Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Киркорян, Д. И. Толев, Об одном варианте задачи Хуа-ло-Кена, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 3, 405–414

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8813>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 07:16:19

УДК 511.333

Об одном варианте задачи Хуа-ло-Кена

А. Киркорян, Д. Толев

В работе доказано, что почти все натуральные числа n , удовлетворяющие $n \equiv 3 \pmod{24}$, $n \not\equiv 0 \pmod{5}$, представимы суммой трех квадратов простых чисел, хотя бы одно из которых можно записать в виде $1 + x^2 + y^2$.

Библиография: 13 названий.

В 1938 г. Хуа-ло-Кен [1] доказал, что почти все натуральные числа n , для которых выполнены условия

$$n \equiv 3 \pmod{24}, \quad n \not\equiv 0 \pmod{5}, \quad (1)$$

можно представить в виде

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = n, \quad (2)$$

где p_1, p_2, p_3 – простые числа. С тех пор многие математики исследовали разрешимость этого уравнения в простых числах, удовлетворяющих дополнительным условиям. Например, в работе [2] установлено, что почти все n , для которых выполнено (1), можно представить в виде (2), где простые p_j таковы, что каждое из чисел $p_1 + 2$ и $p_2 + 2$ имеет не более 5 простых множителей, а $p_3 + 2$ – не более 8 простых множителей.

В настоящей работе мы рассматриваем уравнение (2) с простыми числами, хотя бы одно из которых можно представить в виде $1 + x^2 + y^2$, где x и y – целые числа. Бесконечность множества простых чисел такого вида установил Линник [3]. Точнее, он доказал асимптотическую формулу

$$\sum_{p \leq x} r(p-1) = \pi \prod_{p > 2} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p(p-1)}\right) \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x(\log \log x)^7}{(\log x)^{1+\theta_0}}\right), \quad (3)$$

где $r(m)$ равно числу решений уравнения $m = x^2 + y^2$ в целых числах, $\chi(d)$ – неглавный характер по модулю 4 и

$$\theta_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e \log 2 = 0.0029 \dots \quad (4)$$

Условное доказательство формулы (3) (с использованием расширенной гипотезы Римана) было ранее предложено Хооли [4]. Доказательство формулы (3) можно найти еще в книгах Линника [5] и Хооли [6].

Работа выполнена при поддержке Софийского университета (грант № 028/2009).

Наш результат – следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть N – большое число. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество натуральных чисел n , удовлетворяющих (1) и непредставимых суммой трех квадратов простых чисел, хотя бы одно из которых можно записать в виде $1 + x^2 + y^2$. Пусть $A(N)$ – число элементов из $\mathcal{A}$, не превосходящих N . Тогда имеет место неравенство

$$A(N) \ll N(\log N)^{-0.0019}. \quad (5)$$

Ранее Матомаки [7] и Толев [8] получили результаты такого типа, связанные с бинарной проблемой Гольдбаха. Толев [9] доказал также, что каждое достаточно большое нечетное число можно представить в виде суммы трех простых чисел, хотя бы два из которых вида $1 + x^2 + y^2$.

В настоящей работе мы приведем только схему доказательства теоремы, поскольку (довольно длинные) вычисления близки или проводятся тем же способом как в других работах, на которые мы ссылаемся в данной работе.

Схема доказательства. 1. Для любого натурального числа $n \leq N$ рассмотрим сумму

$$R(n) = \sum_{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = n} r(p_1 - 1)(\log p_1)(\log p_2)(\log p_3). \quad (6)$$

Обозначим

$$L = \log N, \quad X = N^{1/2}, \quad D = X^{1/2} L^{-1000000}. \quad (7)$$

Наша цель – установить существование величины $M(n) = M_N(n)$ для которой:

1) если выполнено (1), то для любого $n \leq N$ имеем

$$\sqrt{n}(\log L)^{-10} \ll M(n) \ll \sqrt{n}(\log L)^{10}; \quad (8)$$

2) для суммы

$$E(N) = \sum'_{n \leq N} |R(n) - M(n)|, \quad (9)$$

где $\sum'$ означает, что суммирование ведется по натуральным числам, удовлетворяющим (1), имеет место оценка

$$E(N) \ll N^{3/2} L^{-\theta_0 + \varepsilon}, \quad (10)$$

где θ_0 определено через (4), а $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое.

