Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ивич, В. Цай, Моменты высших порядков для остаточного члена в проблеме делителей, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 3, 374–383

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8810>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:42:37

Моменты высших порядков для остаточного члена в проблеме делителей

А. Ивич, В. Цай

Доказано, что если $k \geq 2$ – заданное целое и $1 \ll H \leq (1/2)X$, то

$$\int_{X-H}^{X+H} \Delta_k^4(x) dx \ll_\varepsilon X^\varepsilon (HX^{(2k-2)/k} + H^{(2k-3)/(2k+1)} X^{(8k-8)/(2k+1)}),$$

где $\Delta_k(x)$ – остаточный член в общей проблеме делителей Дирихле. В доказательстве используется формула типа формулы Вороного для $\Delta_k(x)$, и оценка Роберта–Саргоса количества целых чисел для случая, когда разность четырех корней k -й степени мала. Мы также исследуем величину остаточного члена в асимптотической формуле для m -го момента величины $\Delta_2(x)$.

Библиография: 15 названий.

Посвящается светлой памяти профессора А. А. Карацубы

1. Введение и формулировка результатов. Для фиксированного $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\Delta_k(x) := \sum_{n \leq x} d_k(n) - xP_{k-1}(\log x) \quad (1.1)$$

– остаточный член в (обобщенной) *проблеме делителей Дирихле* (иногда называемой также *проблемой делителей Пильтца*, особенно в случае $k = 3$). Здесь $d_k(n)$ означает число способов представления числа n в виде произведения k сомножителей (так что $d_1(n) \equiv 1$ и $d_2(n) = d(n)$ – число делителей n), и $P_{k-1}(z)$ – подходящий полином степени $k - 1$ по z (подробности см., например, [1; гл. 13] и [2; гл. 12]). Функция $\Delta_k(x)$ может принимать и положительные, и отрицательные значения. Она имеет скачки конечной величины в точках $x = n \in \mathbb{N}$, величина которых может быть порядка $\exp(C(k) \log n / \log \log n)$, – максимально возможный порядок величины $d_k(n)$.

В частности,

$$\Delta_2(x) \equiv \Delta(x) = \sum_{n \leq x} d(n) - x(\log x + 2\gamma - 1) \quad (1.2)$$

представляет собой остаточный член в классической проблеме делителей Дирихле ($\gamma = -\Gamma'(1) = 0.5772\dots$ – константа Эйлера). Существует обширная литература об

Работа второго автора выполнена при поддержке Китайского национального фонда естественных наук (Nat. Natural Science Foundation of China) (грант № 10771127).

оценках $\Delta_k(x)$ и особенно $\Delta(x)$ (см. ссылку выше), как поточечно, так и в различных средних. Это касается, в особенности, различных среднеквадратичных оценок величины $\Delta(x)$. В этой работе мы будем рассматривать моменты более высоких порядков, в частности, четвертый момент величины $\Delta_k(x)$ на “коротких” интервалах вида $[X - H, X + H]$, который является следующим “естественным” моментом после второго. Здесь “короткий” означает, что рассматриваемый диапазон изменения H есть $H = o(X)$ при $X \rightarrow \infty$.

Заметим сначала, что первый автор в [3] (см. также [1; гл. 13]) доказал оценку $\Delta(x)$ при больших значениях переменной, которая дает

$$\int_1^X \Delta^4(x) dx \ll_{\varepsilon} X^{2+\varepsilon}. \quad (1.3)$$

Здесь и далее через ε обозначаются сколь угодно малые положительные постоянные, вообще говоря, различные. Асимптотическая формула для четвертого момента с остаточным членом была получена Цангом [4]. Он уточнил (1.3), получив

$$\int_1^X \Delta^4(x) dx = CX^2 + O_{\varepsilon}(X^{\gamma+\varepsilon}) \quad (1.4)$$

с явно вычисленными $C (> 0)$ и $\gamma = 45/23 = 1.956\dots$. Цанг также доказал асимптотическую формулу для интеграла от куба величины $\Delta(x)$, а именно,

$$\int_1^X \Delta^3(x) dx = BX^{7/4} + O_{\varepsilon}(X^{\beta+\varepsilon}) \quad (1.5)$$

