Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, Новые оценки коротких сумм Клоостермана, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 3, 384–398

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8812>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 08:44:21

Новые оценки коротких сумм Клоостермана

А. А. Карацуба

В статье получены новые, более точные, оценки коротких сумм Клоостермана.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. *Суммой Клоостермана* называется тригонометрическая сумма вида

$$S = \sum_{n=1}^m{}' \exp\left(2\pi i \frac{an^* + bn}{m}\right), \quad (1.1)$$

где штрих означает, что суммирование ведется по целым числам n , взаимно простым с m , $nn^* \equiv 1 \pmod{m}$. Если число слагаемых в (1.1) меньше, чем m , то S называется *короткой суммой Клоостермана*.

В настоящей работе получены новые оценки коротких сумм Клоостермана (см. [1]–[6]). Они усиливают соответствующие оценки Королёва [7], которые, в свое время, усиливали оценки автора [5]. Основой работы послужило новое соображение о сведении однократной суммы к кратной и применение оценок кратных сумм, полученных автором в [2]–[5]. Раньше, как у автора [5], так и у Королёва [7], сведение к кратной сумме осуществлялось с помощью применения своеобразного аналога метода решета. Для простоты здесь рассматривается случай, когда порядок суммы является простым числом.

ОБОЗНАЧЕНИЯ. Везде ниже:

- через (a, b) при целых a и b обозначается наибольший общий делитель чисел a и b ;
- через $[x_1, \dots, x_k]$ при целых положительных $x_1, \dots, x_k$ обозначается наименьшее общее кратное чисел $x_1, \dots, x_k$;
- через $\tau_k(n)$ обозначается число решений уравнения $x_1 \dots x_k = n$ в натуральных числах $x_1, \dots, x_k$, $\tau_1(n) = 1$, $\tau(n) = \tau_2(n)$;
- $\mu(n)$ – функция Мёбиуса;
- при вещественном числе α через $\{\alpha\}$ обозначается дробная часть числа α , $\|\alpha\| = \min(\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\})$;
- $c, c_1, \dots, c_k$ – положительные абсолютные постоянные, в разных утверждениях, вообще говоря, разные;

Статья подготовлена по заметкам и черновикам А. А. Карацубы 2006–2007 гг. Е. А. Карацубой, М. А. Королёвым и И. С. Резвяковой.

Что можно сделать июль, 2007,
 и опубликовать на осень

I Короткие с. Клоост. : $\chi, \chi \equiv 1(m)$;

$$S = \sum_{x \in X} e^{2\pi i \frac{x}{m}} = \sum_{xy \in X} \frac{1}{\tau(xy)} e^{2\pi i \frac{xy}{m}} =$$

$$= 2 \sum_{x \leq \sqrt{X}} \sum_{y \leq X x^{-1}} \frac{1}{\tau(xy)} e^{2\pi i \frac{xy}{m}} - \sum_{x \leq \sqrt{X}} \sum_{y \leq \sqrt{X}} \frac{1}{\tau(xy)} e^{2\pi i \frac{xy}{m}}$$

Два типа сумм !

1) $x \in X_1, y \leq X x^{-1}, X_1$ - малое ; тогда

$$\text{треб.} \leq \sum_{x \in X_1} \sum_{y \leq X x^{-1}} \frac{1}{\tau(xy)} \leq \sum_{x \in X_1} \sum_{y \leq X x^{-1}} \frac{1}{\tau(y)} \ll$$

$$\ll \sum_{x \in X_1} \frac{X}{x} \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \ll \frac{X}{\sqrt{\ln X}} \ln X_1$$

2) $X_1 < x \leq \sqrt{X}$; но тогда сильная осциляция exp.

Сразу же $S \ll \frac{X}{\sqrt{\ln X}} (\ln X)^{\varepsilon} + \dots$

Если можно раз повторить это же, получим

$$S \ll X (\ln X)^{-1+\varepsilon}$$

А что у Максима ?

сослаться!
 Что-то у Гараева есть
 $\leq \frac{1}{\tau(xy)}$? где ?

II, Суммы харав. вида

$$\sum_{p \leq X} \chi_1(p+a) \chi_2(p+b)$$

$\chi_1, \chi_2 \pmod{q}$

Оценки при $X \geq q^{0.75+\varepsilon}$ и арифм. связь.

- запись $A \ll B$ означает, что $|A| \leq cB$, и в случае, когда c зависит от параметров $\alpha, \beta, \dots$, наряду с указанной записью будет использоваться запись $A \ll_{\alpha, \beta, \dots} B$; постоянные в знаках O являются абсолютными;
- в ряде случаев, для заданных a и b , будем обозначать величину

$$\exp\left(2\pi i \frac{an^* + bn}{m}\right)$$

через $f(n)$.

2. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1 (см. также [2]). Пусть J_k – количество решений следующего сравнения:

$$\begin{aligned} x_1 \cdots x_k &\equiv 0 \pmod{[x_1^2, \dots, x_k^2]}, \\ 0 < x_j &\leq X_j, \quad X_j \geq 3, \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Тогда для J_k справедлива оценка

$$J_k \leq (2k^8)^{k^3} \sqrt{X} (\ln X)^{k^2}, \quad (2.2)$$

где $X = X_1 \cdots X_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим символом $\tau'_k(n)$ количество решений уравнения $x_1 \cdots x_k = n$ в натуральных числах x_j , $x_j \leq X_j$, $j = 1, \dots, k$. Очевидно неравенство

$$\tau'_k(n) \leq \tau_k(n).$$

Для J_k справедливо соотношение

$$J_k = \sum''_{n \leq X} \tau'_k(n) \leq \sum''_{n \leq X} \tau_k(n),$$

где два штриха в сумме означают суммирование по таким натуральным числам n , которые удовлетворяют условиям $n = x_1 \cdots x_k$ и (2.1). Из этих условий следует, что каждый простой делитель n входит в каноническое разложение n в степени, не меньшей 2. Действительно, если $p \mid n$, то $p \mid x_j$ при некотором j , $1 \leq j \leq k$. Отсюда следует, что $p^2 \mid [x_1^2, \dots, x_k^2]$, а из (2.1) следует, что $p^2 \mid n$. Но каждое такое n имеет каноническое разложение на простые сомножители вида

$$n = p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s}, \quad \beta_1 \geq 2, \quad \dots, \quad \beta_s \geq 2.$$

Поэтому n можно представить так:

$$n = p_1^{\beta_1} \cdots p_t^{\beta_t} p_{t+1}^{\beta_{t+1}-3} \cdots p_s^{\beta_s-3} p_{t+1}^3 \cdots p_s^3 = m^2 r^3.$$

В этом представлении β_ν – четные числа, если $1 \leq \nu \leq t$, и нечетные числа, если $\nu > t$. Следовательно, для J_k получаем неравенство

$$J_k \leq \sum_{m^2 r^3 \leq X} \tau_k(m^2 r^3).$$

Так как $\tau_k(ab) \leq \tau_k(a)\tau_k(b)$,

$$J_k \leq \sum_{r \leq \sqrt[3]{X}} \tau_k^3(r) \sum_{m \leq \sqrt{X}r^{-3}} \tau_k^2(m). \quad (2.3)$$

Чтобы оценить сумму по m в (2.3) воспользуемся неравенством Марджанишвили (см., например, [3], [4]):

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tau_k^l(n) < A_k^{(l)} (\ln N + k^l - 1)^{k^l - 1}, \quad A_k^{(l)} = k^l (k!)^{-(k^l - 1)/(k - 1)}.$$

Имеем

$$\sum_{m \leq \sqrt{X}r^{-3}} \tau_k^2(m) < k^{2k^2} \sqrt{X} (\ln X)^{k^2} r^{-3/2}$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{r \leq \sqrt[3]{X}} \tau_k^3(r) r^{-3/2} &< 3k^3 + \sum_{3 < r \leq \sqrt[3]{X}} \tau_k^3(r) r^{-3/2} \\ &= 3k^3 + \frac{3}{2} \int_3^{\sqrt[3]{X}} C(u) u^{-5/2} du + C(\sqrt[3]{X}) X^{-3/2}, \end{aligned}$$

где

$$C(u) = \sum_{3 < r \leq u} \tau_k^3(r) < k^{3k^2} u (\ln u)^{k^3 - 1}.$$

Поскольку

$$\int_1^{\sqrt[3]{X}} u^{-3/2} (\ln u)^{k^3 - 1} du < 2^{k^3} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{k^3} dt = 2^{k^3} (k^3)!,$$

отсюда получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $m > 1$, m – целое число, k – натуральное число, X, X_1 таковы, что

$$3 \leq X, \quad k < X < X_1 \leq 2X, \quad k2^{2k-1} X^{2k-1} < m. \quad (2.4)$$

Рассмотрим сравнение

$$x_1^* + \dots + x_k^* \equiv x_{k+1}^* + \dots + x_{2k}^* \pmod{m}, \quad (2.5)$$

где $X < x_j \leq X_1$, $(x_j, m) = 1$, $j = 1, \dots, 2k$. Тогда для количества $I = I_k(X)$ его решений справедлива оценка

$$I \leq (2k)^{80k^3} X^k (\ln X)^{4k^2}. \quad (2.6)$$

При доказательстве этого утверждения используется лемма 1 (см. доказательство в [2], [3], [6]).

Пусть $\xi(x)$ и $\eta(y)$ – произвольные комплекснозначные функции аргументов x и y ; $0 < X < X_1 \leq 2X$, $0 < Y < Y_1 \leq 2Y$, положительные числа ξ, η, ξ_0, η_0 определяются равенствами

$$\begin{aligned} \xi &= \max_{X < x \leq X_1} |\xi(x)|, & \eta &= \max_{Y < y \leq Y_1} |\eta(y)|, \\ \xi_0 &= \sum_{X < x \leq X_1} |\xi(x)|, & \eta_0 &= \sum_{Y < y \leq Y_1} |\eta(y)|. \end{aligned}$$

Рассмотрим кратную тригонометрическую сумму $W = W(a, b)$,

$$W = \sum_{X < x \leq X_1} \sum_{Y < y \leq Y_1} \xi(x) \eta(y) \exp\left(\frac{2\pi i}{m}(ax^*y^* + bxy)\right).$$

Сумма W называется *кратной (двойной) суммой Клоостермана с весами*.

