Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Баскаков, Об условиях и порядке приближения функций операторами классов S_{2m} , *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 5, 654–661

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm881>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:07:33

УДК 517

ОБ УСЛОВИЯХ И ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРАМИ КЛАССОВ S_{2m}

В. А. Баскаков

Исследуются условия сходимости операторов классов S_{2m} по П. П. Коровкину к непрерывным функциям и асимптотика приближения ими дифференцируемых функций.

Библиография: 11 названий.

Согласно определению П. П. Коровкина [1] операторы

$$\begin{aligned} U_n(f; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt &= 1, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

являются операторами класса S_{2m} , если ядра $K_n(t)$ имеют не более $2m$ перемен знака на периоде $[-\pi, \pi)$. Если ядра $K_n(t)$ – четные функции, то точки перемен знака располагаются симметрично относительно начала координат.

Если $m = 0$ (и, следовательно, $K_n(t) \geq 0$), то операторы (1) положительные. Коровкиным доказано [2], что линейные положительные полиномиальные операторы не могут приближать дифференцируемые сколь угодно раз функции с порядком более высоким, чем $O(1/n^2)$. Им же доказано [3], что операторы класса S_{2m} могут приближать $2m + 2$ раз дифференцируемые функции с порядком $O(1/n^{2m+2})$.

В настоящее время существует довольно обширная литература о приближении непрерывных и дифференцируемых функций различными конструкциями операторов классов S_{2m} . Так, например, в наиболее ранних работах А. И. Коваленко [4] и И. Сабадаша [5] на основе известных положительных ядер были разработаны методы получения операторов классов S_2 с лучшими аппроксимативными свойствами по сравнению с исходными положительными операторами. В последнее время появился ряд статей Р. К. Васильева, в которых он построил несколько примеров операторов классов S_2 и S_4 с оптимальными аппроксимативными свойствами (см., например, [6], [7]).

Цель статьи состоит в получении некоторых общих оценок порядка приближения непрерывных и дифференцируемых функций операторами классов S_{2m} .

Сначала запишем интерполяционную формулу Ньютона для тригонометрической интерполяции, преобразуя соответствующую формулу для алгебраической интерполяции (см., например, [8, с. 25–27]):

$$\begin{aligned} f(x) &= [x_0] + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &+ [x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + R_n(x), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \psi(x), \quad \psi(x) = (x-x_0) \cdots (x-x_n);$$

$\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ – узлы интерполяции, ξ лежит в одном интервале с точкой x и узлами интерполяции,

$$[x_0] = f(x_0), \quad [x_0, x_1] = \frac{[x_0] - [x_1]}{x_0 - x_1}, \quad [x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2}, \quad \dots, \\ [x_0, \dots, x_n] = \frac{[x_0, \dots, x_{n-1}] - [x_1, \dots, x_n]}{x_0 - x_n}.$$

Пусть точка x и узлы интерполяции лежат в интервале $(-1, 1)$ и функция f имеет в этом интервале непрерывную производную $(2n+2)$ -го порядка.

Заменим переменную в формуле (2), положив $x = \cos t$. Пусть $x_k = \cos t_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, $f(\cos t) = \varphi(t)$, $[t_k] = \varphi(t_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Заменим производную по переменной x $(n+1)$ -го порядка $f^{n+1}(\xi)$ соответствующей производной по переменной t от функции $\varphi(t)$, полагая

$$f'(x) = \varphi'(t) \cdot t'_x = \frac{\varphi(t)}{x'(t)} = \frac{\varphi'(t)}{-\sin t} \equiv \varphi^{[1]}(t), \quad f''(x) = \frac{(\varphi^{[1]}(t))'}{-\sin t} \equiv \varphi^{[2]}(t), \quad \dots, \\ f^{(n)}(x) = \frac{(\varphi^{[n-1]}(t))'}{-\sin t} \equiv \varphi^{[n]}(t).$$

После этого (2) запишется следующим образом:

$$\varphi(t) = [t_0] + [t_0, t_1](\cos t - \cos t_0) + [t_0, t_1, t_2](\cos t - \cos t_0)(\cos t - \cos t_1) + \dots \\ + [t_0, t_1, \dots, t_n](\cos t - \cos t_0) \cdots (\cos t - \cos t_{n-1}) + R_n(t), \quad (3)$$

где

$$R_n(t) = \frac{\varphi^{[n+1]}(\xi)}{(n+1)!} \psi(t), \quad \psi(t) = \prod_{k=0}^n (\cos t - \cos t_k),$$

а точка ξ находится между точками $\{t, t_0, \dots, t_n\}$.

