Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Королёв, Короткие суммы Kloostermana с весами,
Матем. заметки, 2010, том 88, выпуск 3, 415–427

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8814>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:06:16

Короткие суммы Kloostermana с весами

М. А. Королёв

В статье получена новая оценка суммы Kloostermana с весом, число слагаемых в которой существенно меньше любой сколь угодно малой фиксированной степени модуля.

Библиография: 10 названий.

*Светлой памяти моего Учителя
профессора Анатолия Алексеевича Карацубы*

В настоящей статье продолжены исследования, начатые автором в [1] и основанные на методе Карацубы оценок сумм Kloostermana специального вида (см. [2]–[7]). Цель настоящей работы состоит в получении нетривиальных оценок коротких сумм Kloostermana с весами, т.е. сумм вида

$$S(x) = \sum_{n \leq x} f(n) \exp\left(2\pi i \frac{an^* + bn}{m}\right), \quad (1)$$

где m, a, b – целые числа, $(n, m) = 1$, $nn^* \equiv 1 \pmod{m}$, $f(n)$ – мультипликативная функция, а x мало по сравнению с m .

Чтобы сформулировать основные результаты работы, введем следующие обозначения:

- m – простое число, $m > m_0$;
- $k \geq 1$ – фиксированное целое число;
- $\tau_k(n)$ обозначает число решений уравнения $x_1 \cdots x_k = n$ в натуральных числах $x_1, \dots, x_k$; $\tau_1(n) = 1$, $\tau(n) = \tau_2(n)$;
- $r(n) = \sum_{d|n} \chi(d)$, χ – неглавный характер по модулю 4;
- $\varphi(n)$ – функция Эйлера, h, λ – фиксированные целые числа, $h \geq 3$, $1 \leq \lambda \leq \varphi(h)$;
- l_j , $j = 1, \dots, \lambda$, – целые числа с условием $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_\lambda < h$, взаимно простые с h ;
- $b(n) = b(n; h; l_1, \dots, l_\lambda)$ равно единице, если все простые делители n содержатся среди прогрессий $p \equiv l_j \pmod{h}$, $j = 1, \dots, \lambda$, и равно нулю в противном случае;
- $\mu(n)$ – функция Мёбиуса;
- $f(n)$ везде далее обозначает любую из функций $\tau_k(n)$, $r(n)$, $b(n)$, $\mu^2(n)$;
- символами $p, p_1, \dots, q, q_1, \dots$ обозначаются простые числа;

- $\pi(x)$ – количество простых чисел $\leq x$;
- постоянные в знаках O и $\ll$, а также постоянные с индексом “0” ($m_0, H_0, \dots$) зависят лишь от f .

Основным результатом статьи является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(a, m) = 1$, и пусть $\exp(c_0(\ln m)^{4/5}(\ln \ln m)^{1/5}) \leq x \leq m^{4/7}$; тогда для тригонометрической суммы (1) имеет место оценка $S(x) \ll F(x)\Delta$, где

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n), \quad \Delta = \left(\frac{(\ln m)^{4/5}}{\ln x} (\ln \ln m)^{1/5} \right)^{5\alpha/22} \ln \ln m,$$

причем $\alpha = k$ для $f(n) = \tau_k(n)$, $\alpha = \lambda/\varphi(h)$ для $f(n) = b(n)$ и $\alpha = 1$ в оставшихся случаях.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $f(n) = \tau_k(n)$ обнаруживается интересный эффект: с ростом k понижающий множитель Δ убывает. Например, при $x = m^\varepsilon$ (ε – сколь угодно малое фиксированное число, $\varepsilon > 0$), задавшись сколь угодно большим постоянным A , можно указать число $k_1 = k_1(A, \varepsilon)$ такое, что при любом фиксированном $k \geq k_1$ будет верна оценка: $|S(x)| < F(x)(\ln m)^{-A}$.