ЛЕММА 3. Пусть k и s – натуральные числа, числа X, X_1, Y, Y_1 удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} 3 &\leq X, & k < X < X_1 &\leq 2X, & k(2X)^{2k-1} &< m, \\ 3 &\leq Y, & s < Y < Y_1 &\leq 2Y, & s(2Y)^{2s-1} &< m, \end{aligned}$$

a и b – целые числа, причем $(a, m) = d \geq 1$. Тогда для суммы W справедлива оценка

$$\begin{aligned} |W| &\leq (2k)^{4k^2/s} (2s)^{4s^2/k} (smdY)^{1/2ks} \\ &\quad \times \xi_0^{1-1/s} \eta_0^{1-1/k} \xi^{1/s} \eta^{1/k} X^{1/2s} Y^{1/2k} (\ln X)^{2k/s} (\ln Y)^{2s/k}. \end{aligned}$$

Доказательство этого утверждения см. в [6].

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в условиях леммы 3 $d = 1$ и $|\xi(x)| \leq 1, |\eta(y)| \leq 1$ при всех x и y , т.е. $\xi_0 \leq X, \eta_0 \leq Y$. Тогда для суммы W имеем оценку

$$|W| \leq (2k)^{4k^2/s} (2s)^{4s^2/k} (mY)^{1/2ks} X^{1-1/2s} Y^{1-1/2k} (\ln X)^{2k/s} (\ln Y)^{2s/k}.$$

ЛЕММА 4. Пусть k – фиксированное натуральное число. Тогда

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\tau^k(n)} \ll \frac{x}{(\ln x)^{1-2^{-k}}}, \quad (2.7)$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит от k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Асимптотическая формула для суммы $\sum_{n \leq x} 1/\tau^k(n)$, из которой следует оценка (2.7), для случая $k = 1$ приведена Рамануджаном в [8]. Полное ее доказательство (для произвольных, в том числе нецелых вещественных k) было представлено Вильсоном в статье [9].

3. Основная теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть δ, ε – сколь угодно малые фиксированные числа, $0 < \delta < 1/2$, $0 < \varepsilon < 1/12$, m – простое число, $m > 2$, и $m^\delta \leq X \leq m^{4/7}$, a, b – целые числа, $(a, m) = 1$, и пусть

$$S = \sum_{n \leq X} \exp\left(2\pi i \frac{an^* + bn}{m}\right).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$|S| \ll_{\delta, \varepsilon} X(\ln X)^{-1+\varepsilon}. \quad (3.1)$$

Лемма 3. из М.З.

Лемма 4. Пусть k — натуральное число; тогда справедлива след. асимпт. ф-ла:

$$\sum_{n \leq X} \frac{1}{\tau^k(n)} = c(k) X(\log X)^{-1+2^{-k}} (1 + \dots)$$

Следствие:

$$\sum_{n \leq X} \tau^k(n) \ll X(\log X)^{-1+2^{-k}}.$$

Лемма 4*

$$\sum_{n \leq X} \frac{1}{\tau_k(n)} = \dots$$

Следствие. ...

$$\sum_{n \leq X} f(n) = \sum_{n_1 \dots n_k \leq X} \frac{f(n_1 \dots n_k)}{\tau_k(n_1 \dots n_k)} \quad - \text{ кратная сумма.}$$

$$1 \leq N_1 \leq \dots \leq N_k \quad N_j < n_j \leq N'_j, \quad j=1, \dots, k.$$

1. Если $N_1 \dots N_k \leq X^{1-\delta}$, то $\tau_k(n_1 \dots n_k) \ll X^{1-\delta}$ — хор.

2. $X \geq N_1 \dots N_k > X^{1-\delta}$; $N_k \geq X^{\frac{1}{k}(1-\delta)}$. Если $N_1 \dots N_{k-1} \leq X^{1-\delta_1}$, то $\tau_k(n_1 \dots n_k) \ll X^{1-\delta_1}$ — 3. до с. 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X > \sqrt{m} \ln^2 m$. Тогда из оценки Вейля (см., например, [10]) имеем

$$|S| \ll \sqrt{m} \ln m \ll \frac{X}{\ln X}.$$

Пусть $X \leq \sqrt{m} \ln^2 m$. Любое натуральное число n , $n > 1$, однозначно представимо в виде произведения квадрата на бесквадратное: $n = d^2 r$, $\mu^2(r) = 1$. Следовательно,

$$S = \sum_{\substack{d^2 r \leq X \\ \mu^2(r)=1}} f(d^2 r) = \sum_{d \leq \sqrt{X}} \sum_{\substack{r \leq X d^{-2} \\ \mu^2(r)=1}} f(d^2 r) = \sum_{d \leq X'} \sum_{\substack{r \leq X d^{-2} \\ \mu^2(r)=1}} f(d^2 r) + \theta X (X')^{-1},$$

где $X' = \ln X$.

