Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Й. Качаровски, А. Перелли, Линейные свертки L -функций степени 2 из класса Сельберга, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 3, 399–404

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8811>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:19:55

Линейные свертки L -функций степени 2 из класса Сельберга

Й. Качаровски, А. Перелли

В 1983 г. С. М. Воронин получил аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость с некоторых свертков L -функций, соответствующих голоморфным модулярным формам на $SL(2, \mathbb{Z})$. В настоящей работе мы распространяем результат Воронина на L -функции степени 2 из расширенного класса Сельберга.

Библиография: 9 названий.

Посвящается светлой памяти профессора А. А. Карацубы

1. Введение. Воронин [1] доказал, что линейные свертки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} e(-n\alpha), \quad e(x) = e^{2\pi i x},$$

L -функций, связанные с голоморфными модулярными формами для $SL(2, \mathbb{Z})$, могут быть мероморфно продолжены в $\mathbb{C}$ при условии, что α – квадратичная иррациональность, удовлетворяющая условию $M\alpha = \alpha$ для некоторого $M \in SL(2, \mathbb{Z})$. В этой статье мы распространяем результат Воронина на L -функции степени 2 из обобщенного класса Сельберга $\mathcal{S}^\sharp$. Прежде чем сформулировать наши результаты, напомним, что обобщенный класс Сельберга – это, по сути, класс последовательностей Дирихле с продолжением на $\mathbb{C}$, удовлетворяющих функциональному уравнению риманова типа. Строгие определения и свойства обобщенных классов Сельберга можно найти в работе Сельберга [2], а также в наших обзорных статьях [3]–[6]. Здесь же мы только напомним, что множество L -функций степени 2, принадлежащих $\mathcal{S}^\sharp$, обозначается через $\mathcal{S}_2^\sharp$, что для $F \in \mathcal{S}_2^\sharp$ с коэффициентами Дирихле $a(n)$ и для $\alpha \in \mathbb{R}$ линейная свертка $F(s, \alpha)$ определяется следующим образом:

$$F(s, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} e(-n\alpha),$$

Работа выполнена при поддержке Национального института ди Алта Математика (Istituto Nazionale di Alta Matematica) и Министерства науки и высшего образования Польши (грант № N201 1482 33).

а также, что для $F(s)$ кондуктор q_F и сдвиг θ_F являются соответственно положительным действительным числом и действительным числом. Для $a, b \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{R}$ определим матрицы

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ qb & qab + 1 \end{pmatrix}$$

и группу

$$\mathcal{M}_q = \langle M_{a,b} : a, b \in \mathbb{Z} \rangle \setminus \{\pm I\},$$

образованную такими матрицами, исключая $\pm$ единичную матрицу. Далее, пусть $\mathbb{Q}(q)$ – поле, порожденное элементом q над $\mathbb{Q}$, и

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_q &= \{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}(q) : M\alpha = \alpha \text{ при некотором } M \in \mathcal{M}_q\} \\ &= \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}(q) : \alpha = \frac{a - d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \text{ для некоторой } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_q \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты a, b, c, d у $M \in \mathcal{M}_q$ принадлежат $\mathbb{Z}[q]$, и, таким образом, $\mathcal{A}_q$ содержится в множестве квадратичных иррациональностей над $\mathbb{Q}(q)$. Заметим также, что при целом q $\mathcal{M}_q$ содержится в группе Гекке $\Gamma_1(q)$ матриц из $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ с $c \equiv 0 \pmod{q}$ и $a \equiv d \equiv 1 \pmod{q}$. В этих обозначениях наш результат состоит в следующем.

ТЕОРЕМА. Если $F \in \mathcal{S}_2^\sharp$, то $F(s, \alpha)$ мероморфна в $\mathbb{C}$ для любого $\alpha \in \mathcal{A}_{q_F}$.

