Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. К. Галлахер, Х. Л. Монтгомери, Об оценке Бёрджесса, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 3, 355–364

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8809>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 14:39:08

Об оценке Бёрджесса

П. К. Галлахер, Х. Л. Монтгомери

Используя прием Радемахера–Меньшова, мы доказываем “максимальные” аналоги основных оценок сумм характеров. Это позволяет дать такое изложение метода Бёрджесса, при котором трудности технического характера в гораздо меньшей степени, чем ранее, оттеняют основную идею.

Библиография: 25 названий.

Посвящается памяти А. А. Карацубы

Более девяноста лет назад юные Виноградов [1] и Пойя [2], независимо друг от друга, используя различные методы, доказали, что если χ – неглавный характер по модулю q , то

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n) \ll q^{1/2} \ln q. \quad (1)$$

Вскоре Шур [3] показал, что если характер χ примитивный, то постоянную в этом “неравенстве Виноградова–Пойя” можно положить равной единице. Сейчас существует обширная литература, посвященная вопросу асимптотически наилучшей постоянной; в п. 5 мы приводим сводку таких результатов, составленную Паулем Т. Бейтманом. Можно ожидать, что в действительности справедливо и более сильное утверждение, скажем, оценка типа

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n) \ll N^{1/2} q^\varepsilon,$$

однако результаты, достигнутые в этом весьма важном направлении, пока достаточно скромны. Пэли [4] показал, что имеют место случаи, когда

$$\left| \sum_{n=M+1}^{M+N} \left(\frac{n}{p} \right) \right| \geq \frac{1}{4} p^{1/2} \ln \ln p.$$

Вместе с тем, Монтгомери и Вон [5] в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана (РГР) доказали, что

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n) \ll q^{1/2} \ln \ln q$$

в случае, когда χ является неглавным характером по модулю q . (См. статью Грэнвилла и Соундарараяна [6], где содержится сильно упрощенное доказательство этого результата). В связи с этим основной интерес для нас будут представлять нетривиальные оценки (типа $o(N)$) для возможно меньших значений N . Бёрджесс [7] доказал, что

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} \left(\frac{n}{p} \right) = o(N), \quad \text{если } N > q^{1/4+\delta}. \quad (2)$$

Хотя его рассуждения весьма последовательны, их смысл в целом уловить достаточно сложно, поскольку одновременно приходится иметь дело сразу с несколькими техническими трудностями, так что главная идея ускользает от внимания. Используя прием Меньшова–Радемахера наряду с неоднократным применением неравенства Гёльдера, нам удалось отделить то, что является в нашем рассуждении основной идеей, от сложностей чисто технического характера. Но если не учитывать это новшество, в целом мы остаемся близки к исходному доказательству Бёрджесса. Сам Бёрджесс последовательно перенес свой метод на случай произвольного неглавного характера по модулю p (см. [8]), затем на случай примитивных характеров по бесквадратному модулю [9], и, наконец, на случай модулей, свободных от кубов [10]. Однако для того чтобы сделать наши рассуждения максимально прозрачными, мы сосредоточим все свое внимание на символе Лежандра. Отметим также, что Иванец (см. Фридлендер [11]) предложил еще один способ доказательства оценки Бёрджесса, основанный на идеях, весьма близких к тем, которые использовал Карацуба [12], [13]) при оценках сумм характеров в конечных полях. В книге Монтгомери и Вона [14; с. 315–317] используется именно метод Иванца; отдельные же приемы заимствованы из статьи Иванца и Фридлендера [15].

В качестве основной цели нашего исследования мы рассмотрим следующий частный случай оценки Бёрджесса.