Мы пришли к такой же по виду сумме с числом слагаемых $X d^{-2}$ и с функцией $f(d^2 r)$ того же вида, что и $f(r)$, но суммирование идет по бесквадратным r . Чтобы доказать теорему, достаточно получить для суммы

$$S_1 = \sum_{n \leq X_1} f(n) \mu^2(n),$$

оценку вида

$$|S_1| \ll_{\varepsilon} \frac{X_1}{(\ln X_1)^{1-\varepsilon}}, \quad (3.2)$$

где $X/\ln^2 X \leq X_1 \leq X$.

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n \leq X_1} f(n) \mu^2(n) = \sum_{m_1 n_1 \leq X_1} \frac{f(m_1 n_1) \mu^2(m_1 n_1)}{\tau(m_1 n_1)} \\ &= 2 \sum_{m_1 \leq \sqrt{X_1}} \sum_{n_1 \leq X_1/m_1} \frac{f(m_1 n_1) \mu^2(m_1 n_1)}{\tau(m_1 n_1)} - \sum_{m_1 \leq \sqrt{X_1}} \sum_{n_1 \leq \sqrt{X_1}} \frac{f(m_1 n_1) \mu^2(m_1 n_1)}{\tau(m_1 n_1)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Второе слагаемое в (3.3) оценим тривиально, используя лемму 4:

$$\sum_{m_1 \leq \sqrt{X_1}} \sum_{n_1 \leq \sqrt{X_1}} \frac{f(m_1 n_1) \mu^2(m_1 n_1)}{\tau(m_1 n_1)} \ll \left(\sum_{m_1 \leq \sqrt{X_1}} \frac{1}{\tau(m_1)} \right)^2 \ll \frac{X_1}{\ln X_1}.$$

Первое слагаемое в (3.3) разобьем на два, так что

$$\begin{aligned} &\sum_{m_1 \leq \sqrt{X_1}} \sum_{n_1 \leq X_1/m_1} \frac{f(m_1 n_1) \mu^2(m_1 n_1)}{\tau(m_1 n_1)} \\ &\quad \left(\sum_{m_1 \leq X''} \sum_{n_1 \leq X_1 m_1^{-1}} + \sum_{X'' < m_1 \leq \sqrt{X_1}} \sum_{n_1 \leq X_1 m_1^{-1}} \right) f_1(m_1 n_1), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $X'' = \exp(\ln X_1)^{\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon^2$ и

$$f_1(m_1 n_1) = \frac{f(m_1 n_1) \mu^2(m_1 n_1)}{\tau(m_1 n_1)}.$$

К лемме Зигмунда μ^*

19.10.07. (4)

1. Каждое натуральное число представимо
 $\Rightarrow$ в виде $n = d^2 m$, $\mu^2(m) = 1$: представление в
 виде произведения квадрата на бесквадратное.

$$2. S = \sum_{n \leq X} f(n) = \sum'_{d^2 m \leq X} f(d^2 m) = \sum_{d \leq \sqrt{X}} \sum'_{m \leq X d^{-2}} f(d^2 m)$$

где штрих означает суммирование по бесквадрат.
 числам m . Если $|f| \leq 1$, то

$$S \equiv \sum_{d \leq \sqrt{X}} \sum'_{m \leq X d^{-2}} f(d^2 m) + O(X X_1^{-1})$$

Пришл к сумме так: по виду с числом
 слагаемых $X d^{-2}$ и с функцией $f(d^2 m)$, по
 суммирование идет по бесквадратным m .

$$3. S = \sum'_{n \leq X} f(n) \quad , \quad \text{штрих} \Rightarrow \mu^2(n) = 1.$$

$$S = \sum'_{n \leq X} f(n) = \sum_{n \leq X} f(n) \mu^2(n) =$$

$$= \sum_{m n \leq X} \frac{f(m n) \mu^2(m n)}{\tau(m n)} = 2 \sum_{m \leq \sqrt{X}} \sum_{n \leq X m^{-1}} \frac{f(m n) \mu^2(m n)}{\tau(m n)}.$$

$$= \sum_{m \leq \sqrt{X}} \sum_{n \leq \sqrt{X}} \frac{f(m n) \mu^2(m n)}{\tau(m n)}$$

С первым слагаемым в (3.4) можно работать как с S_1 , т.е. еще раз получить в знаменателе τ и т.д. Отсюда

