приложение этой оценки, уточнив при некоторых условиях с помощью методов решета классическую оценку Бруна–Титчмарша для величины $\pi(x; m, a)$.

В настоящей работе мы собираемся использовать (1.3) для оценки суммы

$$S^* = \sum_{\chi \pmod{q}}^* \chi(n) \bar{\chi}(m) \left(\sum_u \alpha_u \chi(u) \right) \left(\sum_v \beta_v \chi(v) \right) |L_f(\chi)|^2, \quad (1.5)$$

где коэффициенты подчинены тем же условиям, что и в предложении 1, а

$$L_f(\chi) = \sum_{\ell} f(\ell) \chi(\ell). \quad (1.6)$$

Символ $*$ означает, что суммирование ведется по примитивным характерам; через f обозначена гладкая функция с носителем на отрезке $[L, 2L]$, удовлетворяющая при любом целом $A \geq 0$ условию

$$f^{(A)} \ll L^{-A}, \quad (1.7)$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит от A .

Вместо суммы значений характеров $L_f(\chi)$ было бы более естественным рассматривать L -функции $L(s, \chi)$ на критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Однако нам хотелось максимально упростить наши рассуждения и потому мы ограничились конечными сглаженными суммами. В силу функционального уравнения (или формулы Пуассона) мы, не ограничивая общности, можем предполагать, что $L \ll q^{1/2}$. Наши результаты оказываются наиболее интересными в случае, когда $L \asymp q^\theta$, а θ близко к $1/2$. Везде ниже мы будем предполагать, что $0 < \theta \leq 1/2$. Чтобы еще больше упростить выкладки, будем считать q простым числом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $2L < m < q < mL$, $(m, n) = 1$ и $m \asymp nP^2$. Тогда

$$S^* \ll mLK_{\alpha'\beta'}(m) + m^{-1}qLP^2, \quad (1.8)$$

где $K_{\alpha'\beta'}(m)$ – некоторая билинейная форма вида (1.1) с условием $(a, m) = 1$, коэффициенты α'_u, β'_v которой ограничены по порядку величинами $|\alpha'_u|, |\beta'_v|$ соответственно.

Заметим, что (1.8) наряду с тривиальной оценкой $|K_{\alpha'\beta'}(m)| \leq P^2$ дает

$$S^* \ll mL P^2, \quad (1.9)$$

в то время как (1.3) приводит к несколько более точному неравенству

$$S^* \ll mL P^2 (mP^{-2d})^{1/2d^2} + m^{-1}qLP^2, \quad (1.10)$$

но только на специальных промежутках типа (1.4) (постоянная в знаке $\ll$ зависит от d).

2. Доказательства. Мы начнем с оценок следующих сумм:

$$T = \sum_{\chi \pmod{q}} \chi(k) \bar{\chi}(m) |L_f(\chi)|^2, \quad (2.1)$$

$$T^* = \sum_{\chi \pmod{q}}^* \chi(k) \bar{\chi}(m) |L_f(\chi)|^2, \quad (2.2)$$

где $(k, mq) = 1$, $k \asymp m$. Везде далее мы будем считать числа m , q простыми и предполагать, что выполнены те же неравенства, что и в первом разделе: $2L < m < q < mL$.

Для главного характера $\chi_0 \pmod{q}$ имеем

$$L_f(\chi_0) = \sum_{\ell} f(\ell) = \widehat{f}(0) + O(L^{-A}), \quad (2.3)$$

где $\widehat{f}$ обозначает преобразование Фурье функции f . Следовательно,

$$T = T^* + |\widehat{f}(0)|^2 + O(L^{-A}). \quad (2.4)$$

С другой стороны, из свойства ортогональности характеров с последующим применением формулы суммирования Пуассона мы заключаем, что

$$\begin{aligned} T &= \varphi(q) \sum_{k\ell \equiv h\ell' \pmod{q}} f(\ell) \bar{f}(\ell') = \varphi(q) \sum_{k\ell - m\ell' = qr} f(\ell) \bar{f}(\ell') \\ &= \varphi(q) \sum_{(r,m)=1} \sum_{\ell \equiv qr\bar{k} \pmod{m}} f(\ell) \bar{f}\left(\frac{k\ell - qr}{m}\right) \\ &= \varphi(q) \sum_{(r,m)=1} \sum_m e\left(-qrh\frac{\bar{k}}{m}\right) \int f(mx) \bar{f}\left(kx - \frac{qr}{m}\right) e(hx) dx. \end{aligned}$$

Пусть T_0 обозначает вклад от слагаемых, отвечающих условию $h \equiv 0 \pmod{m}$, т.е.

$$T_0 = \frac{\varphi(q)}{m} \sum_{(r,m)=1} \sum_b \int f(x) \bar{f}\left(\frac{kx - qr}{m}\right) e(bx) dx.$$