ТЕОРЕМА 1 (Бёрджесс). Пусть r – натуральное число. Тогда

$$\sum_{0 < n \leq H} \left(\frac{n}{p} \right) \ll H^{1-1/r} p^{(r+1)/(4r^2)} \log p. \quad (3)$$

При $r = 1$ оценка (3) (совпадающая с неравенством Виноградова–Пойя при $M = 0$, $N = H$) является наилучшей для

$$p^{5/8} \leq H \leq p, \quad (4)$$

а при $r \geq 2$ – наилучшей для

$$p^{(r^2+3r+1)/(4r(r+1))} \leq H \leq p^{(r^2+r-1)/(4(r-1)r)}. \quad (5)$$

1. Основная идея. Пусть q – простое число, отличное от p . Тогда

$$\sum_{0 < n \leq H} \left(\frac{n}{p} \right) = \sum_{b=1}^q \sum_{\substack{0 < n \leq H \\ n \equiv b \pmod{q}}} \left(\frac{n}{p} \right) = \sum_{a=1}^q \sum_{\substack{0 < n \leq H \\ n \equiv -ap \pmod{q}}} \left(\frac{n}{p} \right). \quad (6)$$

Обозначим через $I(a, q)$ интервал $I(a, q) = (a/q, a/q + H/pq]$. Если $n = mq - ap$, то n удовлетворяет условию из (6) ровно тогда, когда $m/p \in I(a, q)$. Так как $(n/p) =$

$(m/p)(q/p)$, из неравенства треугольника следует, что

$$\left| \sum_{0 < n \leq H} \left(\frac{n}{p} \right) \right| \leq \sum_{a=1}^q \left| \sum_{\substack{m \\ m/p \in I(a,q)}} \left(\frac{m}{p} \right) \right|. \quad (7)$$

Обозначим через $\mathcal{S}$ множество простых чисел $q \in (Q/2, Q]$ и положим $S = \text{card } \mathcal{S}$. Здесь Q – некоторый параметр, точное значение которого будет выбрано позже. Просуммируем (7) по всем S элементам множества $\mathcal{S}$ и разделим на S . Так получим

$$\left| \sum_{0 < n \leq H} \left(\frac{n}{p} \right) \right| \leq \frac{1}{S} \sum_{q \in \mathcal{S}} \sum_{a=1}^q \left| \sum_{\substack{m \\ m/p \in I(a,q)}} \left(\frac{m}{p} \right) \right|. \quad (8)$$

Если $q > H$, то внутренняя сумма содержит не более одного слагаемого, и в этом случае речи об осцилляции идти не может. Следовательно, мы будем выбирать Q так, чтобы выполнялось условие $Q \leq H$. Тогда внутренняя сумма будет содержать $\asymp H/Q$ слагаемых. Если бы в таких суммах слагаемые не погашали друг друга, то правая часть (8) являлась бы величиной $\asymp H$, что служит лишь тривиальной оценкой для суммы в левой части. Для того чтобы получить нетривиальную оценку, мы должны лишь показать, что сумма по m осциллирует “в среднем”.

При оценке вклада от каждого из интервалов $I(a, q)$ полезно знать, когда они являются непересекающимися. В этом случае мы имеем бы

$$\left| \sum_{0 < n \leq H} \left(\frac{n}{p} \right) \right| \leq \frac{1}{S} \sum_{q \in \mathcal{S}} \sum_{a=1}^{q-1} \left| \sum_{\substack{m \\ m/p \in I(a,q)}} \left(\frac{m}{p} \right) \right| + \frac{2H}{Q}. \quad (9)$$

Действительно, предположим, что $a'/q' > a/q$. Тогда расстояние между этими дробями равно, по меньшей мере, $1/qq' \geq 1/qQ$. Следовательно, интервалы $I(a, q)$ не будут пересекаться, если

$$Hq \leq p, \quad (10)$$

поскольку в этом случае $H/(pq) \leq 1/(qQ)$.

2. Оценка Вейля и ее приложения. Содержание этого пункта опирается на рассуждения из работы Дэвенпорта и Эрдеша [16]. Вейль [17] доказал гипотезу Римана для кривых над конечными полями, и из этого фундаментального результата легко следовало приведенное ниже утверждение. За деталями доказательства этого следствия мы отсылаем к лемме 1 из работы Бёрджесса [7].

ЛЕММА 1. Пусть $r(x) = (x + c_1) \cdots (x + c_k)$, где $k \geq 1$, а все числа c_i различны по модулю p . Тогда справедлива оценка

$$\left| \sum_{n=1}^p \left(\frac{r(n)}{p} \right) \right| \leq 2k\sqrt{p}.$$

Доказательство Вейля достаточно трудоемко, однако Степанов [18] предложил гораздо более простой подход, основанный на теории трансцендентности. Бомбьери [19] развил метод Степанова и показал, что общий результат Вейля может быть получен из теоремы Римана–Роха. Шмидт [20], [21] воспользовался идеями Степанова для того, чтобы доказать теорему Вейля элементарным методом, не требующим применения теоремы Римана–Роха.