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1 \leq X''} \sum_{n_1 \leq X_1/m_1} f_1(m_1 n_1) \\ &= \sum_{m_1 \leq X''} \sum_{m_2 n_2 \leq X_1/m_1} \frac{f_1(m_1 m_2 n_2)}{\tau(m_2 n_2)} \\ &= \sum_{m_1 \leq X''} \left(2 \sum_{m_2 \leq \sqrt{X_1/m_1}} \sum_{n_2 \leq X_1/m_1 m_2} \frac{f(m_1 m_2 n_2) \mu^2(m_1 m_2 n_2)}{\tau(m_1 m_2 n_2) \tau(m_2 n_2)} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{m_2 \leq \sqrt{X_1/m_1}} \sum_{n_2 \leq \sqrt{X_1/m_1}} \frac{f(m_1 m_2 n_2) \mu^2(m_1 m_2 n_2)}{\tau(m_1 m_2 n_2) \tau(m_2 n_2)} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Второе слагаемое в (3.5) опять оцениваем тривиально с помощью леммы 4, и для него справедлива оценка

$$\ll \sum_{m_1 \leq X''} \frac{1}{\tau(m_1)} \left(\sum_{m_2 \leq \sqrt{X_1/m_1}} \frac{1}{\tau^2(m_2)} \right)^2 \ll \sum_{m_1 \leq X''} \frac{X_1}{m_1} \frac{1}{\tau(m_1) (\ln(X_1/m_1))^{3/2}} \ll \frac{X_1}{\ln X_1}.$$

Первое слагаемое в (3.5) опять разобьем на две суммы: по $m_2 \leq X''$ и $X'' < m_2 \leq \sqrt{X_1/m_1}$. К первой сумме снова применим тот же прием и т.д. В результате, после k -кратного применения получим, что для доказательства теоремы остается оценить суммы

$$\sum_{m_1, \dots, m_k \leq X''} \sum_{n_k \leq X_1/m_1 \dots m_k} \frac{f(m_1 \dots m_k n_k) \mu^2(m_1 \dots m_k n_k)}{\tau(m_1 \dots m_k n_k) \tau(m_k n_k)}, \quad (3.6)$$

$$\sum_{m_1, \dots, m_{j-1} \leq X''} \sum_{X'' < m_j \leq \sqrt{X_1/m_1 \dots m_{j-1}}} \sum_{n_j \leq X_1/m_1 \dots m_j} \frac{f(m_1 \dots m_j n_j) \mu^2(m_1 \dots m_j n_j)}{\tau(m_1 \dots m_j n_j) \tau(m_j n_j)} \quad (3.7)$$

при $j = 1, 2, \dots, k$.

При достаточно большом k сумма (3.6)

$$\begin{aligned} & \ll \sum_{m_1, \dots, m_k \leq X''} \sum_{n_k \leq X_1/m_1 \dots m_k} \frac{1}{\tau^k(n_k)} \ll \frac{X_1}{(\ln X_1)^{1-2-k}} \sum_{m_1, \dots, m_k \leq X''} \frac{1}{m_1 \dots m_k} \\ & \ll \frac{X_1}{(\ln X_1)^{1-2-k}} (\ln X_1)^{k\varepsilon_1} \ll_{\varepsilon} \frac{X_1}{(\ln X_1)^{1-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Ясно, что можно рассматривать (3.7) лишь для

$$\sqrt{\frac{X_1}{m_1 \dots m_{j-1}}} < n_j \leq \frac{X_1}{m_1 \dots m_j},$$

поскольку в обратном случае уже тривиальная оценка обеспечивает нужный результат.

$$W = \sum_{M < u \in M_1} \sum_{N < u \in N_1} \frac{f(mu) \mu^2(mu)}{\tau(mu)} ; M, N_1 \leq X \quad (8)$$

$$M > X^2; M_1 \leq \sqrt{X}; N > X^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, N_1 \leq \min(XM^{-1}, \frac{X}{M})$$

$$T, K. (u, v) = 1, \text{ то } \tau(uv) = \tau(u)\tau(v) \text{ (из-за } \mu^2(uv))$$

т.е.

$$W = \sum_{M < u \in M_1} \sum_{\substack{N < u \in N_1 \\ (u, v) = 1}} \frac{f(mu) \mu^2(mu)}{\tau(u)\tau(v)} \mu^2(v) =$$

$$= \sum_{u, v} \frac{f(mu) \mu^2(mu)}{\tau(u)\tau(v)} \sum_{d | (uv)} \mu(d) =$$

$$= \sum_{d \leq M_1} \mu(d) \sum_{Md^{-1} < u \in M_1, d^{-1}} \sum_{Nd^{-1} < u \in N_1, d^{-1}} \frac{f(mnd^2) \mu^2(mnd^2)}{\tau(u)\tau(v)}$$

Если $d > \mathfrak{D}_1$, то треб. вы-ва даёт

$$\ll \sum_{d > \mathfrak{D}_1} \frac{X}{d^2} = O(X \mathfrak{D}_1^{-1})$$

Остались малые $d \leq \mathfrak{D}_1$. Но тогда — двойная

сумма с хорошо осциллирующими слагаемыми.
(основная лемма):

$$W_1 = \sum_{Md^{-1} < u \in M_1, d^{-1}} \sum_{Nd^{-1} < u \in N_1, d^{-1}} \frac{f(mnd^2) \mu^2(mnd^2)}{\tau(u)\tau(v)}$$