Обобщив теорему 1 на случай $(a, m) = d > 1$ (соответствующие рассуждения см., например, в [1]), можно показать, что имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(a, m) = 1$ и пусть $\exp((\ln m)^{4/5}(\ln \ln m)^9) \leq x \leq m^{4/7}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \tau_k(n) \left\{ \frac{an^* + bn}{m} \right\} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n \leq x} \tau_k(n) \right) (1 + O(\Delta_1)), \\ \sum_{n \leq x} b(n) \left\{ \frac{an^* + bn}{m} \right\} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n \leq x} b(n) \right) (1 + O(\Delta_1)), \\ \sum_{n \leq x} \mu^2(n) \left\{ \frac{an^* + bn}{m} \right\} &= \frac{3x}{\pi^2} (1 + O(\Delta_1)), \\ \sum_{0 < u^2 + v^2 \leq x} \left\{ \frac{a(u^2 + v^2)^* + b(u^2 + v^2)}{m} \right\} &= \frac{\pi x}{2} (1 + O(\Delta_1)), \end{aligned}$$

где

$$\Delta_1 = \left(\frac{(\ln m)^{4/5}}{\ln x} (\ln \ln m)^9 \right)^{5\alpha/22}.$$

(Для доказательства последней формулы нужно заметить, что число представлений n суммой двух квадратов целых чисел равно $4r(n)$).

Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. Пусть $H_0 < H \leq \sqrt[3]{x}$, и пусть $F(x; H)$ обозначает сумму значений $f(n)$ по числам $n \leq x$, которые делятся на квадрат целого числа, большего H . Тогда $F(x; H) \ll F(x)H^{-1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(n) = \tau_k(n)$. Из неравенств $\tau_k(uv) \leq \tau_k(u)\tau_k(v)$, $\tau_k(n) \ll \sqrt[4]{n}$ и $F(x) \asymp x(\ln x)^{k-1}$ заключаем

$$\begin{aligned} F(x; H) &= \sum_{c^2 u \leq x, c > H} \tau_k(c^2 u) \leq \sum_{H < c \leq \sqrt{x}} \tau_k(c^2) \sum_{u \leq x/c^2} \tau_k(u) \\ &\ll \sum_{H < c \leq \sqrt{x}} \tau_k(c^2) \frac{x}{c^2} (\ln x)^{k-1} \ll x(\ln x)^{k-1} \sum_{c > H} \frac{\sqrt{c}}{c^2} \ll F(x) H^{-1/2}. \end{aligned}$$

Если $f(n) = r(n)$ или $f(n) = \mu^2(n)$, то искомая оценка следует из неравенств $r(n) \leq \tau(n)$, $\mu^2(n) \leq \tau_1(n)$ и доказанного выше. Наконец, в случае $f(n) = b(n)$, полагая $\delta = 1 - \lambda/\varphi(h)$ и замечая, что $F(x) \asymp x(\ln x)^{-\delta}$ (см. [8]), находим

$$\begin{aligned} F(x; H) &\leq \sum_{H < c \leq \sqrt{x}} \sum_{u \leq x/c^2} b(u) \leq \sum_{H < c \leq \sqrt[3]{x}} \sum_{u \leq x/c^2} b(u) + \sum_{\sqrt[3]{x} < c \leq \sqrt{x}} \sum_{u \leq x/c^2} 1 \\ &\ll \sum_{H < c \leq \sqrt[3]{x}} \frac{x}{c^2} \left(\ln \frac{x}{c^2} \right)^{-\delta} + \sum_{\sqrt[3]{x} < c \leq \sqrt{x}} \frac{x}{c^2} \ll x(\ln x)^{-\delta} H^{-1} + x^{2/3} \ll F(x) H^{-1/2}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $x > x_0$, $Q = \exp(\ln x / \ln \ln x)$, и пусть $N(x)$ обозначает сумму значений $f(n)$ по числам n , $n \leq x$, все простые делители которых не превосходят Q . Тогда $N(x) \ll F(x) \exp(-0.2(\ln \ln x) \ln \ln \ln x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n(x)$ – число слагаемых в $N(x)$, то в силу неравенства Коши $N(x) \leq \sqrt{n(x)} \sqrt{F_1(x)}$, где

$$F_1(x) = \sum_{n \leq x} f^2(n).$$

Согласно [9; с. 180]

$$n(x) < x \exp \left(-\frac{\ln x}{\ln Q} \ln \ln \ln Q + 2 \ln \ln Q \right) < x \exp(-0.5(\ln \ln x) \ln \ln \ln x).$$