Если мы посмотрим на доказательство, особенно на формулу (2.7) ниже, то увидим, что возможные полюса функции $F(s, \alpha)$ являются простыми и расположены в точках

$$s = \frac{1}{2} - j + i\lambda(2k\pi + \beta),$$

где $j \geq 0$ и k целые, $\beta = \beta(\alpha, F, M) \in \mathbb{R}$ – некоторая константа и $\lambda = 1/\log|c\alpha + d|$, c и d образуют вторую строку в матрице $M \in \mathcal{M}_q$ такой, что $M\alpha = \alpha$. Очевидно, если $q = 1$, то $\mathcal{M}_1 \cup \{\pm I\} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, и

$$M_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S, \quad M_{1,-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$M_{1,0}M_{1,-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = T,$$

поэтому множество $\mathcal{M}_1 \cup \{\pm I\}$ содержит образующие S и T группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$; таким образом, оно совпадает с $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Теперь, L -функции, связанные с модулярными формами для $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, если они подходящим образом нормированы, очень близки к функциям из $\mathcal{S}_2^\sharp$ с кондуктором 1 (см. обсуждение в работе Карлетти, Монти Брагадин, Перелли [7]). Таким образом, случай $q_F = 1$ нашей теоремы соответствует результату Воронина. Однако отметим, что все инструменты и аргументы, использованные в этой статье, могут быть получены в терминах L -функций, ассоциированных с модулярными формами, тем самым, доказывая еще раз утверждение Воронина. Отметим также, что наш метод в этой работе отличается от метода Воронина. По существу, наш метод основан на том самом алгоритме, который используется [8]

для доказательства гипотезы степеней на интервале $1 < d < 2$. В заключение мы заметим, что из случая $q = 1$ выше вытекает, что $\mathcal{S}_2^\sharp$ каким-то образом связан с элементами $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$; это согласуется с предположением, что L -функции степени 2 из класса Сельберга тесно связаны с голоморфными и неголоморфными модулярными формами.

2. Доказательство теоремы. Сначала заметим, что формула преобразований для линейных сверток, сформулированная в лемме А работы [9] только для степеней d из интервала $1 < d < 2$, на самом деле верна и для степени $d = 2$. Поэтому далее мы будем ссылаться на аналог леммы А для функций $F \in \mathcal{S}_2^\sharp$. Обозначая для краткости $q = q_F$ и $\theta = \theta_F$, ввиду леммы А из [9] и вычисляя явным образом постоянный полином $P_0(s)$, для $\alpha > 0$ и любого фиксированного целого $J \geq 1$, мы получаем следующую формулу преобразования для линейной свертки $F(s, \alpha)$:

$$F(s, \alpha) = c_0 \sum_{j=0}^{J-1} (\sqrt{q}\alpha)^{2s-1+j+i\theta} P_j(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a(n)}}{n^{s+j+i\theta}} e\left(\frac{n}{q\alpha}\right) + G_J(s, \alpha), \quad (2.1)$$

где $G_J(s, \alpha)$ голоморфна при $\sigma > 1 - J$, $P_j(s)$ – полиномы, $P_0(s) = 1$ тождественно и $|c_0| = 1$ (все указанные величины зависят от $F(s)$). Очевидно, что смысл (2.1) состоит в том, что разность между выражением в левой части и явно выраженным слагаемым в правой части голоморфна в полуплоскости $\sigma > 1 - J$. Если $\alpha < 0$, то мы видим, что

$$F(s, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} e(n|\alpha|) = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a(n)}}{n^{\bar{s}}} e(-n|\alpha|)} = \overline{\bar{F}(\bar{s}, |\alpha|)}, \quad (2.2)$$

где

$$\bar{F}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a(n)}}{n^s}, \quad \bar{F}(s, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a(n)}}{n^s} e(-n\alpha).$$

Заметим, что $\bar{F} \in \mathcal{S}_2^\sharp$, $q_{\bar{F}} = q_F$ и $\theta_{\bar{F}} = -\theta_F$. Применяя лемму А работы [9] к $\bar{F}(s, |\alpha|)$ и затем переходя к сопряженным, из (2.2) мы получаем, что для $\alpha < 0$

$$F(s, \alpha) = \tilde{c}_0 \sum_{j=0}^{J-1} (\sqrt{q}|\alpha|)^{2s-1+j+i\theta} \tilde{P}_j(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a(n)}}{n^{s+j+i\theta}} e\left(\frac{n}{q\alpha}\right) + \tilde{G}_J(s, \alpha)$$

с $\tilde{c}_0$, $\tilde{P}_j(s)$ и $\tilde{G}_J(s, \alpha)$ с теми же свойствами, что и (2.1). Таким образом, для $F \in \mathcal{S}_2^\sharp$ и $\alpha \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} F(s, \alpha) &= c_F \sum_{j=0}^{J-1} |\sqrt{q}\alpha|^{2s-1+j+i\theta} Q_j(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a(n)}}{n^{s+j+i\theta}} e\left(\frac{n}{q\alpha}\right) + K_J(s, \alpha), \\ \bar{F}(s, \alpha) &= \tilde{c}_F \sum_{j=0}^{J-1} |\sqrt{q}\alpha|^{2s-1+j-i\theta} \tilde{Q}_j(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^{s+j-i\theta}} e\left(\frac{n}{q\alpha}\right) + \tilde{K}_J(s, \alpha); \end{aligned} \quad (2.3)$$