В дальнейшем эта формула будет применяться к четной функции $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$ в точке $t = 0$.

Заметим, что

$$\varphi_x^{[1]}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(x+t) - f'(x-t)}{-\sin t} = 2f''(x), \quad \varphi_x^{[2]}(0) = \frac{2}{3}(f^{(4)}(x) + f''(x)), \quad \dots$$

В общем случае производная $\varphi^{[n]}(0)$ выражается через производные функции $f(x)$ до порядка $2n$ включительно.

ТЕОРЕМА 1. Пусть точки $t_k = t_{kn}$, $k = 0, 1, \dots, m$, принадлежат интервалу $(0, 2\pi)$, $t_0 = 0$ и четное ядро $K_n(t)$ оператора (1) меняет знак только в точках $\{\pm t_{kn}\}_{k=1}^m$. Пусть 2π -периодическая функция $y = f(x)$ такова, что для всех x и t

$$|\varphi_x^{[m+1]}(t)| \leq M_1. \quad (4)$$

Тогда для всех x

$$|U_n(f; x) - f(x)| \leq M_2 \max_{1 \leq k \leq m+1} |U_n(\cos kt; 0) - 1|, \quad (5)$$

где M_1, M_2 – постоянные, не зависящие от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Записывая для краткости формулу (3) при $n = m$ и $\varphi(t) = \varphi_x(t)$ в виде $\varphi_x(t) = P_m(\varphi_x; t) + R_m(\varphi_x; t)$, получим

$$\begin{aligned} U_n(f; x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x(t) K_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_m(\varphi_x; t) K_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R_m(\varphi_x; t) K_n(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^m [t_{0n}, t_{1n}, \dots, t_{in}] \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=0}^{i-1} (\cos t - \cos t_{jn}) K_n(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi_x^{[m+1]}(\xi)}{(m+1)!} \prod_{i=0}^m (\cos t - \cos t_{in}) K_n(t) dt, \end{aligned} \quad (6)$$

где точка ξ лежит в одном интервале с точками $\{t, t_{in}, i = 0, \dots, m\}$.

Так как

$$\begin{aligned} 1) [t_{0n}, t_{1n}, \dots, t_{in}] &= \frac{\varphi_x^{[i]}(\xi_i)}{i!}, \quad 0 = t_{0n} \leq \xi_i \leq t_{in} \quad (\text{см. [8, с. 26]}); \\ 2) \prod_{i=0}^p (\cos t - \cos t_{in}) &= \sum_{k=1}^{p+1} b_{kn} (\cos kt - 1), \end{aligned}$$

причем все коэффициенты $\{b_{kn}\}$, как нетрудно видеть, ограничены по k и n , а производные $\varphi_x^{[i]}(\xi_i)$, $i = 1, \dots, m+1$, ограничены по условию теоремы, то утверждение теоремы следует из (6).

Если условия теоремы 1 дополнить условием ограниченности в совокупности норм операторов (1), то, применяя теорему Банаха–Штейнгауза, получим для операторов (1) периодический вариант известной теоремы Коровкина (см. [3]).

ТЕОРЕМА (П. П. Коровкин). Пусть операторы (1) принадлежат к классу S_{2m} . Тогда если для них выполнено $m+1$ условие

$$U_n(\cos kt; 0) \rightarrow 1, \quad k = 1, 2, \dots, m+1, \quad (7)$$

и нормы их ограничены в совокупности: $\|U_n\| \leq \text{const}$, $n = 1, 2, \dots$, то для любой функции $f(x) \in C_{2\pi}$ равномерно для всех x $U_n(f; x) \Rightarrow f(x)$, $n \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если операторы (1) представляют собой линейные методы суммирования рядов Фурье

$$L_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_{kn} \cos kt \right) dt, \quad (8)$$

то так как

$$L_n(\cos kt; 0) = \lambda_{kn}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

утверждение (5) теоремы 1 примет вид

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq M_3 \max_{1 \leq k \leq m+1} |\lambda_{kn} - 1|,$$

а условие (7) в теореме Коровкина $\lambda_{kn} \rightarrow 1$, $k = 1, 2, \dots, m+1$. Кроме того, если

$$1 - \lambda_{kn} = O\left(\frac{1}{n^{2m+2}}\right), \quad k = 1, 2, \dots, m+1, \quad (9)$$

то условие ограниченности норм в предыдущей теореме можно опустить и сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Если операторы (8) принадлежат к классу S_{2m} и

$$1 - \lambda_{kn} = O\left(\frac{1}{n^{2m+2}}\right), \quad k = 1, 2, \dots, m+1,$$

то для любой функции $f(x) \in C_{2\pi}$ равномерно для всех x $L_n(f; x) \Rightarrow f(x)$.