Теперь искомая оценка следует из неравенств $F(x) \leq F_1(x)$,

$$\begin{aligned} F_1(x) &\ll x(\ln x)^{k^2-1}, & \text{если } f(n) &= \tau_k(n), \\ F_1(x) &\leq \sum_{n \leq x} \tau^2(n) \ll x(\ln x)^3, & \text{если } f(n) &= r(n), \\ F_1(x) &\ll x(\ln x)^{-\delta}, \quad \delta = 1 - \lambda/\varphi(h), & \text{если } f(n) &= b(n), \\ F_1(x) &\ll x, & \text{если } f(n) &= \mu^2(n). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $r \geq 0$ – целое число, A – произвольное конечное множество простых чисел, и пусть w принимает значения, являющиеся произведениями r попарно различных простых чисел из A . Тогда имеет место неравенство

$$\sum_w \frac{f(w)}{w} \leq \frac{1}{r!} \left(\sum_{p \in A} \frac{f(p)}{p} \right)^r.$$

Доказательство этого утверждения для частного случая $f(p) = 1$ см. в [1] (также см. [10; с. 130, решение вопроса 24 к главе II]). В общем случае доказательство проводится аналогично.

ЛЕММА 4. Пусть A – произвольное конечное множество простых чисел и

$$T(x; A) = \sum'_{n \leq x} \frac{f(n)}{n},$$

где штрих означает, что $n = 1$ либо n является произведением различных простых чисел из множества A . Тогда справедливо неравенство

$$T(x; A) \leq \exp\left(\sum_{p \in A} \frac{f(p)}{p}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T_s – та часть суммы $T(x; A)$, что отвечает числам n , состоящим из s различных простых сомножителей: $n = p_1 \cdots p_s$, $p_1 < \cdots < p_s$ (в случае $s = 0$ сумма T_s состоит из единственного слагаемого, отвечающего $n = 1$). Согласно лемме 3

$$T_s = \sum'_{p_1 \cdots p_s \leq x} \frac{f(p_1 \cdots p_s)}{p_1 \cdots p_s} \leq \frac{1}{s!} \left(\sum_{p \in A} \frac{f(p)}{p} \right)^s.$$

Следовательно,

$$T(x; A) = \sum_{s \geq 0} T_s \leq \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{s!} \left(\sum_{p \in A} \frac{f(p)}{p} \right)^s = \exp\left(\sum_{p \in A} \frac{f(p)}{p}\right).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $y_0 < y < x$ и пусть $\Phi(x, y)$ – сумма значений $f(n)$ по бесквадратным числам n , $n \leq x$, все простые делители которых $> y$. Тогда справедливо неравенство

$$\Phi(x, y) \ll \frac{x}{\ln y} \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right)^\alpha,$$

где α – величина, определенная в условии теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через A промежуток $(y, x]$. Числа n , отвечающие слагаемым суммы $\Phi(x, y)$, записываются в виде $n = wp$, где p – простое число, $p \in A$, а $w = 1$ либо является произведением различных простых чисел из A , меньших p . Замечая, что $x/w \geq n/w = p > y$, будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \sum_{wp \leq x} f(wp) \leq \sum_{w \leq x/y} f(w) \sum_{p \leq x/w} f(p) \ll \sum_{w \leq x/y} f(w) \pi\left(\frac{x}{w}\right) \\ &\ll \sum_{w \leq x/y} f(w) \frac{x}{w} \left(\ln \frac{x}{w} \right)^{-1} \ll \frac{x}{\ln y} \sum_{w \leq x} \frac{f(w)}{w}. \end{aligned}$$