с явно вычисленными $B > 0$ и $\beta = 47/28 = 1.6785\dots$. Далее, Ивич и Саргос [5] улучшили значения констант $\beta = 7/5 = 1.4$, $\gamma = 23/12 = 1.91666\dots$, а второй автор [6] еще уменьшил значение γ до $53/28 = 1.8926\dots$. Моменты высших порядков от $\Delta(x)$ изучались Хис-Брауном [7] и вторым автором, который в [6] доказал, что

$$\int_1^X \Delta^m(x) dx = C_m X^{1+m/4} + O_{\varepsilon}(X^{1+m/4-\eta_m+\varepsilon}) \quad (1.6)$$

для целых m таких, что $5 \leq m \leq 9$, с некоторой явно выраженной $\eta_m > 0$. Он приводит замкнутое (хотя и сложное) выражение для констант C_m , и возникает гипотеза, что (1.6) выполняется для всех $m \in \mathbb{N}$.

В отношении истинного порядка величины $\Delta_k(x)$ классическая гипотеза утверждает, что $\Delta_k(x) \ll_{k,\varepsilon} x^{(k-1)/(2k)+\varepsilon}$, в то время как с другой стороны $\Delta_k(x) = \Omega(x^{(k-1)/(2k)})$ (см., например, [1] или [2]). Для $k = 2, 3$ это вытекает эвристически из (2.4) и (при $k = 2$) из асимптотической формулы (1.4). Самый точный из известных омега-результатов для $\Delta_k(x)$ принадлежит К. Сандарараджану [8], который доказал, что

$$\Delta_k(x) = \Omega\{G_k(x)\}, \quad k \geq 2, \quad (1.7)$$

с

$$G_k(x) := (x \log x)^{(k-1)/(2k)} (\log \log x)^a (\log \log \log x)^{-b} \\ a = \frac{k+1}{2k} (k^{(2k)/(k+1)} - 1), \quad b = \frac{3k-1}{4k}. \quad (1.8)$$

Здесь, как всегда, $f(x) = \Omega(g(x))$ ($g(x) > 0$ при $x \geq C$) означает, что равенство $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 0$ не имеет места. Следовательно, существует последовательность $\{x_n\}$, стремящаяся к бесконечности, такая, что для некоторого $\delta > 0$ выполнено

$$|f(x_n)| > \delta g(x_n), \quad n \geq n_0(\delta). \quad (1.9)$$

Наша первая задача – получить омега-результат для остаточного члена в (1.6). Этот результат содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Если η_m определено формулой (1.6), то для всех $m \geq 2$ выполнено $\eta_m \leq 3/4$. Более точно,

$$\int_1^X \Delta^m(x) dx = C_m X^{1+m/4} + \Omega(G^{m+1}(X) \log^{-1} X), \quad (1.10)$$

где $G(x) \equiv G_2(X)$ задано в (1.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Было бы интересно исследовать знак величины C_m в (1.6) в общем случае; ее значения при $2 \leq m \leq 9$ положительны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Результат, аналогичный теореме 1, может быть получен для m -го момента в общей функции погрешности $\Delta_k(x)$. Однако помимо асимптотической формулы

$$\int_1^X \Delta_3^2(x) dx = (10\pi^2)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} d_3^2(n) n^{-4/3} X^{5/3} + O_{\varepsilon}(X^{14/9+\varepsilon})$$

Тонга [9], не существует других асимптотических формул для моментов $\Delta_k(x)$ при $k > 2$. Поэтому подобный результат в настоящее время не будет иметь большого практического значения.

Моменты $\Delta(x)$ на коротких интервалах были исследованы Лау и Цангом [10]. В частности, они доказали, что существует

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{HX^{m/4}} \int_{X-H}^{X+H} |\Delta(x)|^m dx, \quad m \in \mathbb{N},$$

при определенных условиях на m и H . Лау и Цанг также исследовали вышеупомянутый интеграл от $\Delta^m(x)$ (т.е. без модуля). Представляется, что при $k > 2$ аналогичных результатов для $\Delta_k(x)$ не существует.