Допустим, что для некоторого $M(n)$ условия (8) и (9) выполнены. Из определений множества $\mathcal{A}$ и суммы $R(n)$ следует, что если $n \in \mathcal{A}$, то $R(n) = 0$. Тогда, если Δ – параметр, для которого $1 < \Delta < N$, то, используя (8)–(10), получаем

$$\begin{aligned} N^{3/2} L^{-\theta_0 + \varepsilon} &\gg E(N) \geq \sum_{\substack{\Delta < n \leq N \\ n \in \mathcal{A}}} |R(n) - M(n)| = \sum_{\substack{\Delta < n \leq N \\ n \in \mathcal{A}}} |M(n)| \\ &\gg (A(N) - \Delta) \Delta^{1/2} (\log L)^{-10}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$A(N) \ll \Delta + N^{3/2} L^{-\theta_0 + \varepsilon} \Delta^{-1/2}.$$

Выбирая $\Delta = NL^{-2\theta_0/3}$ и используя (4) получаем оценку (5).

2. Итак, займемся определением $M(n)$ и доказательством (8) и (9).

Пользуясь известной формулой $r(m) = 4 \sum_{d|m} \chi(d)$ и также (6), представим $R(n)$ в виде

$$R(n) = 4(R_1(n) + R_2(n) + R_3(n)), \quad (11)$$

где

$$R_1(n) = \sum_{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = n} \left(\sum_{\substack{d|p_1-1 \\ d \leq D}} \chi(d) \right) (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3), \quad (12)$$

$$R_2(n) = \sum_{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = n} \left(\sum_{\substack{d|p_1-1 \\ D < d < X/D}} \chi(d) \right) (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3), \quad (13)$$

$$R_3(n) = \sum_{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = n} \left(\sum_{\substack{d|p_1-1 \\ d \geq X/D}} \chi(d) \right) (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3). \quad (14)$$

Тогда из (9) и (11) следует

$$E(N) \ll E_1(N) + E_2(N) + E_3(N), \quad (15)$$

где

$$E_1(N) = \sum'_{n \leq N} |4R_1(n) - M(n)|, \quad (16)$$

$$E_j(N) = \sum'_{n \leq N} |R_j(n)|, \quad j = 2, 3. \quad (17)$$

Из (15) следует, что для получения (10) достаточно оценить соответствующим способом величины $E_j(N)$, $j = 1, 2, 3$.

3. Исследование $R_1(n)$ и $R_3(n)$ сводится к рассмотрению суммы

$$I_{l,d;J}(n) = \sum_{\substack{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = n \\ p_1 \equiv l \pmod{d} \\ p_1 \in J}} (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3), \quad (18)$$

где d и l – взаимно простые натуральные числа, а $J \subset [1, X]$ – отрезок. Если $J = [1, X]$, то будем писать для простоты $I_{l,d}(n)$.

Для изучения величины $I_{l,d;J}(n)$ применяем круговой метод. Очевидно,

$$I_{l,d;J}(n) = \int_0^1 S_{l,d;J}(\alpha) S^2(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha,$$

где, как обычно, $e(\alpha) = \exp(2\pi i\alpha)$ и

$$S_{l,d;J}(\alpha) = \sum_{\substack{p \in J \\ p \equiv l \pmod{d}}} (\log p) e(\alpha p^2), \quad S(\alpha) = S_{1,1;[1,X]}(\alpha). \quad (19)$$

Определим множества больших и, соответственно, малых дуг через

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{q \leq Q} \bigcup_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau}, \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau} \right], \quad \mathfrak{m} = \left[-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau} \right] \setminus \mathfrak{M}, \quad (20)$$