Оценивая последнюю сумму с помощью леммы 4, получим

$$\Phi(x, y) \ll \frac{xe^\sigma}{\ln y}, \quad \sigma = \sum_{p \in A} \frac{f(p)}{p}.$$

Если $f(n) = \tau_k(n)$, то $f(p) = k$ и, следовательно,

$$\sigma = k \sum_{y < p \leq x} \frac{1}{p} = \alpha(\ln \ln x - \ln \ln y) + O\left(\frac{1}{\ln y}\right).$$

Так как для бесквадратного n всегда $\mu^2(n) = \tau_1(n)$, полученное выше равенство верно и для $f(n) = \mu^2(n)$. Если $f(n) = r(n)$, то $r(p) = 2$, если $p \equiv 1 \pmod{4}$, $r(p) = 0$, если $p \equiv 3 \pmod{4}$, так что

$$\begin{aligned} \sigma &= 2 \sum_{\substack{y < p \leq x \\ p \equiv 1 \pmod{4}}} \frac{1}{p} = 2 \left(\frac{1}{2} \ln \ln x - \frac{1}{2} \ln \ln y + O\left(\frac{1}{\ln y}\right) \right) \\ &= \alpha(\ln \ln x - \ln \ln y) + O\left(\frac{1}{\ln y}\right). \end{aligned}$$

Наконец, если $f(n) = b(n)$, то

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{j=1}^{\lambda} \sum_{\substack{y < p \leq x \\ p \equiv l_j \pmod{h}}} \frac{1}{p} = \sum_{j=1}^{\lambda} \left(\frac{1}{\varphi(h)} \ln \ln x - \frac{1}{\varphi(h)} \ln \ln y + O\left(\frac{1}{\ln y}\right) \right) \\ &= \frac{\lambda}{\varphi(h)} (\ln \ln x - \ln \ln y) + O\left(\frac{1}{\ln y}\right) = \alpha(\ln \ln x - \ln \ln y) + O\left(\frac{1}{\ln y}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, в каждом из случаев

$$\Phi(x, y) \ll \frac{x}{\ln y} \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right)^\alpha.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть m, l, s – целые числа, $s \geq l \geq 3$, X, X_1, Y, Y_1 удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} l < X < X_1 \leq 4X, \quad lX_1^{2l-1} < m, \quad X_1 \geq 2X, \\ s < Y < Y_1 \leq 4Y, \quad sY_1^{2s-1} < m, \quad Y_1 \geq 2Y, \end{aligned}$$

a, b целые, причем $(a, m) = d \geq 1$. Пусть, далее, $\xi(x)$ и $\eta(y)$ – произвольные комплекснозначные функции, не равные тождественно нулю, и пусть

$$\xi = \max_{X < p \leq X_1} |\xi(p)|, \quad \xi_0 = \sum_{X < p \leq X_1} |\xi(p)|, \quad \eta = \max_{Y < q \leq Y_1} |\eta(q)|, \quad \eta_0 = \sum_{Y < q \leq Y_1} |\eta(q)|.$$

Тогда для суммы

$$K = \sum_{\substack{X < p \leq X_1 \\ (p, m) = 1}} \sum_{\substack{Y < q \leq Y_1 \\ (q, m) = 1}} \xi(p) \eta(q) \exp\left(2\pi i \frac{ap^*q^* + bpq}{m}\right),$$