Наш результат, который важен, главным образом, при $2 \leq k \leq 4$, касается четвертого момента величины $\Delta_k(x)$ на коротких интервалах. Он состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 2. Если $k \geq 2$ – заданное целое число и $1 \ll H \leq (1/2)X$, то

$$\int_{X-H}^{X+H} \Delta_k^4(x) dx \ll_{\varepsilon} X^{\varepsilon} (HX^{(2k-2)/k} + H^{(2k-3)/(2k+1)} X^{(8k-8)/(2k+1)}). \quad (1.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Заметим, что при $H \leq X/2$ и $k \geq 3$

$$HX^{(2k-2)/k} \leq H^{(2k-3)/(2k+1)} X^{(8k-8)/(2k+1)},$$

и при $k = 2$ это выполнено для $H \leq X^{3/4}$. Важность $HX^{(2k-2)/k+\varepsilon}$ состоит в том, что это “ожидаемый” порядок интеграла (1.11), ввиду гипотезы $\Delta(x) \ll_{k,\varepsilon} x^{(k-1)/(2k)+\varepsilon}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Одна из причин, почему мы рассматриваем четвертую степень $\Delta_k(x)$, состоит в том, что имеется результат Роберта и Саргоса [11], представленный в лемме 2. Случай нечетных моментов более труден, так как $\Delta_k^m(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, если m нечетно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В случае $k = 2$ теорема 2 влечет

$$\int_{X-H}^{X+H} \Delta^4(x) dx \ll_{\varepsilon} X^{\varepsilon} (HX + X^{8/5} H^{1/5}), \quad 1 \ll H \leq \frac{1}{2} X, \quad (1.12)$$

в то время как (1.4) влечет

$$\int_{X-H}^{X+H} \Delta^4(x) dx \ll_{\varepsilon} HX + X^{53/28+\varepsilon}. \quad (1.13)$$

Заметим, что (1.12) улучшает (1.13). Однако в этом случае можно получить еще более точную оценку. Положим

$$\alpha := \inf\{a : \Delta(x) \ll x^a\}. \quad (1.14)$$

Тогда

$$\int_{X-H}^{X+H} \Delta^4(x) dx \ll_{\varepsilon} X^{\varepsilon} (HX + X^{1+2\alpha}), \quad \sqrt{X} \ll H \ll X. \quad (1.15)$$

Оценка (1.15) вытекает из теоремы 6 Лау и Цанга [10] при $A = 4$. Она доказывается путем применения метода больших значений из [3] и [1; гл. 13], см., в частности, (13.52) из [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Хорошо известно (т.е. следует из (1.4)), что $\alpha \geq 1/4$, поэтому оценка в (1.15) тривиально выполняется при $H \ll \sqrt{X}$. С другой стороны, лучшая верхняя оценка на α в (1.14) в настоящее время такова:

$$\alpha \leq \frac{131}{416} = 0.314903\dots, \quad (1.16)$$

она принадлежит Хаксли [12]. Отсюда, объединяя (1.15) и (1.16), мы фактически получаем

$$\int_{X-H}^{X+H} \Delta^4(x) dx \ll_{\varepsilon} X^{\varepsilon} (HX + X^{339/208}), \quad 1 \ll H \ll X.$$

2. Необходимые леммы. Начнем со следующей элементарной леммы.

ЛЕММА 1. Для $1 \ll H \ll X$ и любого целого $k \geq 2$ имеем

$$\Delta_k(X) = \frac{1}{H} \int_X^{X+H} \Delta_k(x) dx + O_{\varepsilon,k}(HX^{\varepsilon}). \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $d_k(n) \ll_{\varepsilon,k} n^{\varepsilon}$, из определения (1.1) вытекает, что

$$\begin{aligned} \Delta_k(X) - \frac{1}{H} \int_X^{X+H} \Delta_k(x) dx &= \frac{1}{H} \int_X^{X+H} (\Delta_k(X) - \Delta_k(x)) dx \\ &\ll \frac{1}{H} \int_X^{X+H} \left(\left| \sum_{X \leq n \leq x} d_k(n) \right| + O(HX^{\varepsilon}) \right) dx \ll_{\varepsilon} HX^{\varepsilon}, \end{aligned}$$

откуда следует (2.1). Используя хорошо известный результат Шиу [13] о мультипликативных функциях, можно улучшить остаточный член в (2.1) до $O_k(H \log^{k-1} X)$ на отрезке $X^\varepsilon \leq H \ll X$.