как дока-т

5. Окончат. р-т:

$$S = \sum_{u \leq X} e^{2\pi i \frac{au^x + bu}{m}} \ll X (LX)^{-1+\varepsilon}, \text{ где } X \geq (\exp(LX))^{1/3+\delta} \text{ и } 0 < \delta < 1;$$

Чтобы оценить (3.7), воспользуемся оценками двойных сумм Клоостермана с весами, представив сумму (3.7) в виде $\ll \ln^2 X_1$ сумм вида

$$\sum_{M'_j \leq m_j \leq M''_j} \sum_{N'_j \leq n_j \leq N''_j} \xi(m_j) \eta(n_j) \exp\left(2\pi i \frac{a_j(m_j n_j)^* + b_j(m_j n_j)}{m}\right),$$

где

$$M''_j \leq 2M'_j, \quad N''_j \leq 2N'_j, \\ X'' \leq M'_j \leq \sqrt{\frac{X_1}{m_1 \dots m_{j-1}}}, \quad \sqrt{\frac{X_1}{m_1 \dots m_{j-1}}} < N'_j \leq \frac{X_1}{m_1 \dots m_{j-1} M_j}.$$

Для этого преобразуем (3.7) следующим образом. Сначала при фиксированных $m_1, \dots, m_{j-1}$ разделим переменные m_j, n_j функции

$$\frac{\mu^2(m_1 \dots m_j n_j)}{\tau(m_1 \dots m_j n_j) \tau(m_j n_j)};$$

имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{M'_j \leq m_j \leq M''_j} \sum_{N'_j \leq n_j \leq N''_j} \frac{f(m_1 \dots m_j n_j) \mu^2(m_1 \dots m_j n_j)}{\tau(m_1 \dots m_j n_j) \dots \tau(m_j n_j)} \\ &= \sum_{\substack{M'_j \leq m_j \leq M''_j, N'_j \leq n_j \leq N''_j \\ (m_j, m_1 \dots m_{j-1} n_j) = 1}} \frac{f(m_1 \dots m_j n_j) \mu^2(m_1 \dots m_{j-1} n_j)}{\tau(m_1 \dots m_{j-1} n_j) \dots \tau(m_{j-1} n_j)} \frac{\mu^2(m_j)}{\tau^j(m_j)} \\ &= \sum_{\substack{M'_j \leq m_j \leq M''_j \\ N'_j \leq n_j \leq N''_j}} f(m_1 \dots m_j n_j) \xi(m_j) \eta(n_j) \sum_{d | (m_j, m_1 \dots m_{j-1} n_j)} \mu(d) \\ &= \sum_{d \ll M_j} \mu(d) \sum_{\substack{M'_j \leq m_j \leq M''_j \\ m_j \equiv 0 \pmod{d}}} \sum_{\substack{N'_j \leq n_j \leq N''_j \\ m_1 \dots m_{j-1} n_j \equiv 0 \pmod{d}}} \xi(m_j) \eta(n_j) f(m_1 \dots m_j n_j), \end{aligned}$$

где

$$\xi(m_j) = \frac{\mu^2(m_j)}{\tau^j(m_j)}, \quad \eta(n_j) = \frac{\mu^2(m_1 \dots m_{j-1} n_j)}{\tau(m_1 \dots m_{j-1} n_j) \dots \tau(m_{j-1} n_j)}.$$

Затем внутреннюю сумму в (3.7) преобразуем так, чтобы предел изменения n_j , не зависел от m_j . При $2N_j > X_j/m_j$, где $X_j = X_1/m_1 \dots m_{j-1}$, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{M'_j \leq m_j \leq M''_j} \sum_{N_j < n_j \leq X_j/m_j} \xi(m_j) \eta(n_j) f(m_j n_j) \right| \\ &= \left| \sum_{M'_j \leq m_j \leq M''_j} \sum_{N'_j \leq n_j \leq N''_j} \xi(m_j) \eta(n_j) f(m_j n_j) \frac{1}{m} \sum_{|c| < m/2} \sum_{N_j < r \leq X_j/m_j} e^{2\pi i c(n_j - r)/m} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{m} \sum_{M'_j \leq m_j \leq M''_j} \sum_{N'_j \leq n_j \leq N''_j} |\xi(m_j)| |\eta(n_j)| \frac{X_1}{m_1 \cdots m_j} \\
 &\quad + \frac{1}{m} \sum_{0 < |c| < m/2} \left| \sum_{M'_j \leq m_j \leq M''_j} \xi(m_j) \left(\sum_{N_j < r \leq X_j/m_j} e^{-2\pi i cr/m} \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \sum_{N'_j \leq n_j \leq N''_j} \eta(n_j) e^{2\pi i cn_j/m} f(m_j n_j) \right|. \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Заметим, что первое слагаемое в (3.8) тривиально оценивается как

$$\begin{aligned}
 \frac{X_1}{m m_1 \cdots m_{j-1}} N_j &\ll \frac{X_1^2}{m(m_1 \cdots m_{j-1})^2 M_j} \ll \frac{X_1^2}{m(m_1 \cdots m_{j-1})^2 e^{(\ln X_1)^{\varepsilon_1}}} \\
 &\ll \frac{1}{(m_1 \cdots m_{j-1})^2} \frac{\ln^4 X_1}{e^{(\ln X_1)^{\varepsilon_1}}},
 \end{aligned}$$

и эта оценка дает хороший результат также после суммирования по $m_1, \dots, m_{j-1}$.