ЛЕММА 2. Для целого положительного r положим

$$S_{h,r} = \sum_{n=1}^p \left(\sum_{n < m \leq n+h} \left(\frac{m}{p} \right) \right)^{2r}.$$

Тогда, если $1 \leq h \leq p$, то

$$S_{h,1} = h(p-h). \quad (11)$$

Если же $r = 2, 3, \dots$, то

$$S_{h,r} \ll r^r (h^r p + h^{2r} p^{1/2}). \quad (12)$$

Здесь и в последующих леммах мы указываем на те результаты, которые получаются при $r = 1$, хотя наше доказательство теоремы 1 использует лишь $r \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тождество (11) является классическим, однако для полноты изложения мы приведем его простое доказательство. Пусть $s(a) = \sum_{n=1}^p (n(n+a)/p)$. Ясно, что $s(0) = p-1$ и $\sum_{a=1}^p s(a) = 0$. Если $p \nmid a$, то an пробегает вместе с n полную систему вычетов, так что $s(a) = \sum_{n=1}^p (an(an+a)/p) = s(1)$. Следовательно, $s(a) = -1$ при $p \nmid a$. Запишем теперь

$$S_{h,1} = \sum_{n=1}^p \left(\sum_{m=1}^h \left(\frac{m+n}{p} \right) \right)^2.$$

Возводя в квадрат и делая суммирование по n внутренним, замечаем, что предыдущее выражение равно

$$\sum_{a=-h}^h (h - |a|) s(a) = h(p-1) - 2 \sum_{a=1}^h (h-a) = h(p-h).$$

Так получаем (11). Чтобы доказать (12), возведением в степень убеждаемся, что

$$S_{h,r} = \sum_{n=1}^p \sum_{b_1, \dots, b_{2r}} \left(\frac{(n+b_1) \cdots (n+b_{2r})}{p} \right) = \sum_b \sum_{n=1}^p \left(\frac{f_b(n)}{p} \right),$$

где $b_1, \dots, b_{2r}$ независимо друг от друга пробегают значения от 1 до h , а

$$f_b(x) = \prod_{k=1}^{2r} (x + b_k).$$

Запишем равенство $f_b(x) = g_b(x)h_b^2(x)$, где g_b не содержит сомножителей-квадратов. Если $h_b(p) \not\equiv 0 \pmod{p}$, то $(f_b(x)/p) = (g_b(x)/p)$. Так как h_b имеет самое большее r нулей (по $\pmod{p}$), отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^p \left(\frac{f_b(n)}{p} \right) \leq \sum_{n=1}^p \left(\frac{g_b(n)}{p} \right) + r.$$

Применим теперь лемму 1 с $k \leq 2r$; получим

$$S_{h,r} = h^{2r}(4rp^{1/2} + r) + N(h, r)p,$$

где $N(h, r)$ равно числу наборов b , для которых $g_b \equiv 1$. Чтобы завершить доказательство леммы 2, остается показать, что

$$N(h, r) \leq r^r h^r. \quad (13)$$

Допустим, что φ есть отображение множества $\{1, 2, \dots, 2r\}$ во множество $\{1, 2, \dots, h\}$, обладающее следующим свойством: при любом ℓ величина $\text{card}\{j : \varphi(j) = \ell\}$ есть четное число. Пусть k – наименьшее целое число с условием $\varphi(k) = \varphi(2r)$. Тогда для $j \notin \{j, 2r\}$ имеется лишь $N(h, r-1)$ возможностей выбора $\varphi(j)$. Также имеется $2r-1$ возможностей для выбора k и h возможностей для значения $\varphi(2r)$. Следовательно,

$$N(h, r) \leq (2r-1)hN(h, r-1).$$

Но так как $N(h, 1) = h$, отсюда следует, что

$$N(h, r) \leq 1 \cdot 3 \dots (2r-1)h^r.$$

Это и приводит к оценке (13), поскольку $s(2r-s) \leq r^2$.