В самом деле, из условия (9) и теоремы 1 следует, что класс функций $W^{(2m+2)}$ с ограниченной $(2m+2)$ -й производной приближается операторами (8) с наилучшим полиномиальным порядком, а из этого, как показано в [9] (см. также [10, с. 33]), следует ограниченность норм $\{\|L_n\|\}$.

Получим асимптотическую оценку приближения дифференцируемых функций операторами (1) класса S_{2m} .

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $y = f(x)$ такова, что $\varphi_x^{[m+1]}(t)$ существует и для фиксированного x непрерывна в точке $t = 0$. Пусть в дополнение к условиям теоремы 1:

$$\begin{aligned} \text{а) } & t_{in} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ \text{б) } & \left| \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - 1) \prod_{i=0}^m (\cos t - \cos t_{in}) K_n(t) dt \right| \\ & = o\left(\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=0}^m (\cos t - \cos t_{in}) K_n(t) dt\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда имеет место асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} U_n(f; x) - f(x) &= \sum_{i=0}^{m-1} [t_{0n}, t_{1n}, \dots, t_{in}] \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=0}^i (\cos t - \cos t_{jn}) K_n(t) dt \\ &+ \left(\frac{\varphi_x[m+1](0)}{2\pi(m+1)!} + o(1) \right) \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=0}^m (\cos t - \cos \alpha_{in}) K_n(t) dt, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\varphi_x^{[m+1]}(t) = \varphi_x^{[m+1]}(0) + \alpha(x, t)$, $\alpha(x, t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$, поступая аналогично доказательству теоремы 1, получим

$$\begin{aligned} U_n(f; x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_m(\varphi_x, t) K_n(t) dt \\ &+ \frac{\varphi_x^{[m+1]}(0)}{2\pi(m+1)!} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{i=0}^m (\cos t - \cos t_{in}) K_n(t) dt \\ &+ \frac{1}{2\pi(m+1)!} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha(x, \xi) \prod_{i=0}^m (\cos t - \cos t_{in}) K_n(t) dt, \end{aligned}$$

где ξ – точка, лежащая между точками $\{\alpha_{in}\}$ и t .

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное положительное число и $\delta(\varepsilon) > 0$ таково, что $|\alpha(x, \xi)| < \varepsilon$, если $\xi \in (0, \delta(\varepsilon))$.

Так как $t_{in} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, для всех $i = 1, 2, \dots, m$, то можно указать число $N(\varepsilon)$ такое, что для $n > N(\varepsilon)$

$$0 < t_{in} < \delta(\varepsilon), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Но тогда для $t \in [0, \delta(\varepsilon)]$ точка $\xi \in (0, \delta(\varepsilon))$ и $|\alpha(x, \xi)| < \varepsilon$.

Разобьем теперь последний интеграл I в предыдущем равенстве на два следующим образом:

$$I = \left(\int_0^{\delta(\varepsilon)} + \int_{\delta(\varepsilon)}^{\pi} \right) \alpha(x, \xi) \prod_{i=0}^m (\cos t - \cos t_{in}) K_n(t) dt \equiv I_1 + I_2.$$

Очевидно, что

$$I_1 \leq \varepsilon \int_0^{\pi} \prod_{i=0}^m (\cos t - \cos t_{in}) K_n(t) dt.$$

Из условия теоремы следует, что функция $\alpha(x, t)$ ограничена по t .

Пусть $|\alpha(x, t)| \leq M_4(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} I_2 &\leq M_4(x) \int_{\delta(\varepsilon)}^{\pi} \frac{1 - \cos t}{1 - \cos \delta(\varepsilon)} \prod_{i=0}^m (\cos t - \cos t_{in}) K_n(t) dt \\ &\leq \frac{M_4(x)}{1 - \cos \delta(\varepsilon)} \int_0^{\pi} (1 - \cos t) \prod_{i=0}^m (\cos t - \cos t_{in}) K_n(t) dt. \end{aligned}$$

Из последних оценок в силу произвольности ε и условия б) теоремы 3 следует, что

$$I = o \left(\int_0^{\pi} \prod_{i=0}^m (\cos t - \cos t_{in}) K_n(t) dt \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

и теорема доказана.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1) Если $m = 0$, то $K_n(t) \geq 0$ и операторы (8) положительны. Для них (11) принимает вид

$$L_n(f; x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} (\varphi_x^{[1]}(0) + o(1)) \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - 1) K_n(t) dt = -f''(x)(1 - \lambda_{1n}) + o(1 - \lambda_{1n}),$$

а условие б) теоремы 3 –

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos t)^2 K_n(t) dt = o \left(\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos t) K_n(t) dt \right)$$

или

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \lambda_{2n} - 2 \lambda_{1n} = 2(1 - \lambda_{1n}) - \frac{1}{2}(1 - \lambda_{2n}) = o(1 - \lambda_{1n}).$$

При условии $\lambda_{1n} \neq 1$, которое верно для всех положительных невырожденных операторов, это эквивалентно тому, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \lambda_{2n}}{1 - \lambda_{1n}} = 4.$$

Таким образом, получается известный результат Коровкина [2] об асимптотике приближения дважды дифференцируемых функций линейными положительными операторами.