где

$$Q = L^{20000}, \quad \tau = X^2 L^{-50000}. \quad (21)$$

Тогда имеем

$$I_{l,d;J}(n) = I_{l,d;J}^{(1)}(n) + I_{l,d;J}^{(2)}(n), \quad (22)$$

где

$$I_{l,d;J}^{(1)}(n) = \int_{\mathfrak{M}} S_{l,d;J}(\alpha) S^2(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha, \quad I_{l,d;J}^{(2)}(n) = \int_{\mathfrak{m}} S_{l,d;J}(\alpha) S^2(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha. \quad (23)$$

(Как и раньше, если $J = [1, X]$, то будем писать для простоты $I_{l,d}^{(\nu)}(n)$.)

Определим

$$H_J(n) = \frac{1}{8} \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=n \\ \sqrt{m_1} \in J}} (m_1 m_2 m_3)^{-1/2}.$$

Хорошо известно (см. например [10; гл. 2, теорема 2.3]), что

$$H(n) = H_{[1,X]}(n) = \frac{\pi}{4} \sqrt{n} + O(1). \quad (24)$$

Для каждого n , удовлетворяющего (1), определим мультипликативную по отношению к q функцию $t_{l,d,n}(q)$ следующими равенствами:

$$t_{l,d,n}(2) = 1, \quad t_{l,d,n}(4) = 2, \quad t_{l,d,n}(8) = 4, \quad t_{l,d,n}(2^\nu) = 0, \quad \nu > 3. \quad (25)$$

Если $p > 2$ – простое число, то

$$t_{l,d,n}(p^\nu) = 0, \quad \nu > 1, \quad (26)$$

$$t_{l,d,n}(p) = \begin{cases} h_0(p, n), & p \nmid d, \\ h_1(p, n, l), & p \mid d, \end{cases} \quad (27)$$

где

$$h_0(p, n) = \begin{cases} \left(\left(\left(\frac{-n}{p} \right) p^2 + 3 \left(\left(\frac{n}{p} \right) + \left(\frac{-1}{p} \right) \right) p + 1 \right) \frac{1}{(p-1)^3}, & p \nmid n, \\ \left(-3 \left(\frac{-1}{p} \right) p - 1 \right) \frac{1}{(p-1)^2}, & p \mid n, \end{cases} \quad (28)$$

$$h_1(p, n, l) = \begin{cases} \left(\left(-2 \left(\frac{n-l^2}{p} \right) - \left(\frac{-1}{p} \right) \right) p - 1 \right) \frac{1}{(p-1)^2}, & p \nmid n-l^2, \\ \left(\left(\frac{-1}{p} \right) p + 1 \right) \frac{1}{p-1}, & p \mid n-l^2, \end{cases} \quad (29)$$

и где $\left(\frac{\cdot}{p} \right)$ – символ Лежандра.

Далее, следуя метода работы [2; с. 81–84], получим

$$I_{l,d;J}^{(1)}(n) = I_{l,d;J}^*(n) + O\left(L^{200000} \sum_{q \leq Q} \Delta(X, [d, q])\right) + O(X\tau^4(d)d^{-1}L^{-1000}), \quad (30)$$

где

$$I_{l,d;J}^*(n) = \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{q \leq Q} t_{l,d,n}(q) H_J(n), \quad (31)$$

через $[d, q]$ обозначено наименьшее общее кратное d и q , $\varphi(d)$ – функция Эйлера, $\tau(d)$ – число положительных делителей d и

$$\Delta(x, h) = \max_{y \leq x} \max_{(l, h)=1} \left| \sum_{\substack{p \leq y \\ p \equiv l \pmod{h}}} \log p - \frac{y}{\varphi(h)} \right|.$$

4. Рассмотрим сначала $E_3(N)$. В силу того, что

$$\sum_{\substack{d|p_1-1 \\ d \geq X/D}} \chi(d) = \sum_{\substack{m|p_1-1 \\ m \leq (p_1-1)D/X}} \chi\left(\frac{p_1-1}{m}\right) = \sum_{j=\pm 1} \chi(j) \sum_{\substack{m|p_1-1 \\ m \leq (p_1-1)D/X \\ (p_1-1)/m \equiv j \pmod{4}}} 1$$