3. Прием Радемахера–Меньшова. Прием Радемахера [22] и Меньшова [23] позволяет получать “максимальный” аналог имеющегося неравенства с помощью двоичных разложений и неравенства Гёльдера. С помощью этого метода мы докажем сейчас “максимальный” аналог леммы 2.

ЛЕММА 3. Пусть

$$S_{h,r}^* = \sum_{n=1}^p \max_{\ell < h} \left(\sum_{n \leq m < n+\ell} \left(\frac{m}{p} \right) \right)^{2r}.$$

Тогда

$$S_{h,1}^* \ll ph(\ln 2h)^2, \quad (14)$$

$$S_{h,r}^* \ll (Cr)^r (h^r p + h^{2r} p^{1/2}) \quad (15)$$

при $r = 2, 3, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $r > 1$. Так как $S_{h,r}^*$ есть возрастающая функция h , достаточно доказать неравенство в случае, когда h есть степень 2, например, $h = 2^\lambda$. Для $\ell < h = 2^\lambda$ запишем $\ell = h \sum 2^{-\mu}$, где μ принимает значения различных натуральных чисел, не превосходящих λ . Так получим

$$\sum_{n \leq m < n+\ell} \left(\frac{m}{p} \right) = \sum_{\mu} \sum_{n+\nu h/2^\mu \leq m < n+(\nu+1)h/2^\mu} \left(\frac{m}{p} \right),$$

где

$$\nu = \nu_\mu = \sum_{\mu' < \mu} 2^{\mu-\mu'}$$

есть целое число, зависящее от μ и ℓ . По неравенству Гёльдера,

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n \leq m < n+\ell} \left(\frac{m}{p} \right) \right)^{2r} \\ & \leq \left(\sum_{\mu} B^{-2\mu r/(2r-1)} \right)^{2r-1} \sum_{\mu} B^{2\mu r} \left(\sum_{n+\nu h/2^\mu \leq m < n+(\nu+1)h/2^\mu} \left(\frac{m}{p} \right) \right)^{2r}. \end{aligned}$$

Здесь μ и ν по-прежнему являются значениями, определяемыми двоичным разложением числа ℓ/h . Но теперь мы позволим μ принимать все подряд идущие значения из интервала $(0, \lambda]$, а ν – все подряд идущие значения из интервала $[0, 2^\mu)$. Первая сумма в правой части последнего неравенства представляет собой геометрическую прогрессию. Если $B > 1$, то вся правая часть неравенства

$$\leq C_B^{2r-1} \sum_{0 < \mu \leq \lambda} B^{2\mu r} \sum_{0 \leq \nu < 2^\mu} \left(\sum_{n+\nu h/2^\mu \leq m < n+(\nu+1)h/2^\mu} \left(\frac{m}{p} \right) \right)^{2r}.$$

Эта оценка равномерна по $0 \leq \ell < h$, так что

$$S_{h,r}^* \leq C_B^{2r-1} \sum_{0 < \mu \leq \lambda} 2^\mu B^{2\mu r} S_{r,h/2^\mu}.$$

По лемме 2 это не превосходит

$$C_B^{2r-1} r^r \left(p \sum_{0 < \mu \leq \lambda} B^{2\mu r} 2^\mu (h/2^\mu)^r + p^{1/2} \sum_{0 < \mu \leq \lambda} B^{2\mu r} 2^\mu (h/2^\mu)^{2r} \right).$$

При $B = 2^{1/5}$ последняя величина

$$\ll (Cr)^r (ph^r + p^{1/2} h^{2r}).$$

Так приходим к оценке (15). Для доказательства (14) применяем те же рассуждения, но полагаем в них $B = 1$ и пользуемся оценкой $S_{h,r} \leq ph$.

Другой пример применения приема Радемахера–Меньшова к суммам характеров см. в работе Монтгомери и Вона [14].