выполняется оценка $|K| < \xi_0 \eta_0 \Delta$, где

$$\Delta = 2.2s^{1/(2l)}(\xi_0^{-1}\xi\sqrt{X})^{1/s}(\eta_0^{-1}\eta\sqrt{Y})^{1/l}(mdY)^{1/(2ls)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Практически дословно повторяя рассуждения Карацубы из [3] и [7], приходим к оценке $|K| \leq \xi_0 \eta_0 \Delta'$, где

$$\Delta' = (sdmY_1)^{1/(2ls)}(\xi_0^{-1}\xi)^{1/s}(\eta_0^{-1}\eta)^{1/l}(I_l(X)I_s(Y))^{1/(2ls)},$$

а $I_l(X)$ обозначает число решений сравнения

$$p_1^* + \dots + p_l^* \equiv p_{l+1}^* + \dots + p_{2l}^* \pmod{m}$$

в простых числах $p_1, \dots, p_{2l}$ из промежутка $(X, X_1]$ ($I_s(Y)$ определяется аналогично). Пользуясь неравенствами $I_l(X) \leq l!(\pi(X_1))^l$, $I_s(Y) \leq s!(\pi(Y_1))^s$, также установленными Карацубой (см. [3]), находим

$$\begin{aligned} \Delta' &\leq (4sdmY)^{1/(2ls)}(l!s!)^{1/(2ls)}(\xi_0^{-1}\xi)^{1/s}(\eta_0^{-1}\eta)^{1/l}((4X)^l(4Y)^s)^{1/(2ls)} \\ &= 2^{1/l+1/s}(l!s!)^{1/(2ls)}(4s)^{1/(2ls)}(dmY)^{1/(2ls)}(\xi_0^{-1}\xi\sqrt{X})^{1/s}(\eta_0^{-1}\eta\sqrt{Y})^{1/l}. \end{aligned}$$

Замечая, что $l! \leq l^l$, $s! \leq s^s$, будем иметь

$$\begin{aligned} 2^{1/l+1/s}(l!s!)^{1/(2ls)}(4s)^{1/(2ls)} &\leq 2^{2/3}(l^l s^s)^{1/(2ls)}(4s)^{1/(6s)} \leq 2^{2/3}l^{1/(2s)}s^{1/(2l)}12^{1/18} \\ &\leq 2^{2/3} \cdot 3^{1/6} \cdot 12^{1/18}s^{1/2l} < 2.2s^{1/(2l)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть m – простое число, $(a, m) = 1$, и пусть помимо условий леммы 6 числа X и Y удовлетворяют неравенствам: $X > X_0$, $Y > Y_0$. Тогда для суммы

$$K = \sum_{X < p \leq X_1} \sum_{Y < q \leq Y_1} f(p)f(q) \exp\left(2\pi i \frac{ap^*q^* + bpq}{m}\right)$$

справедлива оценка $|K| < XY\Delta_1$, где

$$\Delta_1 = s^{1/(2l)}X^{-1/(2s)}Y^{-1/(2l)+1/(2ls)}m^{1/(2ls)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, например, $f(n) = \tau_k(n)$. Тогда, полагая в лемме 6 $\xi(n) = \eta(n) = f(n)$, $d = 1$, будем иметь

$$\xi = \eta = k, \quad \xi_0 = k(\pi(X_1) - \pi(X)), \quad \eta_0 = k(\pi(Y_1) - \pi(Y)),$$

так что

$$\frac{k}{2} \frac{X}{\ln X} < \xi_0 < 4k \frac{X}{\ln X}, \quad \frac{k}{2} \frac{Y}{\ln Y} < \eta_0 < 4k \frac{Y}{\ln Y},$$

откуда

$$\begin{aligned} |K| &\leq \xi_0 \eta_0 \Delta < \frac{4kX}{\ln X} \frac{4kY}{\ln Y} 2.2s^{1/(2l)} \left(\frac{2 \ln X}{\sqrt{X}}\right)^{1/s} \left(\frac{2 \ln Y}{\sqrt{Y}}\right)^{1/l} (mY)^{1/(ls)} \\ &< XYs^{1/(2l)}X^{-1/(2s)}Y^{-1/(2l)+1/(2ls)}m^{1/(2ls)} = XY\Delta_1. \end{aligned}$$

Подобным образом искомая оценка получается и в оставшихся случаях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Оценка суммы $S(x)$ проводится в несколько шагов. На каждом этапе из числа слагаемых $S(x)$, оставшихся после предыдущего шага, выделяется некоторая их часть, которая затем оценивается тривиально. Оставшиеся после последнего шага такого “просеивания” члены $S(x)$ оказываются возможным сгруппировать в суммы, к которым применима оценка Карацубы из леммы 6.