2) Пусть $m = 1$. Тогда для операторов класса S_2 из (11) получим

$$\begin{aligned} U_n(f; x) - f(x) &= \frac{1}{2}[t_{0n}, t_{1n}] \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - 1) K_n(t) dt \\ &= \frac{1}{4}(\varphi_x^{[2]}(0) + o(1)) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - 1)(\cos t - \cos t_{1n}) K_n(t) dt \end{aligned} \quad (12)$$

при условии

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - 1)^2 (\cos t - \cos t_{1n}) K_n(t) dt = o\left(\int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - 1)(\cos t - \cos t_{1n}) K_n(t) dt\right). \quad (13)$$

Так как

$$\begin{aligned} \varphi_x^{[1]}(0) &= -2f''(x), \quad \varphi_x^{[2]}(0) = \frac{2}{3}(f''(x) + f^{(4)}(x)), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - 1) K_n(t) dt &= \lambda_{1n} - 1, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - 1)(\cos t - \cos t_{1n}) K_n(t) dt &= \frac{1}{2}(\lambda_{2n} - 1) - (\lambda_{1n} - 1)(1 + \cos t_{1n}), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t - 1)^2 (\cos t - \cos t_{1n}) K_n(t) dt &= \\ &= \frac{1}{4}(\lambda_{3n} - 1) - \frac{1}{2}(\lambda_{2n} - 1)(2 + \cos t_{1n}) + (\lambda_{1n} - 1)\left(\frac{7}{4} + 2 \cos t_{1n}\right), \\ [t_{0n}, t_{1n}] &= -\frac{f(x + t_{1n}) + f(x - t_{1n}) - 2f(x)}{1 - \cos t_{1n}} = -2f''(x) + O(t_{1n}^2), \end{aligned}$$

то (12) принимает вид

$$\begin{aligned} U_n(f; x) - f(x) &= -f''(x)(\lambda_{1n} - 1) \\ &+ \frac{1}{6}(f''(x) + f^{(4)}(x) + o(1))\left(\frac{1}{2}(\lambda_{2n} - 1) - (\lambda_{1n} - 1)(1 + \cos t_{1n})\right) \end{aligned} \quad (14)$$

при условии

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}(\lambda_{3n} - 1) - \frac{1}{2}(\lambda_{2n} - 1)(2 + \cos t_{1n}) - (\lambda_{1n} - 1)(1 + 2 \cos t_{1n}) \\ &= o\left(\frac{1}{2}(\lambda_{2n} - 1) - (\lambda_{1n} - 1)(1 + \cos t_{1n})\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим пример операторов класса S_2 из работы П. Бутцера и Э. Штарка [11], в котором $t_{1n} = \sqrt{5}\pi/n$,

$$\begin{aligned} K_n(t) &= \frac{16 \sin^6(\pi/n)}{n(9 \cos(\pi/n) + \cos(3\pi/n) - 10 \cos(\sqrt{5}\pi/n))} \\ &\times \frac{(\cos t - \cos(\sqrt{5}\pi/n))(\cos t + 2 \cos(\pi/n))^2 \cos^2(nt/2)}{(\cos t - \cos(\pi/n))^2 (\cos t - \cos(3\pi/n))^2} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{kn} \cos kt. \end{aligned}$$

В этой работе доказано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^4(1 - \lambda_{1n}) = \frac{3}{8}\pi^4(k^2 + k^4), \quad k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Для чисел $\{\lambda_{kn}\}$ из этого примера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{2n} - 1}{\lambda_{1n} - 1} = 10, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{3n} - 1}{\lambda_{1n} - 1} = 45,$$

и условие (15), которое приводится к виду

$$\frac{1}{4} \frac{\lambda_{3n} - 1}{\lambda_{1n} - 1} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_{2n} - 1}{\lambda_{1n} - 1} \left(2 + \cos \sqrt{5} \frac{\pi}{n}\right) + \left(\frac{7}{4} + 2 \cos \sqrt{5} \frac{\pi}{n}\right) = o\left(\frac{1}{2} \frac{\lambda_{2n} - 1}{\lambda_{1n} - 1} - 1 - \cos \sqrt{5} \frac{\pi}{n}\right),$$