ЛЕММА 4. Пусть $I_1, \dots, I_T$ – непересекающиеся интервалы на промежутке $[0, p)$, и пусть $h < |I_t| \leq 2h$ для всех t . Тогда

$$\sum_{t=1}^T \left(\sum_{m \in I_t} \left(\frac{m}{p} \right) \right)^2 \ll p(\ln 2h)^2, \quad (16)$$

$$\sum_{t=1}^T \left(\sum_{m \in I_t} \left(\frac{m}{p} \right) \right)^{2r} \ll (C_1 r)^r (h^{r-1} p + h^{2r-1} p^{1/2}) \quad \text{при } r = 2, 3, \dots \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякой последовательности $\{a_m\}$, имеющей лишь конечное число отличных от нуля членов, и для любого натурального числа h справедливо равенство

$$\sum_m a_m = \frac{1}{h} \sum_n \sum_{n < m \leq n+h} a_m.$$

Если носитель $\{a_m\}$ лежит на промежутке $M < m \leq M + L$ и $h \leq L$, то

$$\left| \sum_m a_m \right| \leq \frac{1}{h} \sum_{M < n \leq M+L} \left(\max_{\ell \leq h} \left| \sum_{n \leq m < n+\ell} a_m \right| + \max_{\ell \leq h} \left| \sum_{n-\ell < m \leq n} a_m \right| \right).$$

Следовательно, по неравенству Гёльдера,

$$\left| \sum_m a_m \right|^{2r} \leq \frac{(2L)^{2r-1}}{h^{2r}} \sum_{M < n \leq M+L} \left(\max_{\ell \leq h} \left| \sum_{n \leq m < n+\ell} a_m \right|^{2r} + \max_{\ell \leq h} \left| \sum_{n-\ell < m \leq n} a_m \right|^{2r} \right).$$

Если, сверх того, $L \leq 2h$, то первый сомножитель в правой части $\leq 16^r/h$. Применим полученное неравенство к каждому промежутку I_t с $a_m = (m/p)$ и просуммируем затем по t . Так как I_t попарно непересекаются, то в обозначениях леммы 3

$$\sum_{t=1}^T \left(\sum_{m \in I_t} \left(\frac{m}{p} \right) \right)^{2r} \leq \frac{16^r}{h} S_{h,r}^*.$$

Оценки (16) и (17) следуют теперь из (14) и (15).

ЛЕММА 5. Пусть $I_1, \dots, I_T$ — непересекающиеся интервалы на промежутке $[0, p)$, и пусть $h < |I_t| \leq 2h$ для всех t . Тогда

$$\sum_{t=1}^T \left| \sum_{m \in I_t} \left(\frac{m}{p} \right) \right| \ll T^{1/2} p^{1/2} \ln 2h, \quad (18)$$

$$\sum_{t=1}^T \left| \sum_{m \in I_t} \left(\frac{m}{p} \right) \right| \ll r^{1/2} T^{1-1/(2r)} (h^{1/2-1/(2r)} p^{1/(2r)} + h^{1-1/(2r)} p^{1/(4r)}) \quad (19)$$

при $r = 2, 3, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства Гёльдера сумма из условия не превосходит

$$\left(\sum_{t=1}^T 1 \right)^{1-1/(2r)} \left(\sum_{t=1}^T \left(\sum_{m \in I_t} \left(\frac{m}{p} \right) \right)^{2r} \right)^{1/(2r)}.$$

Теперь искомая оценка следует из леммы 4.

4. Завершение доказательства. Сначала исключим из рассмотрения несколько крайних случаев. Если $H \geq p^{1/2+1/(4r)}$, то искомая оценка следует из неравенства Виноградова–Пойа, поскольку

$$p^{1/2} \ln p = p^{(1/2+1/(4r))(1-1/r)+(r+1)/(4r^2)} \ln p \leq H^{1-1/r} p^{(r+1)/(4r^2)} \ln p.$$

Следовательно, можно считать, что

$$H \leq p^{1/2+1/(4r)}. \quad (20)$$

Далее, если $H \leq p^{(r+1)/(4r)}$, то

$$\left| \sum_{n=1}^H \left(\frac{m}{p} \right) \right| \leq H = H^{1-1/r} H^{1/r} \leq H^{1-1/r} p^{(r+1)/(4r^2)}.$$