ЛЕММА 2. Пусть $k \geq 2$ – заданное целое, и пусть задано $\delta > 0$. Тогда количество целых чисел n_1, n_2, n_3, n_4 таких, что $3 \leq N < n_1, n_2, n_3, n_4 \leq 2N$ и

$$|n_1^{1/k} + n_2^{1/k} - n_3^{1/k} - n_4^{1/k}| < \delta N^{1/k},$$

при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ есть

$$\ll_\varepsilon N^\varepsilon (N^4 \delta + N^2). \quad (2.2)$$

Этот результат был получен Робертом и Саргосом [11]. Он представляет собой арифметический инструмент, полезный для работы над различными аналитическими задачами.

Кажется разумным предположить, что для заданного $\ell \geq 2$ количество целых чисел $n_1, \dots, n_\ell, n_{\ell+1}, \dots, n_{2\ell}$, для которых выполнено

$$|n_1^{1/k} + \dots + n_\ell^{1/k} - n_{\ell+1}^{1/k} - \dots - n_{2\ell}^{1/k}| < \delta N^{1/k},$$

при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ есть

$$\ll_\varepsilon N^\varepsilon (N^{2\ell} \delta + N^\ell). \quad (2.3)$$

Это очень сильная гипотеза, и уже истинность (2.3) при $\ell = 3$ дала бы возможность рассматривать шестую степень $\Delta_k(x)$ на коротких интервалах.

ЛЕММА 3. Для заданных $k \geq 2$ и $1 \ll N \ll x$ выполнено

$$\begin{aligned} \Delta_k(x) &= \frac{x^{(k-1)/(2k)}}{\pi \sqrt{k}} \sum_{n \leq N} d_k(n) n^{-(k+1)/(2k)} \cos \left(2k\pi (xn)^{1/k} + \frac{1}{4}(k-3)\pi \right) \\ &\quad + O_\varepsilon(x^{(k-1)/k+\varepsilon} N^{-1/k}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Явная формула типа Вороного (2.4) хорошо известна для случая $k = 2$ (см. доказательство в [1; гл. 3] или [2; гл. 12]). Однако нам представляется, что в общем случае она нигде не встречается в литературе и поэтому мы приводим ее доказательство (полученное на основе классического доказательства для случая $k = 2$).

В начале заметим, что для $x^\varepsilon \leq T \ll x$ формула обращения Перрона (см., например, приложение в работе [1]) дает

$$\sum_{n \leq x} d_k(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\varepsilon-iT}^{1+\varepsilon+iT} \zeta^k(s) x^s s^{-1} ds + O_\varepsilon(x^{1+\varepsilon} T^{-1}).$$

Заменим отрезок интегрирования на отрезок $[-\varepsilon - iT, -\varepsilon + iT]$, проходя через полюс функции $\zeta^k(s)$ в точке $s = 1$. По теореме Коши о вычетах это дает член $x P_{k-1}(\log x)$ (ср. (1.1)). Горизонтальные отрезки $[-\varepsilon \pm iT, 1 + \varepsilon \pm iT]$ вносят следующий вклад:

$$\ll \int_{-\varepsilon}^{1+\varepsilon} x^\sigma T^{-1} |\zeta(\sigma + iT)|^k d\sigma \ll_\varepsilon x^\varepsilon (x T^{-1} + T^{k/2-1}).$$

Это получается, если использовать стандартную оценку по выпуклости (см. [1; гл. 1])

$$\zeta(\sigma + it) \ll t^{(1-\sigma)/3} \log t, \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1, \quad t \gg 1$$