выполняется и асимптотическая формула (14) справедлива и может быть приведена к виду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^4(U_n(f; x) - f(x)) = -\frac{3}{8}\pi^4(f^{(4)}(x) - f''(x)). \quad (17)$$

Для операторов класса S_2 из конструкции Сабадаша [5]

$$\lambda_{1n} \equiv 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^4(1 - \lambda_{2n}) = C(U_n)(k^4 - k^2). \quad (18)$$

Для чисел $\{\lambda_{kn}\}$ из его конструкции условие (15) принимает вид

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\lambda_{3n} - 1}{\lambda_{2n} - 1} \right) - \frac{1}{2} (2 + \cos t_{1n}) = o(1),$$

что при условии $t_{1n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, эквивалентно тому, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{3n} - 1}{\lambda_{2n} - 1} = 6.$$

Из (18) следует, что это условие выполняется и асимптотическая формула (14), которая в работе Сабадаша получена иным путем, справедлива.

Заметим, что, так как в конструкции Сабадаша для операторов класса S_{2m} множители суммируемости $\lambda_{1n} = \lambda_{2n} = \dots = \lambda_{mn} = 1$, используя (11) и производные $\{\varphi_x^{[k]}(t)\}$, асимптотическую формулу (21) из его работы можно записать следующим образом:

$$U_n(f; x) - f(x) = \frac{(\varphi_x^{[m+1]}(0) + o(1))}{2\pi(m+1)!} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=0}^m (\cos t - \cos t_{kn}) K_n(t) dt.$$

В статьях [6], [7] Васильев привел несколько новых примеров операторов класса S_2 и один пример операторов класса S_4 . Для получения асимптотических оценок приближения дифференцируемых функций этими операторами он использовал общую теорему из работы Сабадаша [5]. Но эта теорема доказана Сабадашем для операторов классов S_{2m} , построенных по его методу. Метод Васильева отличен от метода Сабадаша (и он сам это подчеркивает в статье [7]). Поэтому асимптотические оценки, полученные Васильевым в работах [6] и [7], являются необоснованными.

Более того, применяя теорему Сабадаша к известному оператору Бутцера и Штарка, приведенному выше, он получает формулу (см. [6])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^4(1 - \lambda_{kn}) = \frac{3}{8}\pi^4(k^4 - k^2),$$

отличную от формулы (16) Бутцера и Штарка.

Автор выражает глубокую благодарность С. А. Теляковскому, руководителю семинара по теории приближения функций в Математическом институте РАН, и членам этого семинара за полезное обсуждение результатов этой статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Коровкин П. П. Сходящиеся последовательности линейных операторов // УМН. 1962. Т. 17. № 4 (106). С. 147–152.
- [2] Коровкин П. П. Об одном асимптотическом свойстве положительных методов суммирования рядов Фурье и о наилучшем приближении класса $\mathbb{Z}_2$ линейными положительными полиномиальными операторами // УМН. 1958. Т. 13. № 6 (84). С. 99–103.
- [3] Коровкин П. П. О порядке приближения функций линейными полиномиальными операторами класса S_m // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Баку: Изд. АН АзССР, 1965. С. 163–166.
- [4] Коваленко А. И. О некоторых методах суммирования рядов Фурье // Матем. сб. 1966. Т. 71 (113). № 4. С. 598–616.
- [5] Szabados J. On convolution operators with kernels of finite oscillation // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1976. V. 27. № 1–2. P. 179–192.
- [6] Vassiliev R. K. Certaines méthodes de sommation de séries de Fourier donnant le meilleur ordre d'approximation // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1994. V. 63. № 1. P. 65–102.
- [7] Васильев Р. К. Методы суммирования рядов Фурье, дающие наилучший порядок приближения // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 2. С. 145–151.
- [8] Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.–Л.: Гостехиздат, 1952.
- [9] Dahmen W., Görlich E. A conjecture of M. Golomb on optimal and nearly-optimal linear approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V. 80. № 6. P. 1199–1202.
- [10] Баскаков В. А. Линейные методы суммирования рядов Фурье и приближение непрерывных функций. Калинин: КГУ, 1980.
- [11] Butzer P. L., Stark E. L. On a trigonometric convolution operator with kernel having two zeros of simple multiplicity // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1969. V. 20. № 3–4. P. 451–461.

Московский автомобильно-дорожный институт

Поступило
18.02.1997