Таким образом, достаточно рассмотреть случай

$$H \geq p^{(r+1)/(4r)}. \quad (21)$$

Если же $r \geq \ln p$, то из (20) мы заключаем, что $H^{1-1/r} \asymp H$ и $p^{(r+1)/(4r)} \asymp 1$. Значит, правая часть (3) есть величина $\asymp H \ln p$, что хуже, чем тривиальная оценка. Так мы можем ограничиться случаем

$$r \leq \ln p. \quad (22)$$

Применим лемму 5 к $T = \sum_{q \in \mathcal{S}} q - 1 \asymp Q^2 / \ln Q$ и $h = [H/Q]$. Согласно (9)

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq H} \left(\frac{n}{p} \right) &\ll (H^{1/2-1/(2r)} Q^{1/2-1/(2r)} p^{1/(2r)} \\ &+ H^{1-1/(2r)} Q^{-1/(2r)} p^{1/(4r)}) (\ln Q)^{1/(2r)} r^{1/2} + H/Q. \end{aligned}$$

Из двух слагаемых в скобках первое является возрастающей функцией Q , а второе — убывающей. Чтобы минимизировать их сумму, положим $Q = Hp^{-1/(2r)}$. Ввиду (20), при таком выборе Q условие (10) удовлетворяется. Далее, с помощью (21) мы заключаем, что $Q \geq p^{(r-1)/(4r)}$, так что Q велико при большом p и наша оценка (в смысле величины T) является содержательной. Следовательно, вышеприведенное выражение

$$\ll r^{1/2} H^{1-1/r} p^{1/(4r)+1/(4r^2)} (\ln p)^{1/(2r)} + p^{1/(2r)}.$$

Согласно (22) $r^{1/2} (\ln p)^{1/(2r)} \ll \ln p$. Последнее слагаемое в полученном выше неравенстве является наименьшим, поскольку из (21) следует, что

$$H^{1-1/r} p^{(r+1)/(4r^2)} \geq p^{(r+1)/(4r)} \geq p^{1/(2r)}.$$

Теорема доказана.

5. Неравенство Виноградова–Пойа. Здесь мы приводим составленную Паулем Т. Бейтманом сводку результатов об асимптотически наилучших известных значениях постоянной в неравенстве Виноградова–Пойа. Пусть χ — примитивный характер по модулю q . Ландау [24] доказал, что если $\chi(-1) = -1$, то

$$\max_x \left| \sum_{0 < n \leq x} \chi(n) \right| \leq \left(\frac{1}{2\pi} + o(1) \right) \sqrt{q} \ln q, \quad (23)$$

и, в более общем виде,

$$\max_{x,y} \left| \sum_{x < n \leq y} \chi(n) \right| \leq \left(\frac{1}{2\pi} + o(1) \right) \sqrt{q} \ln q. \quad (24)$$

Ни одно из этих неравенств с тех пор так и не было усилено. В случае $\chi(-1) = 1$ Ландау [24] установил, что

$$\max_x \left| \sum_{0 < n \leq x} \chi(n) \right| \leq \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} + o(1) \right) \sqrt{q} \ln q, \quad (25)$$

и что

$$\max_{x,y} \left| \sum_{x < n \leq y} \chi(n) \right| \leq \left(\frac{1}{\pi\sqrt{2}} + o(1) \right) \sqrt{q} \ln q. \quad (26)$$

Поскольку Ландау доказывал все эти неравенства по отдельности, можно заключить, что в случае $\chi(-1) = 1$ он просто не заметил того, что

$$\max_{x,y} \left| \sum_{x < n \leq y} \chi(n) \right| = 2 \max_x \left| \sum_{0 < n \leq x} \chi(n) \right|. \quad (27)$$

Доказательство Ландау опирается на неравенство

$$\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \sum_{m=1}^n \frac{|\sin m\theta|}{m} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \ln n + O(1).$$

Однако в задаче 38 отдела VI книги Поля и Сегё [25] можно найти и более точный результат, а именно

$$\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \sum_{m=1}^n \frac{|\sin m\theta|}{m} = \frac{2}{\pi} \ln n + O(1).$$

Бейтмен (ок. 1950, неопубликовано) отметил, использование этих неравенств в доказательстве Ландау в случае $\chi(-1) = 1$ приводит к оценкам

$$\max_x \left| \sum_{0 < n \leq x} \chi(n) \right| \leq \left(\frac{1}{\pi^2} + o(1) \right) \sqrt{q} \ln q, \quad (28)$$

$$\max_{x,y} \left| \sum_{x < n \leq y} \chi(n) \right| \leq \left(\frac{2}{\pi^2} + o(1) \right) \sqrt{q} \ln q. \quad (29)$$