Пользуясь тем, что

$$\left| \sum_{N_j < r \leq X_j/m_j} e^{-2\pi i cr/m} \right| \ll \left\| \frac{c}{m} \right\|^{-1} = \frac{m}{c},$$

сводим оценку второго слагаемого в (3.8) к оценке сумм

$$\begin{aligned}
 &\sum_{m_1, \dots, m_{j-1} \leq X''} \sum_{d \ll M_j} \\
 &\sum_{0 < |c| < m/2} \left| \sum_{\substack{M'_j \leq m_j \leq M''_j \\ m_j \equiv 0 \pmod{d}}} \sum_{\substack{N'_j \leq n_j \leq N''_j \\ m_1 \cdots m_{j-1} n_j \equiv 0 \pmod{d}}} \xi_1(m_j) \eta_1(n_j) f(m_1 \cdots m_j n_j) \right|, \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

где $|\xi_1(m_j)| \ll 1/c$, $|\eta_1(n_j)| \leq 1$. В (3.9) имеем двойную сумму с хорошо осциллирующими слагаемыми, что позволяет применить подход из [5], и с помощью следствия из леммы 3 получить желаемую оценку (например, с понижающим множителем вида $(\ln N_j)^{-A}$, где $A \geq 5$). В результате для суммы (3.9) находим

$$\begin{aligned}
 &\sum_{m_1, \dots, m_{j-1} \leq X''} \sum_{d \ll M_j} \sum_{0 < |c| < m/2} \frac{N_j M_j}{cd (\ln N_j)^A} \\
 &\ll \frac{X_1}{(\ln X_1)^{A-2}} \sum_{m_1, \dots, m_{j-1} \leq X''} \frac{1}{m_1 \cdots m_{j-1}} \ll \frac{X_1}{\ln X_1}.
 \end{aligned}$$

Тем самым доказана оценка (3.2), откуда следует утверждение теоремы (3.1).

Комментарии (Е. А. Карацуба, М. А. Королёв, И. С. Резвякова)

Из сохранившихся записей Анатолия Алексеевича Карацубы можно заключить, что изобретенный им прием сведения однократной суммы к двойной (с использованием множителя $1/\tau(m_1 n_1)$) им же был и обобщен. Именно, вместо указанного выше множителя он использовал множители вида $1/\tau_k(n_1 \cdots n_k)$. Этот прием позволяет, по сути, превращать однократную сумму в сумму произвольной, наперед заданной кратности. Области изменения переменных $n_1, \dots, n_k$ разбиваются на промежутки вида $N_j < n_j \leq N'_j$, где $N'_j \leq 2N_j$, $j = 1, \dots, k$. Те части исходной суммы, для которых произведение $N_1 \dots N_k$ мало, оцениваются тривиально. Оставшиеся слагаемые группируются таким образом, что к ним оказывается возможным применить оценки, подобные оценкам леммы 1.

На одной из страниц своих записей от 5 октября 2006 года Анатолий Алексеевич сформулировал без доказательства несколько утверждений, которые могут быть установлены методом, примененным при доказательстве теоремы 1. Ниже мы приводим эти утверждения следуя тексту Анатолия Алексеевича (см. с. 397).

Везде далее m, n, a, b – целые числа, $(n, m) = (a, m) = 1$, $m^\varepsilon < N \leq m^{4/7}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $S_0(N), S_1(N)$ – тригонометрические суммы вида

$$S_j(N) = \sum'_{n \leq N} \exp\left(2\pi i \frac{an^* + bn}{m}\right),$$

где штрих означает суммирование по таким n , что $\mu(n) = (-1)^j$, $j = 0, 1$. Тогда для $|S_j(N)|$ справедливы оценки

$$|S_j(N)| \ll N\Delta, \quad \Delta = (\ln N)^{-c},$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, $K_j(N; \alpha, \beta)$ – количество решений неравенства

$$\alpha \leq \left\{ \frac{an^* + bn}{m} \right\} < \beta,$$

где $n \leq N$, $(n, m) = 1$, $\mu(n) = (-1)^j$, $j = 0, 1$. Тогда для $K_j(N; \alpha, \beta)$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$K_j(N; \alpha, \beta) = \frac{3}{\pi^2}(\beta - \alpha)N + O(N(\ln N)^{-c}),$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная.

ТЕОРЕМА 4. Справедливы следующие асимптотические формулы:

$$T_j(N) = \sum_{\substack{n \leq N \\ \mu(n) = (-1)^j}} \left\{ \frac{an^* + bn}{m} \right\} = \frac{3}{2\pi^2} N + O(N(\ln N)^{-c}),$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная.