и функциональное уравнение на $\zeta(s)$ в форме

$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s), \quad \chi(s) = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\sigma+it-1/2} e^{i(t+\pi/4)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right), \quad t \geq t_0 > 0.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta_k(x) = 2 \operatorname{Re} I + O_\varepsilon(x^\varepsilon(xT^{-1} + T^{k/2-1})), \quad (2.5)$$

где мы обозначили

$$I := \frac{1}{2\pi} \int_1^T \chi^k(-\varepsilon + it) \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) n^{-1-\varepsilon+it} x^{-\varepsilon+it} \frac{dt}{-\varepsilon + it}, \quad (2.6)$$

и ряд в (2.6) сходится абсолютно. Поэтому мы можем поменять местами интегрирование и суммирование и получить

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_1^T \chi^k(-\varepsilon + it) \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) n^{-1-\varepsilon+it} x^{-\varepsilon+it} \frac{dt}{it} + O_\varepsilon(x^\varepsilon T^{k/2-1}) \\ &= \frac{e^{k\pi i/4}}{2\pi i x^\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) n^{-1-\varepsilon} \int_1^T \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{-k\varepsilon+kit-k/2} e^{kit} (xn)^{it} \frac{dt}{t} + O_\varepsilon(x^\varepsilon T^{k/2-1}) \\ &= \frac{e^{k\pi i/4} (2\pi)^{-k\varepsilon-k/2}}{2\pi i x^\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k(n)}{n^{1+\varepsilon}} \int_1^T t^{k\varepsilon+k/2-1} e(F(t)) dt + O_\varepsilon(x^\varepsilon T^{k/2-1}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

с $e(z) = e^{2\pi iz}$ и

$$2\pi F(t) = 2\pi F(t; x, k, n) := -kt \log \frac{t}{2\pi} + kt + t \log(xn).$$

Таким образом, седловая точка последнего экспоненциального интеграла в (2.7) (корень уравнения $F'(t) = 0$) – это $t = t_0 = 2\pi(xn)^{1/k}$, так что $t_0 \leq T$ для $n \leq (T/(2\pi))^k x^{-1}$. Таким образом, параметр T определяется так, чтобы выполнялось

$$N + \frac{1}{2} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^k x^{-1}, \quad N \in \mathbb{N},$$

и $T \ll x$ выполнено, потому что $N \ll x$, $k \geq 2$. Экспоненциальный интеграл в (2.7) затем оценивается, например, с использованием хорошо известного результата Аткинсона [14] (см. также [1; гл. 2] или [15; гл. 2]). Главный член интеграла в последней строке выражения (2.7) для I (см. с. 65 в [1]) в силу того, что

$$|F''(t_0)|^{-1/2} = 2\pi(xn)^{1/(2k)} k^{-1/2}, \quad F(t_0) = k(xn)^{1/k},$$

имеет вид

$$(2\pi)^{k\varepsilon+k/2-1} k^{-1/2} (xn)^{\varepsilon+1/2-1/k} 2\pi(xn)^{1/(2k)} e(k(xn)^{1/k}) e^{-\pi i/4}.$$

При $n > N$, $1 \leq t \leq T$ имеем

$$F'(t) = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{xn}{(t/(2\pi))^k} \right) \geq \frac{1}{2\pi} \log \frac{n}{N + 1/2},$$

так что по первой производной (см., например, лемму 2.1 из [1]) вклад $n > N$ в I есть

$$\begin{aligned} &\ll_{\varepsilon} x^{-\varepsilon} T^{k/2-1} \left(\sum_{N < n \leq 2N} d_k(n) n^{-1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\log n/N + 1/2} + \sum_{n > 2N} d_k(n) n^{-1-\varepsilon} \right) + x^{\varepsilon} T^{k/2-1} \\ &\ll_{\varepsilon} x^{\varepsilon} T^{k/2-1}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где мы обозначили $n = N + r$, $1 \leq r \leq N$ в первой сумме. В формуле Аткинсона остаются остаточные члены (ср. (2.16) из [1]) при $n \leq N$. Первые два остаточных члена, очевидно, входят в остаточные члены в (2.5), третий также туда входит (он соответствует $a = 1$). Четвертый остаточный член вносит следующий вклад:

$$\begin{aligned} &\ll_{\varepsilon} x^{\varepsilon} T^{k/2-1} \sum_{n \leq N} d_k(n) n^{-1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{\log(xn/(T/(2\pi))^k)}, \\ &\ll_{\varepsilon} x^{\varepsilon} T^{k/2-1} \left(\sum_{n \leq N/2} + \sum_{N/2 \leq n \leq N} \right) \ll_{\varepsilon} x^{\varepsilon} T^{k/2-1}; \end{aligned}$$

это можно показать так же, как и в (2.8). Поскольку $T \asymp (xN)^{1/k}$, утверждение леммы следует отсюда.

3. Доказательство теоремы 1. Мы будем использовать следующий вариант леммы 1:

$$\Delta(x) = \frac{1}{H} \int_X^{X+H} \Delta(x) dx + O(H \log X), \quad X^{\varepsilon} \leq H \leq X, \quad (3.1)$$

который следует, как было отмечено в связи с леммой 1, из оценки Шю (см. [13])

$$\sum_{x < n \leq x+h} d(n) \ll h \log x, \quad x^{\varepsilon} \leq h \leq x. \quad (3.2)$$

А именно, как и в доказательстве леммы 1 имеем при $X^{\varepsilon} \leq H \leq X$

$$\begin{aligned} \left| \Delta(X) - \frac{1}{H} \int_X^{X+H} \Delta(x) dx \right| &= \left| \frac{1}{H} \int_X^{X+H} (\Delta(X) - \Delta(x)) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{H} \int_X^{X+H} \left(\sum_{X \leq n \leq x} d(n) + O(H \log X) \right) dx \\ &\leq \frac{1}{H} \int_X^{X+H} \left(\sum_{X \leq n \leq X+H} d(n) + O(H \log X) \right) dx \\ &\ll H \log X, \end{aligned}$$

где мы использовали (1.1) при $k = 2$, а также (3.2).

Теперь возьмем $X = x_n$, точку, для которой получается омега-результат (1.8), (1.9) при $k = 2$. Поскольку метод доказательства Сандараараджана не дает ответа на вопрос, является ли $\Delta(x_n)$ положительным или отрицательным, определим

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{sgn} X = 1 & \text{при } \Delta(X) > 0, \\ \theta = -1 & \text{при } \Delta(X) < 0. \end{cases}$$

Отсюда $\theta\Delta(X) = |\Delta(X)|$. При $X + X^\varepsilon \leq x \leq X + H$ имеем $|X - x| \geq X^\varepsilon$, откуда

$$|\Delta(X) - \Delta(x)| \leq B_1 |X - x| \log X$$

из (3.2) аналогично доказательству формулы (3.1). При $X \leq x \leq X + X^\varepsilon$ мы используем тривиальную оценку $d(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon$ и (1.1). Отсюда получаем

$$|\Delta(X) - \Delta(x)| \leq B_1 |X - x| \log X + X^\varepsilon, \quad X \leq x \leq X + H, \quad (3.3)$$

для некоторого $B_1 > 0$. Таким образом, если мы возьмем

$$H = B_2 \frac{G(X)}{\log X} \quad (3.4)$$

с достаточно малой константой $B_2 > 0$, то из (3.3) будет следовать, что $\theta\Delta(x) > 0$ при $X \leq x \leq X + H$. Умножая на θ , получим из (3.1), что для некоторой $B_3 > 0$,

$$B_3 (X \log X)^{1/4} (\log_2 X)^{3/4(2^{4/3}-1)} (\log_3 X)^{-5/8} = B_3 G(X) \leq \frac{1}{H} \int_X^{X+H} \theta\Delta(x) dx, \quad (3.5)$$