Шаг 1. Положим $H = e^{2\sqrt{\ln x}}$ и отнесем к сумме S_1 те слагаемые $S(x)$, что отвечают числам n , делящимся на квадраты целых чисел, больших H . По лемме 1 $S_1 \ll F(x)e^{-\sqrt{\ln x}}$. Заметим, что оставшиеся слагаемые $S(x)$ отвечают числам n вида $n = c^2d$, где $1 \leq c \leq H$, а d – бесквадратное число, $\mu(d) \neq 0$.

Шаг 2. Положим $Q = \exp(\ln x / \ln \ln x)$ и отнесем к сумме S_2 те из оставшихся после шага 1 слагаемых $S(x)$, что отвечают числам n , все простые делители которых не превосходят Q . Согласно лемме 2 $S_2 \ll F(x) \exp(-(1/5)(\ln \ln x) \ln \ln \ln x)$. Следовательно, для оставшихся слагаемых числа d из представления $n = c^2d$ имеют, по меньшей мере, один простой делитель, больший Q .

Прежде чем перейти к шагу 3, определим целые числа l_1, l_2, s_1 и s_2 равенствами

$$\begin{aligned} l_1 &= \left\lceil \frac{(\ln m)^{7/11}}{2(\ln x)^{6/11}(C \ln \ln m)^{1/11}} \right\rceil + 1, & l_2 &= \left\lceil \frac{(\ln m)^{3/11}}{2(\ln x)^{1/11}(C \ln \ln m)^{2/11}} \right\rceil, \\ s_1 &= \left\lceil \frac{4(\ln m)^{6/11}}{(\ln x)^{2/11}(C \ln \ln m)^{4/11}} \right\rceil + 1, & s_2 &= \left\lceil \frac{4(\ln m)^{2/11}(\ln x)^{3/11}}{(C \ln \ln m)^{5/11}} \right\rceil, \end{aligned}$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная, зависящая лишь от f , точное значение которой будет выбрано ниже. Несложно убедиться, что так определенные числа удовлетворяют при $m > m_0$ и $\exp(12(\ln m)^{4/5}(C \ln \ln m)^{1/5}) \leq x \leq m^{4/7}$ условиям

$$(\ln m)^{1/12} < l_1 < l_2 < (\ln m)^{1/3}, \quad s_1 < s_2 < \frac{1}{5}(\ln m)^{1/2}, \quad 12l_2^2 < s_1. \quad (2)$$

Для целого l положим

$$U_l = m^{1/(2l-1)-1/(4l^2-1)}, \quad V_l = \frac{1}{8} m^{1/(2l-1)}.$$

Заметим, наконец, что при любом c и бесквадратном d имеет место неравенство $f(c^2d) \leq f(c^2)f(d)$. Действительно, для $f(n) = b(n)$, $f(n) = \mu^2(n)$ оно очевидно; для $f(n) = \tau_k(n)$ оно является следствием неравенства $\tau_k(uv) \leq \tau_k(u)\tau_k(v)$; наконец, для $f(n) = r(n)$ его доказательство сводится к проверке при любом простом p неравенства $r(p^{2\nu+1}) \leq r(p^{2\nu})r(p)$, которое также очевидно.