здесь опять же все упомянутые величины имеют те же свойства, что и в (2.1), и c_F , $\tilde{c}_F$, $Q_j(s)$, $\tilde{Q}_j(s)$, $K_J(s, \alpha)$ и $\tilde{K}_J(s, \alpha)$ зависят только от знака α .

Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}(q)$ и $a, b \in \mathbb{Z}$. Будем сдвигать $F(s, \alpha)$ на a , тем самым получая $F(s, \alpha) = F(s, \alpha + a)$ по периодичности. Поскольку $\alpha + a \neq 0$, мы применим первую формулу из (2.3) к $F(s, \alpha + a)$, тем самым выражая $F(s, \alpha)$ (грубо говоря) как комбинацию сверток $\bar{F}(s)$ на $e(n/q(\alpha + a))$. Теперь мы сдвигаем каждую из таких сверток на $-b$ и применяем вторую формулу в (2.3) к $\bar{F}(s + j, -1/q(\alpha + a) - b)$, тем самым получая выражение исходной линейной свертки $F(s, \alpha)$ через (грубо говоря) комбинацию сверток $F(s)$ на $e(-n/(qb + 1/(\alpha + a)))$. Поскольку

$$\frac{1}{qb + 1/(\alpha + a)} = \frac{\alpha + a}{qba + (qab + 1)} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ qb & qab + 1 \end{pmatrix} \alpha = M_{a,b} \alpha,$$

вышеописанный процесс приводит к выражению типа

$$F(s, \alpha) = \sum_{j=0}^L f_j(s, \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^{s+j}} e(-nM_{a,b}\alpha) + H_L(s, \alpha), \quad (2.4)$$

где $L \geq 1$ – произвольное целое, $H_L(s, \alpha) = H_L(s, \alpha, F, a, b)$ голоморфна при $\sigma \geq 1 - L$, $f_j(s, \alpha) = f_j(s, \alpha, F, a, b)$ – целые функции и

$$f_0(s, \alpha) = \xi |qba + qab + 1|^{2s-1}, \quad |\xi| = |\xi(\alpha, F, a, b)| = 1.$$

Ясно, что процесс, приводящий к (2.4), можно провести в обратную сторону. Это получается, если начать с первого преобразования в (2.3), затем сделать сдвиг на b , применить второе преобразование в (2.3) и, наконец, сделать сдвиг на $-a$. В этом случае α преобразуется к

$$\frac{(qab + 1)\alpha - a}{-qba + 1} = M_{a,b}^{-1} \alpha$$

и мы получаем

$$F(s, \alpha) = \sum_{j=0}^L \tilde{f}_j(s, \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^{s+j}} e(-nM_{a,b}^{-1}\alpha) + \tilde{H}_L(s, \alpha) \quad (2.5)$$

с $\tilde{H}_L(s, \alpha)$ и $\tilde{f}_j(s, \alpha)$ с теми же свойствами, что и в (2.4), и

$$\tilde{f}_0(s, \alpha) = \tilde{\xi} |-bqa + 1|^{2s-1}, \quad |\tilde{\xi}| = 1.$$

Для заданной матрицы $M \in \mathcal{M}_q$ запишем

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad F(s, \alpha)|_M = |c\alpha + d|^{2s-1} F(s, M\alpha).$$

Тогда нулевые слагаемые в (2.4) и (2.5) могут быть переписаны в виде $\rho F(s, \alpha)|_M$ с $|\rho| = 1$ и $M = M_{a,b}$ и $M = M_{a,b}^{-1}$, соответственно. Далее, дважды применив процесс, приводящий к (2.4) или (2.5) с двумя матрицами M и M' , записанными в форме, указанной выше, получаем, что нулевое слагаемое получаемого выражения имеет вид

$$\rho |c\alpha + d|^{2s-1} |c'M\alpha + d'|^{2s-1} F(s, M'M\alpha) = \rho F(s, \alpha)|_{M'M}$$

с $|\rho| = 1$, поскольку

$$(c\alpha + d)(c'M\alpha + d') = (c'a + d'c)\alpha + c'b + d'd.$$

Отсюда, если $M \in \mathcal{M}_q$, то многократное применение (2.4) и (2.5) приводит к следующему выражению для $F(s, \alpha)$:

$$F(s, \alpha) = \sum_{j=0}^L g_j(s, \alpha) F(s + j, M\alpha) + R_L(s, \alpha) \quad (2.6)$$

с $g_j(s, \alpha)$, $R_L(s, \alpha)$, зависящими от M и имеющими аналогичные свойства, что и в выражениях (2.4) и (2.5), и $g_0(s, \alpha) = \rho|c\alpha + d|^{2s-1}$, $|\rho| = 1$.