Везде $n \in \mathbb{N}$ - натур. число, $n \geq 2$, $(n, a) = 1$, $b \neq 0$ - целое число.

Теор. 1 Пусть $S_0(N)$, $S_1(N)$ - т.с. $\sum_{n \leq N} \exp 2\pi i \frac{an^* + bn}{n}$ Ещё одна задача на $n^*n \equiv 1(n)$

$$S_0(N) = \sum_{n \leq N} \exp 2\pi i \frac{an^* + bn}{n}$$

и сумм $\sum_{n \leq N} \mu(n) \exp 2\pi i \frac{an^* + bn}{n}$ таких n , что $\mu(n) = (-1)^j$.

~~$\mu(n) = (-1)^j$~~ , $(a, n) = 1$, $(n, n) = 1$ ~~$S_2(N)$~~

Тогда для $|S_j(N)|$ справедливы оценки

$$|S_j(N)| \leq N \Delta, \quad \Delta = (L N)^{-c}, \quad c = \dots$$

Теор. 2 Пусть $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, $K_j(N; \alpha, \beta)$ - количество решений неравенства

$$n \leq \left\{ \frac{an^* + bn}{n} \right\} < \beta, \quad n \in N, (n, n) = 1, \mu(n) = (-1)^j, j = 0, 1$$

Тогда для $K_j(N; \alpha, \beta)$ справедливы ~~оценки~~ следующие асимпт. ф-лы:

$$K_j(N; \alpha, \beta) = \frac{3}{2\pi^2} (\beta - \alpha) N + O(N L N^{-c} N), \quad c = \dots$$

$$\frac{3}{2\pi^2}$$

$$\frac{3}{\pi^2}$$

$$\sum_{n \in N} \mu(n) \exp 2\pi i \frac{an^* + bn}{n}$$

Теорема 3 Спр-вы след. асимпт. ф-лы:

$$T_j(N) = \sum_{\substack{n \leq N \\ \mu(n) = (-1)^j}} \left\{ \frac{an^* + bn}{n} \right\} = \frac{3}{2\pi^2} N + O(N L N^{-c} N)$$

Ещё: $\left| \sum_{n \in N} \tau(n) \exp 2\pi i \frac{an^* + bn}{n} \right| \ll N (L N)^{1-c}, \quad c > 0$
и следствия $\sum \tau(n) \exp 2\pi i \frac{an^* + bn}{n}$

ТЕОРЕМА 5. *Имеет место оценка*

$$\left| \sum_{n \leq N} \tau_k(n) \exp\left(2\pi i \frac{an^* + bn}{m}\right) \right| \ll N(\ln N)^{k-1-c},$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная.

Следует отметить, что теоремы 2 и 5 независимо доказаны Королёвым с $c = 1/22 - \delta$, где δ – сколь угодно малое фиксированное число. Асимптотические формулы теорем 3 и 4 следуют из оценок теоремы 2 и, таким образом, справедливы с тем же значением постоянной c (см. статью [11] настоящего сборника).

Отметим, что в черновиках Анатолия Алексеевича содержатся без доказательства утверждения, повторяющие утверждения теорем 2–5, но для существенно более коротких сумм Клоостермана, а именно для $N \geq \exp((\ln m)^{2/3+\alpha})$, где $0 < \alpha < 1/3$. В этом случае постоянная c зависит от α : $c = c(\alpha) > 0$. Случай $\alpha > 2/15$ разбирается в статье Королёва [11].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Карацуба, “Распределение обратных величин в кольце вычетов по заданному модулю”, *Докл. РАН.*, **333**:2 (1993), 138–139.
- [2] А. А. Карацуба, “Дробные доли специального вида функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:4 (1995), 61–80.
- [3] А. А. Карацуба, “Аналоги сумм Клоостермана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:5 (1995), 93–102.
- [4] А. А. Карацуба, “Аналоги неполных сумм Клоостермана и их приложения”, *Tatra Mt. Math. Publ.*, **11** (1997), 89–120.
- [5] А. А. Карацуба, “Суммы дробных долей специального вида функций”, *Докл. РАН.*, **349**:3 (1996), 302.
- [6] А. А. Карацуба, “Двойные суммы Клоостермана”, *Матем. заметки*, **66**:5 (1999), 682–687.
- [7] М. А. Королёв, “Неполные суммы Клоостермана и их приложения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:6 (2000), 41–64.
- [8] S. Ramanujan, “Some formulæ in the analytic theory of numbers”, *Messenger Math.*, **45** (1915), 81–84.
- [9] B. M. Wilson, “Proofs of some formulæ enunciated by Ramanujan”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **21** (1922), 235–255.
- [10] L. Carlitz, S. Uchiyama, “Bounds for exponential sums”, *Duke Math. J.*, **24** (1957), 37–41.
- [11] М. А. Королёв, “Короткие суммы Клоостермана с весами”, *Матем. заметки*, **88**:3 (2010), 415–427.

А. А. Карацуба

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило

15.05.2010