из (14) и (18) следует

$$R_3(n) = \sum_{\substack{m \leq D \\ 2|m}} \sum_{j=\pm 1} \chi(j) I_{1+jm, 4m; J_m}(n),$$

где $J_m = [1 + mX/D, X]$. Следовательно, из (22) получаем

$$R_3(n) = R_3^{(1)}(n) + R_3^{(2)}(n), \quad (32)$$

где

$$R_3^{(\nu)}(n) = \sum_{\substack{m \leq D \\ 2|m}} \sum_{j=\pm 1} \chi(j) I_{1+jm, 4m; J_m}^{(\nu)}(n), \quad \nu = 1, 2. \quad (33)$$

Тогда из (17) и (32) следует

$$E_3(N) \ll E_3^{(1)}(N) + E_3^{(2)}(N), \quad (34)$$

где

$$E_3^{(\nu)}(N) = \sum'_{n \leq N} |R_3^{(\nu)}(n)|, \quad \nu = 1, 2. \quad (35)$$

Рассмотрим $E_3^{(2)}(N)$. В силу (23) и (33) имеем

$$R_3^{(2)}(n) = \int_{\mathfrak{m}} K(\alpha) S^2(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha,$$

где

$$K(\alpha) = \sum_{\substack{m \leq D \\ 2|m}} \sum_{j=\pm 1} \chi(j) S_{1+jm, 4m; J_m}(\alpha).$$

Тогда, применяя неравенства Коши и Бесселя, получим

$$\begin{aligned} E_3^{(2)}(N) &\ll X \left(\sum_{n \leq N} \left| \int_{\mathfrak{m}} K(\alpha) S^2(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha \right|^2 \right)^{1/2} \ll X \left(\int_{\mathfrak{m}} |K^2(\alpha) S^4(\alpha)| d\alpha \right)^{1/2} \\ &\ll X \sup_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)| \left(\int_0^1 |K^4(\alpha)| d\alpha \right)^{1/4} \left(\int_0^1 |S^4(\alpha)| d\alpha \right)^{1/4}. \end{aligned} \quad (36)$$

Сумму $S(\alpha)$, определенную через (19), можно оценить на множестве малых дуг методом И. М. Виноградова. Пользуясь, например, результатом работы [11] и имея ввиду (20) и (21), получаем

$$\sup_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)| \ll XL^{-500}. \quad (37)$$

Хорошо известно также, что

$$\int_0^1 |S^4(\alpha)| d\alpha \ll X^2 L^7. \quad (38)$$

Далее, используя тот же метод, что и в работе [2; с. 67–69], получаем

$$\int_0^1 |K^4(\alpha)| d\alpha \ll X^2 L^{1200}. \quad (39)$$

Тогда из (7), (36)–(39) следует

$$E_3^{(2)}(N) \ll N^{3/2} L^{-10}. \quad (40)$$

Рассмотрим теперь $E_3^{(1)}(N)$. Из (30), (31), (33) и (35) следует, что

$$R_3^{(1)}(n) = R^* + O\left(L^{200000} \sum_{m \leq M} \sum_{q \leq Q} \Delta(X, [4m, q])\right) + O(XL^{-100}), \quad (41)$$

где

$$R^* = \sum_{\substack{m \leq D \\ 2|m}} \varphi(4m)^{-1} \sum_{j=\pm 1} \chi(j) \sum_{q \leq Q} t_{1+jm, 4m, n}(q) H_{J_m}(n).$$

Используя (25)–(29), нетрудно проверить, что выражение $t_{1+jm, 4m, n}(q)$ не зависит от j . Тогда имеем $\sum_{j=\pm 1} \chi(j) t_{1+jm, 4m, n}(q) = 0$, откуда следует, что $R^* = 0$.