Предположим теперь, что $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}(q)$ удовлетворяет $M\alpha = \alpha$ для некоторого $M \in \mathcal{M}_q$. Тогда из (2.6) получаем, что

$$(1 - g_0(s, \alpha))F(s, \alpha) = \sum_{j=1}^L g_j(s, \alpha) F(s + j, \alpha) + R_L(s, \alpha), \quad (2.7)$$

что дает мероморфное продолжение $F(s, \alpha)$, $\sigma > 0$, при условии, что $g_0(s, \alpha)$ не равно тождественно 1. Но $g_0(s, \alpha) = \rho|c\alpha + d|^{2s-1}$ с $|\rho| = 1$ и $c, d \in \mathbb{Z}[q]$, поэтому если $c \neq 0$, то $g_0(s, \alpha)$ не равно тождественно 1, поскольку $\alpha \notin \mathbb{Q}(q)$. Более того, если $c = 0$ и $g_0(s, \alpha)$ тождественно равно 1, то $d = \pm 1$, и поскольку $\det M = 1$, то

$$M = \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

с $a \in \mathbb{Z}[q]$. Следовательно, $M\alpha = \alpha$ влечет $M = \pm I$. Противоречие. Поэтому $g_0(s, \alpha)$ не равно тождественно 1, так что правая часть (2.7) мероморфна при $\sigma > -1$; следовательно, и левая часть обладает тем же свойством. Повторяя это рассуждение, получаем, что $F(s, \alpha)$ мероморфна при $\sigma > 1 - L$. Но L произвольно; следовательно, $F(s, \alpha)$ мероморфна всюду в $\mathbb{C}$, откуда и следует требуемое утверждение.

Мы выражаем благодарность организациям, при поддержке которых была написана настоящая работа, а также благодарим Джузеппе Молтени за внимательное прочтение рукописи и указание на некоторые неточности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. М. Воронин, “Об аналитическом продолжении некоторых рядов Дирихле”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его к его девяностолетию, Тр. МИАН СССР, **157**, 1981, 25–30.
- [2] A. Selberg, “Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series”, *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory* (Maiori, 1989), Univ. Salerno, Salerno, 1992, 367–385; *Collected Papers*. v. II, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 47–63.
- [3] J. Kaczorowski, “Axiomatic theory of L -functions: the Selberg class”, *Analytic Number Theory*, Lecture Notes in Math., **1891**, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 133–209.
- [4] J. Kaczorowski, A. Perelli, “The Selberg class: a survey”, *Number Theory in Progress*. v. 2 (Zakopane-Kościelisko, 1997), de Gruyter, Berlin, 1999, 953–992.

- [5] A. Perelli, “A survey of the Selberg class of L -functions, Part I”, *Milan J. Math.*, **73** (2005), 19–52.
- [6] A. Perelli, “A survey of the Selberg class of L -functions, Part II”, *Riv. Mat. Univ. Parma* (7), **3*** (2004), 83–118.
- [7] G. M. Bragadin, E. Carletti, A. Perelli, “A note on Hecke’s functional equation and the Selberg class”, *Funct. Approx. Comment. Math.*, **41**:2 (2009), 211–220.
- [8] J. Kaczorowski, A. Perelli, “On the structure of the Selberg class, VII: $1 < d < 2$ ”, *Ann. of Math.* (2) (to appear).
- [9] J. Kaczorowski, A. Perelli, “On the structure of the Selberg class, V: $1 < d < 5/3$ ”, *Invent. Math.*, **150**:3 (2002), 485–516.

Й. Качаровски

Adam Mickiewicz University, Польша

E-mail: kjerzy@amu.edu.pl

Поступило

26.11.2009

А. Перелли

University of Genova, Department of Mathematics, Италия

E-mail: perelli@dima.unige.it