где $\log_r X = \log(\log_{r-1} X)$. Возведем (3.5) в m -ю степень и используем неравенство Гёльдера для интегралов, что возможно в силу того, что подынтегральное выражение в (3.5) положительно. Получим

$$\begin{aligned} (B_3 G(X))^m &\leq \frac{1}{H^m} \left(\int_X^{X+H} \theta\Delta(x) dx \right)^m \leq \frac{1}{H} \int_X^{X+H} \theta^m \Delta^m(x) dx \\ &= \frac{1}{H} (\theta^m E_m(X+H) - \theta^m E_m(X) + O(HX^{m/4})), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где (ср. (1.6))

$$E_m(X) := \int_1^X \Delta^m(x) dx - C_m X^{1+m/4}.$$

Если при достаточно малом $c_0 > 0$ и при $X \geq X_0$,

$$|E_m(X)| \leq c_0 \frac{G^{m+1}(X)}{\log X},$$

то из (3.4) и (3.6) следует, что для достаточно большого X

$$\frac{1}{2} (B_3 G(X))^m \leq 2B_2^{-1} c_0 G^m(X),$$

что приводит к противоречию в случае, если $c_0 < (1/4)B_2 B_3^m$. Это завершает доказательство теоремы 1, и оценка $\eta_m \leq 3/4$ есть следствие явного выражения для $G(x)$ в (3.5).

4. Доказательство теоремы 2. А теперь переходим к доказательству теоремы 2. Пусть $\varphi(x)$ (≥ 0) – гладкая функция с носителем на $[X - 2H, X + 2H]$ такая, что $\varphi(x) = 1$ при $x \in [X - H, X + H]$ и

$$\varphi^{(r)}(x) \ll_r H^{-r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

Если $x \asymp X$, $N \ll X$, то из леммы 3 получим

$$\begin{aligned} \int_{X-H}^{X+H} \Delta_k^4(x) dx &\leq \int_{X-2H}^{X+2H} \varphi(x) \Delta_k^4(x) dx \\ &\ll_\varepsilon X^{(2k-2)/k+\varepsilon} \max_{K \leq N} \int_{X-2H}^{X+2H} \varphi(x) \left| \sum_{K < n \leq K' \leq 2K} d_k(n) n^{-(k+1)/(2k)} e^{2k\pi i(xn)^{1/k}} \right|^4 dx \\ &\quad + HX^{(4k-4)/k+\varepsilon} N^{-4/k}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Интеграл в (4.2) равен

$$\sum_{K < m, n, j, \ell \leq K'} d_k(m) d_k(n) d_k(j) d_k(\ell) (mnj\ell)^{-(k+1)/(2k)} \int_{X-2H}^{X+2H} \varphi(x) e^{iDx^{1/k}} dx, \quad (4.3)$$

где $(m, n, j, \ell) \in \mathbb{N}^4$ и

$$D = D_k(m, n, j, \ell) := 2k\pi(m^{1/k} + n^{1/k} - j^{1/k} - \ell^{1/k}).$$

Интегрируя по частям, получаем, что интеграл в (4.3) равен

$$\frac{ik}{D} \int_{X-2H}^{X+2H} \left(\varphi'(x) x^{1-1/k} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \varphi(x) x^{-1/k} \right) e^{iDx^{1/k}} dx.$$

Тем самым, мы получили экспоненциальный интеграл того же вида, только подынтегральное выражение уменьшилось на множитель

$$\frac{1}{D} (H^{-1} X^{1-1/k} + X^{-1/k}) \ll \frac{X^{1-1/k}}{HD}.$$

Поэтому, если мы выполним интегрирование по частям $r = r(A, \varepsilon)$ раз, то ввиду (4.1) получим, что вклад величины D , для которой выполнено

$$|D| > X^{1-1/k+\varepsilon} H^{-1},$$

будет меньше, чем X^{-A} при каждом фиксированном $A > 0$. В случае, когда

$$|D| \leq X^{1-1/k+\varepsilon} H^{-1},$$

мы можем применить лемму 2 (с $\delta = X^{1-1/k} H^{-1} K^{-1/k}$) и тривиальную оценку, чтобы получить, что выражение в (4.3) равно

$$\ll_\varepsilon X^\varepsilon K^{-(2k+2)/k} H (K^4 X^{1-1/k} H^{-1} K^{-1/k} + K^2) \ll_\varepsilon X^\varepsilon H + X^{1-1/k+\varepsilon} N^{2-3/k}.$$