Далее, как в работе [2; с. 82–83], используем теорему Бомбьери–Виноградова и, имея ввиду (7), устанавливаем, что первый остаточный член в правой части (41) дает в $E_3^{(1)}$ вклад $O(X^3 L^{-10})$. Таким образом, получаем

$$E_3^{(1)}(N) \ll N^{3/2} L^{-10}. \quad (42)$$

Тогда в силу (34), (40) и (42) имеем

$$E_3(N) \ll N^{3/2} L^{-10}. \quad (43)$$

5. Рассмотрим теперь сумму $E_2(N)$. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество простых чисел $p \leq X$ таких, что $p-1$ имеет делитель, находящийся на отрезке $[D, X/D]$. Используя неравенство Коши и также (13), получаем

$$\begin{aligned} E_2(N)^2 &\leq N \sum_{n \leq N} |R_2(n)|^2 \ll NL^6 \sum_{\substack{p_1, \dots, p_6 \leq X \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p_4^2 + p_5^2 + p_6^3}} \left| \sum_{\substack{d|p_1-1 \\ D < d < X/D}} \chi(d) \right| \left| \sum_{\substack{t|p_4-1 \\ D < t < X/D}} \chi(t) \right| \\ &\ll NL^6 \sum_{\substack{p_1, \dots, p_6 \leq X \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p_4^2 + p_5^2 + p_6^3 \\ p_4 \in \mathcal{F}}} \left| \sum_{\substack{d|p_1-1 \\ D < d < X/D}} \chi(d) \right|^2. \end{aligned}$$

Слагаемые в последнем выражении, для которых $p_1 = p_4$, дают вклад $O(N^{5/2+\varepsilon})$. Следовательно,

$$E_2(N)^2 \ll N^{5/2+\varepsilon} + NL^6 \Sigma_0, \quad (44)$$

где

$$\Sigma_0 = \sum_{p_1 \leq X} \left| \sum_{\substack{d|p_1-1 \\ D < d < X/D}} \chi(d) \right|^2 \sum_{\substack{p_4 \leq X \\ p_4 \in \mathcal{F} \\ p_4 \neq p_1}} \sum_{\substack{p_2, p_3, p_5, p_6 \leq X \\ p_2^2 + p_3^2 - p_5^2 - p_6^2 = p_4^2 - p_1^2}} 1.$$

Далее, используем, что равномерно по h , удовлетворяющим $1 \leq |h| \leq N$, число решений уравнения $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2 = h$ в простых числах $p_1, p_2, p_3, p_4 \leq X$ оценивается сверху величиной $O(NL^{-4})$. Доказательство этого утверждения можно получить, пользуясь методом работы [12]. Вычисления аналогичны (и намного проще) и по этой причине мы их не приводим. Таким образом получаем

$$\Sigma_0 \ll NL^{-4} \Sigma' \Sigma'', \quad (45)$$

где

$$\Sigma' = \sum_{p \leq X} \left| \sum_{\substack{d|p-1 \\ D < d < X/D}} \chi(d) \right|^2, \quad \Sigma'' = \sum_{\substack{p \leq X \\ p \in \mathcal{F}}} 1.$$

Суммы, очень похожие на Σ' и Σ'' , оценены в [6; гл. 5]. Работая тем же способом, получим

$$\Sigma' \ll XL^{-1}(\log L)^7, \quad \Sigma'' \ll XL^{-1-2\theta_0}(\log L)^3, \quad (46)$$

где θ_0 определено через (4). Из (44)–(46) следует

$$E_2(N) \ll N^{3/2} L^{-\theta_0} (\log L)^5. \quad (47)$$

6. Рассмотрим, наконец, сумму $E_1(N)$. В силу (12), (16), (18) и (22) имеем

$$E_1(N) \ll E_1^{(1)}(N) + E_1^{(2)}(N), \quad (48)$$

где

$$E_1^{(1)}(N) = \sum'_{n \leq N} \left| 4 \sum_{d \leq D} \chi(d) I_{1,d}^{(1)}(n) - M(n) \right|, \quad E_1^{(2)}(N) = \sum'_{n \leq N} \left| \sum_{d \leq D} \chi(d) I_{1,d}^{(2)}(n) \right|.$$