При $b \neq 0$ внутренний интеграл есть $O(L(bL)^{-A})$, в чем легко убедиться с помощью интегрирования по частям. Кроме того, из условий на носитель f и соотношения $k \asymp m$ следует, что $r \neq 0$, $r \ll mLq^{-1}$. Так, находим

$$T_0 = T_{00} + O(L^{-A}),$$

где T_{00} есть вклад слагаемых, отвечающих $b = 0$, т.е.

$$T_{00} = \frac{\varphi(q)}{m} \sum_{(r,m)=1} \int f(x) \bar{f}\left(kx - \frac{qr}{m}\right) dx.$$

Заметим также, что $|r| < m$ и условие $(r, m) = 1$ означает, что $r \neq 0$.

Суммируя по r и пользуясь формулой Пуассона, находим

$$\sum_r \bar{f}\left(kx - \frac{qr}{m}\right) = \sum_c \int \bar{f}\left(kx - \frac{qy}{m}\right) e(cy) dy = \frac{m}{q} \sum_c e\left(\frac{ckx}{q}\right) \bar{f}\left(\frac{cm}{q}\right).$$

Следовательно,

$$T_{00} = \frac{\varphi(q)}{q} \sum_c \widehat{f}\left(\frac{ck}{q}\right) \overline{\widehat{f}}\left(\frac{cm}{q}\right) - \varphi(q) \int f(mx) \widehat{f}(kx) dx.$$

Заметим наконец, что при $c = 0$ возникает слагаемое $(1 - 1/q)|\widehat{f}(0)|^2$, почти совпадающее со вкладом от главного характера (ср. с (2.4)). Собирая вместе все полученные результаты, приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 1. *При указанных выше условиях справедливо равенство*

$$\begin{aligned} T^* &= \varphi(q) \sum_{(hr,m)=1} \sum e\left(-qhr \frac{\bar{k}}{m}\right) \int f(mx) \overline{\widehat{f}}\left(kx - \frac{qr}{m}\right) e(hx) dx \\ &+ \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{c \neq 0} \widehat{f}\left(\frac{ck}{q}\right) \overline{\widehat{f}}\left(\frac{cm}{q}\right) - \varphi(q) \int f(mx) \overline{\widehat{f}}(kx) dx - q^{-1} |\widehat{f}(0)|^2 + O(L^{-A}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Оценивая тривиально все слагаемые в правой части (2.5), кроме первого, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть q, m – простые числа с условием $2L < m < q < mL$, и пусть $(k, m) = 1, k \asymp m$. Тогда*

$$T^* = \varphi(q) \sum_{(hr,m)=1} \sum e\left(-qhr \frac{\bar{k}}{m}\right) \int f(mx) \overline{\widehat{f}}\left(kx - \frac{qr}{m}\right) e(hx) dx + O(m^{-1}qL). \quad (2.6)$$

С помощью интегрирования по частям можно убедиться в том, что интеграл в (2.6) удовлетворяет оценке

$$\int \ll \frac{L}{m} \left(1 + \frac{|h|L}{m}\right)^{-A}. \quad (2.7)$$

Так как $r \neq 0, r \ll mLq^{-1}$, то последние неравенства приводят нас к следующей тривиальной оценке:

$$T^* \ll mL. \quad (2.8)$$

Полагая в (2.6) $k = nuv$ и суммируя по $P < u, v < 2P$, получаем (1.8). При этом следует отметить, что хотя переменные u и v в интеграле

$$\int f(mx) \overline{\widehat{f}}\left(nuvx - \frac{qr}{m}\right) e(hx) dx$$

не разделены, этого можно добиться заменой x на x/v .

Эта статья была написана в Принстонском Институте перспективных исследований (IAS) осенью 2009 г. в рамках программы по аналитической теории чисел. Оба автора выражают благодарность IAS за создание замечательных условий работы и творческую атмосферу, располагающую к научным исследованиям. Первый из авторов благодарит также Ellentuck Fund за частичную поддержку. Кроме того, мы благодарны Екатерине Карацубе за интерес к нашей работе и рецензенту за тщательную проверку рукописи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Карацуба, “Аналоги сумм Клоостермана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:5 (1995), 93–102.
- [2] J. B. Friedlander, H. Iwaniec, *Opera de Cribro*, Colloq. Pub., **57**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [3] J. Friedlander, H. Iwaniec, “The Brun–Titchmarsh theorem”, *Analytic Number Theory* (Kyoto, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **247**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, 85–93.

Дж. Б. Фридлендер

Department of Mathematics, University of Toronto, Канада

E-mail: frdlndr@math.toronto.edu

Поступило

29.12.2009

Исправленный вариант

26.04.2010

Г. Иванец

Rutgers, The State University of New Jersey,

Department of Mathematics, США