Вероятно, это наилучшие оценки из известных.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. М. Виноградов, “Sur la distribution des résidus et des nonrésidus des puissances”, *Журнал физ.-матем. об-ва при Пермском ун-те*, **1** (1918), 94–98.
- [2] G. Pólya, “Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste”, *Gött. Nachr.*, 1918, 21–29.
- [3] I. Shur, “Ein ige Bemerkungen zu der vorsthenden Arbeit des Herrn G. Pólya: Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste”, *Gött. Nachr.*, 1918, 30–36.
- [4] R. E. A. C. Paley, “A theorem of characters”, *J. London Math. Soc.*, **7**:1 (1932), 28–32.
- [5] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, “Exponential sums with multiplicative coefficients”, *Invent. Math.*, **43**:1 (1977), 69–82.
- [6] A. Granville, K. Soundararajan, “Large character sums: pretentious characters and the Pólya–Vinogradov theorem”, *J. Amer. Math. Soc.*, **20**:2 (2007), 357–384.
- [7] D. A. Burgess, “The distribution of quadratic residues and non-residues”, *Mathematika*, **4** (1957), 106–112.
- [8] D. A. Burgess, “On character sums and primitive roots”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **12**:1 (1962), 179–192.
- [9] D. A. Burgess, “On character sums and L -series”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **12**:1 (1962), 193–206.
- [10] D. A. Burgess, “On character sums and L -series. II”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **13**:1 (1963), 524–536.
- [11] J. Friedlander, “Primes in arithmetic progressions and related topics”, *Analytic Number Theory and Diophantine Problems* (Stillwater, OK, 1984), Progr. Math., **70**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987.

- [12] А. А. Карацуба, “Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях”, *Докл. АН СССР*, **180**:6 (1968), 1287–1289.
- [13] А. А. Карацуба, “Об оценках сумм характеров”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:1 (1970), 20–30.
- [14] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, “Mean values of character sums”, *Canad. J. Math.*, **31**:3 (1979), 476–487.
- [15] J. Friedlander, H. Iwaniec, “Estimates for character sums”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **119**:2 (1993), 365–372.
- [16] H. Davenport, P. Erdős, “The distribution of quadratic and higher residues”, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1952), 252–265.
- [17] A. Weil, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s’en déduisent*, Actualités Sci. Ind., **1041**, Hermann et Cie., Paris, 1948.
- [18] С. А. Степанов, “О числе точек гиперэллиптической кривой над простым конечным полем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **33**:5 (1969), 1171–1181.
- [19] E. Bombieri, “Counting points on curves over finite fields (d’après S. A. Stepanov)”, *Séminaire Bourbaki*, 25ème année, Exp. No. 430, Lecture Notes in Math., **383**, Springer-Verlag, Berlin, 1974, 234–241.
- [20] W. M. Schmidt, “Zur Methode von Stepanov”, *Acta Arith.*, **24** (1973), 347–367.
- [21] W. M. Schmidt, *Equations over Finite Fields. An Elementary Approach*, Lecture Notes in Math., **536**, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [22] H. Rademacher, “Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen”, *Math. Ann.*, **87**:1-2 (1922), 112–138.
- [23] D. Menchoff, “Sur les séries de fonctions orthogonales. (Première Partie. La convergence.)”, *Fund. Math.*, **4** (1923), 82–105.
- [24] E. Landau, “Abschätzungen von Charaktersummen, Einheiten und Klassenzahlen”, *Gött. Nachr.*, 1918, 79–97.
- [25] Г. Поля, Г. Сегё, *Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2: Теория функций. Распределение нулей. Полиномы. Определители. Теория чисел*, Наука, М., 1978.

П. К. Галлахер

Columbia University, Department of Mathematics, США

E-mail: pxg@cpw.math.columbia.edu

Поступило

01.12.2009

Исправленный вариант

12.03.2010

Х. Л. Монтгомери

Michigan State University, Department of Mathematics, США

E-mail: hlm@umich.edu