Сумму $E_1^{(2)}(N)$ оцениваем тем же способом, что $E_3^{(2)}(N)$, и получаем

$$E_1^{(2)}(N) \ll N^{3/2} L^{-10}. \quad (49)$$

Рассмотрим $E_1^{(1)}(N)$. Сначала, для того чтобы получить приближенное значение для $I_{1,d}^{(1)}(n)$, воспользуемся формулой (30). Вклад остатков в правой части (30) оцениваем тем же методом, что при рассмотрении $E_3^{(1)}(N)$. Используем также (24) и получаем

$$E_1^{(1)}(N) \ll E^* + N^{3/2} L^{-10}, \quad (50)$$

где

$$E^* = \sum'_{n \leq N} \left| \pi \sqrt{n} \sum_{d \leq D} \frac{\chi(d)}{\varphi(d)} \sum_{q \leq Q} t_{1,d,n}(q) - M(n) \right|.$$

Заменим теперь сумму по q в последней формуле произведением

$$P = 8 \prod_{2 < p \leq Q} (1 + t_{1,d,n}(p))$$

и, воспользовавшись опять методом работы [2; с. 85–86], оценим вклад возникающих остатков. Далее, в силу (27) величину P можно записать в виде

$$P = 8 \xi_n \theta(d),$$

где

$$\xi_n = \xi_{n,Q} = \prod_{2 < p \leq Q} (1 + h_0(p, n)), \quad \theta(d) = \theta_{n,Q}(d) = \prod_{\substack{2 < p \leq Q \\ p|d}} \frac{1 + h_1(p, n, 1)}{1 + h_0(p, n)}. \quad (51)$$

Отметим, что в силу (21), (28) и (51) имеем

$$(\log L)^{-2} \ll \xi_n \ll (\log L)^2. \quad (52)$$

Таким образом, получаем

$$E^* \ll E^{**} + N^{3/2} L^{-10}, \quad (53)$$

где

$$E^{**} = \sum'_{n \leq N} |8\pi \sqrt{n} \xi_n \Sigma(n) - M(n)|, \quad (54)$$

$$\Sigma(n) = \Sigma_Q(n) = \sum_{d \leq D} f(d), \quad f(d) = f_{n,Q}(d) = \chi(d) \varphi(d)^{-1} \theta(d). \quad (55)$$

Осталось найти асимптотическую формулу для $\Sigma(n)$ и определить $M(n)$ таким образом, чтобы сумма E^{**} была возможно наименьшей. Используя (28), (29) и (51), нетрудно проверить, что равномерно по $n \leq N$ имеет место оценка

$$f(d) \ll (\log \log d)^{10} d^{-1}. \quad (56)$$

Тогда бесконечный ряд

$$\Phi(s) = \Phi_{n,Q}(s) = \sum_{d=1}^{\infty} f(d)d^{-s}$$

абсолютно сходится в полуплоскости $\operatorname{Re}(s) > 0$. Используя формулу Перрона (см. [13; гл. 1]) и имея ввиду (56), после некоторых вычислений получаем

$$\Sigma(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/10-iX}^{1/10+iX} \frac{D^s}{s} \Phi(s) ds + O(N^{-1/100}). \quad (57)$$

Функция $f(d)$ мультипликативна по отношению к d . Следовательно, применяя тождество Эйлера и имея ввиду (55), находим

$$\Phi(s) = L(s+1, \chi) \mathcal{N}(s), \quad (58)$$

где $L(s, \chi)$ – ряд Дирихле, соответствующий характеру χ , и

$$\mathcal{N}(s) = \mathcal{N}_{n,Q}(s) = \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p)(p\theta_n(p) - p + 1)}{p^{s+1}(p-1)} \right). \quad (59)$$