В силу (4.2) это дает

$$\int_{X-H}^{X+H} \Delta_k^4(x) dx \ll_\varepsilon X^\varepsilon (HX^{(2k-2)/k} + X^{3-3/k} N^{2-3/k} + HX^{4-4/k} N^{-4/k}). \quad (4.4)$$

В (4.4) слагаемые, содержащие N , равны при условии, что

$$N = X^{(k-1)/(2k+1)} H^{k/(2k+1)} \quad (< X).$$

Поэтому (1.8) следует из (4.4), и доказательство теоремы закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Из леммы 1 и интегрального неравенства Гёльдера следует, что

$$\Delta_k^4(X) \ll_\varepsilon \frac{1}{H} \int_{X-H}^{X+H} \Delta_k^4(x) dx + X^\varepsilon H^4. \quad (4.5)$$

Если в (4.5) взять $H = X^{(k-1)/(k+1)}$ и применить (1.8) из теоремы, получим известную оценку (которая следует также из леммы 3)

$$\Delta_k(X) \ll_\varepsilon X^{(k-1)/(k+1)+\varepsilon}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function. Theory and Applications*, Dover Publ., Mineola, NY, 2003.
- [2] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1986.
- [3] A. Ivić, “Large values of the error term in the divisor problem”, *Invent. Math.*, **71**:3 (1983), 513–520.
- [4] K.-M. Tsang, “Higher power moments of $\Delta(x)$, $E(t)$ and $P(x)$ ”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **65**:1 (1992), 65–84.
- [5] A. Ivić, P. Sargos, “On the higher moments of the error term in the divisor problem”, *Illinois J. Math.*, **51**:2 (2007), 353–377.
- [6] W. Zhai, “On higher-power moments of $\Delta(x)$ ”, *Acta Arith.*, **112**:4 (2004), 367–395; “On higher-power moments of $\Delta(x)$. II”, *Acta Arith.*, **114**:1 (2004), 35–54; “On higher-power moments of $\Delta(x)$. III”, *Acta Arith.*, **118**:3 (2005), 263–281; “On higher-power moments of $\Delta(x)$. IV”, *Acta Math. Sinica (Chin. Ser.)*, **49**:3 (2006), 639–646.
- [7] D. R. Heath-Brown, “The distribution and moments of the error term in the Dirichlet divisor problem”, *Acta Arith.*, **60**:4 (1992), 389–415.
- [8] K. Soundararajan, “Omega results for the divisor and circle problems”, *Int. Math. Res. Not.*, 2003, № 36, 1987–1998.
- [9] K.-C. Tong, “On divisor problems. III”, *Acta Math. Sinica*, **6** (1956), 515–541.
- [10] Y.-K. Lau, K.-M. Tsang, “Moments over short intervals”, *Arch. Math. (Basel)*, **84**:3 (2005), 249–257.
- [11] O. Robert, P. Sargos, “Three-dimensional exponential sums with monomials”, *J. Reine Angew. Math.*, **591** (2006), 1–20.
- [12] M. N. Huxley, “Exponential sums and lattice points. III”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **87**:3 (2003), 591–609.
- [13] P. Shiu, “A Brun–Titchmarsh theorem for multiplicative functions”, *J. Reine Angew. Math.*, **313** (1980), 161–170.
- [14] F. V. Atkinson, “The mean-value of the Riemann zeta function”, *Acta Math.*, **81** (1949), 353–376.
- [15] A. Ivić, *Lectures on mean values of the Riemann zeta function*, Tata Inst. Fund. Res. Lectures on Math. and Phys., **82**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

А. Ивич

University of Belgrade, Сербия

E-mail: ivic@rgf.bg.ac.rs, aivic_2000@yahoo.com

Поступило

21.04.2009

Исправленный вариант

18.02.2010

В. Цай

Shandong Normal University, КНР

E-mail: zhaiwg@hotmail.com