Пользуясь известными свойствами L -рядов Дирихле и также определением (51) для $\theta(d)$, видим, что функция $\Phi(s)$ имеет аналитическое продолжение в полуплоскости $\operatorname{Re}(s) > -1$. Хорошо известно, что $L(s+1, \chi) \ll 1 + |\operatorname{Im}(s)|^{1/6}$, если $\operatorname{Re}(s) \geq -1/2$. Кроме того, из (28), (29), (51) и (59) следует, что $\mathcal{N}(s) \ll N^\varepsilon$, если $\operatorname{Re}(s) \geq -1/2$. Следовательно, из (58) следует, что

$$\Phi(s) \ll N^\varepsilon X^{1/6}, \quad \operatorname{Re}(s) \geq -1/2, \quad |\operatorname{Im}(s)| \leq X. \quad (60)$$

Применяя теорему вычетов, видим, что интеграл в правой части (57) равен

$$2\pi i \Phi(0) + \int_{\gamma} \frac{D^s}{s} \Phi(s) ds, \quad (61)$$

где γ – ломаная линия, определенная точками

$$\frac{1}{10} - iX, \quad -\frac{1}{2} - iX, \quad -\frac{1}{2} + iX, \quad \frac{1}{10} + iX.$$

Используя (7) и (60) видим, что вклад интеграла из (61) оценивается величиной $O(N^{-1/100})$. Таким образом, получаем

$$\Sigma(n) = \frac{\pi}{4} \mathcal{N}(0) + O(N^{-1/100}). \quad (62)$$

Заметим, что из (28), (29), (51) и (59) следует

$$(\log L)^{-5} \ll \mathcal{N}(0) \ll (\log L)^5. \quad (63)$$

Тогда, если

$$M(n) = 2\pi^2 \sqrt{n} \xi_n \mathcal{N}(0), \quad (64)$$

то в силу (48), (49), (50), (53), (54) и (62) имеем

$$E_1(N) \ll N^{3/2} L^{-10}. \quad (65)$$

7. Итак, из (52), (63) и (64) получаем неравенство (8). С другой стороны, в силу (15), (43), (47) и (65) выполнена оценка (10).

Этим заканчивается доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L.-K. Hua, “Some results in the additive prime number theory”, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, **9** (1938), 68–80.
- [2] D. I. Tolev, “Additive problems with prime numbers of special type”, *Acta Arith.*, **96**:1 (2000), 53–88; “Corrigendum”, *Acta Arith.*, **105**:2 (2002), 205.
- [3] Ю. В. Линник, “Асимптотическая формула в аддитивной проблеме Гарди–Литтльвуда”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **24**:5 (1960), 629–706.
- [4] C. Hooley, “On the representation of a number as the sum of two squares and a prime”, *Acta Math.*, **97** (1957), 189–210.
- [5] Ю. В. Линник, *Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах*, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1961.
- [6] К. Хооли, *Применения методов решета в теории чисел*, Наука, М., 1987.
- [7] K. Matomäki, “The binary Goldbach problem with one prime of the form $p = k^2 + l^2 + 1$ ”, *J. Number Theory*, **128**:5 (2008), 1195–1210.
- [8] D. I. Tolev, “The binary Goldbach problem with arithmetic weights attached to one of the variables”, *Acta Arith.*, **142**:2 (2010), 169–178.
- [9] D. I. Tolev, “The ternary Goldbach problem with arithmetic weights attached to two of the variables”, *J. Number Theory*, **130**:2 (2010), 439–457.
- [10] Р. Вон, *Метод Харди–Литтльвуда*, Мир, М., 1985.
- [11] A. Ghosh, “The distribution of αp^2 modulo 1”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **42**:2 (1981), 252–269.
- [12] J. Brüdern, É. Fouvry, “Lagrange’s four squares theorem with almost prime variables”, *J. Reine Angew. Math.*, **454** (1994), 59–96.
- [13] A. A. Karatsuba, *Complex Analysis in Number Theory*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

А. Киркорян

Sofia University St. Kliment Ohridski, Болгария

E-mail: logaritym@abv.bg

Поступило

24.11.2009

Д. Толев

Sofia University St. Kliment Ohridski, Болгария

E-mail: dtolev@fmi.uni-sofia.bg