Шаг 3. Из числа оставшихся слагаемых к сумме S_3 отнесем те, что отвечают числам n , не имеющим простых делителей из объединения B_1 промежутков $(U_l, V_l]$, $l = l_1, l_1 + 1, \dots, l_2$. Обозначая через A промежуток $(Q, x]$, а через A_1 – объединение промежутков $(1, U_{l_2}]$, $(V_{l_1+1}, U_l]$, $l = l_1, l_1 + 1, \dots, l_2 - 1$, $(V_{l_1}, Q]$, и замечая, что

$$V_{l_2} > V_{s_2+1} > m^{1/(3s_2)} > e^{2\sqrt{\ln m}} > H,$$

несложно заключить, что $n = c^2uv$, где $1 \leq c \leq H$, $\mu(uv) \neq 0$, причем $u = 1$ либо все простые делители u принадлежат A_1 , а все простые делители v принадлежат A .

Пользуясь оценкой леммы 5 и ее обозначениями, находим

$$\begin{aligned} |S_3| &\leq \sum_{c^2 uv \leq x} f(c^2 uv) \leq \sum_{c \leq H} f(c^2) \sum_{u \leq x/(c^2 Q)} f(u) \sum_{Q < v \leq x/(c^2 u)} f(v) \\ &\leq \sum_{c \leq H} f(c^2) \sum_{u \leq x/(c^2 Q)} f(u) \Phi\left(\frac{x}{c^2 u}; Q\right) \ll \sum_{c \leq H} f(c^2) \sum_{u \leq x/(c^2 Q)} f(u) \frac{x}{c^2 u} \frac{(\ln x)^\alpha}{(\ln Q)^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

Поскольку ряд $\sum_{c=1}^{+\infty} f(c^2)/c^2$ сходится, из леммы 4 следует, что

$$|S_3| \ll \frac{x(\ln x)^\alpha}{(\ln Q)^{\alpha+1}} \left(\sum_{c \leq H} \frac{f(c^2)}{c^2} \right) \sum_{u \leq x} \frac{f(u)}{u} \ll \frac{x(\ln x)^\alpha}{(\ln Q)^{\alpha+1}} e^{\sigma_1}, \quad \sigma_1 = \sum_{p \in A_1} \frac{f(p)}{p}.$$

Рассуждая так же, как и при вычислении суммы по $y < p \leq x$ при доказательстве леммы 5, для произвольного l с условием $l_1 \leq l \leq l_2$ находим

$$\begin{aligned} \sum_{V_{l+1} < p \leq U_l} \frac{f(p)}{p} &= \alpha \left(\ln \ln U_l - \ln \ln V_{l+1} + O\left(\frac{1}{\ln V_{l+1}}\right) \right) \\ &= \alpha \left(\ln \ln(m^{1/(2l-1)-1/(4l^2-1)}) - \ln \ln\left(\frac{1}{8}m^{1/(2l+1)}\right) \right) + O\left(\frac{l}{\ln m}\right) \\ &= \alpha \left(\ln\left(\frac{1}{2l-1} - \frac{1}{4l^2-1}\right) - \ln \frac{1}{2l+1} - \ln\left(1 - \frac{(2l+1)\ln 8}{\ln m}\right) \right) \\ &\quad + O\left(\frac{l}{\ln m}\right) \\ &= \alpha \ln \frac{2l}{2l-1} + O\left(\frac{l}{\ln m}\right) = \frac{\alpha}{2l} + O\left(\frac{1}{l^2}\right) + O\left(\frac{l}{\ln m}\right). \end{aligned}$$

Так как $l \leq l_2 \leq (\ln m)^{1/3}$, то последнее слагаемое есть $O(l^{-2})$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{p \leq U_{l_2}} \frac{f(p)}{p} + \sum_{l=l_1}^{l_2-1} \sum_{V_{l+1} < p \leq U_l} \frac{f(p)}{p} + \sum_{V_{l_1} < p \leq Q} \frac{f(p)}{p} \\ &= \alpha \left(\ln \ln U_{l_2} + \sum_{l=l_1}^{l_2} \frac{1}{2l} + \ln \ln Q - \ln \ln V_{l_1} \right) + O(1) \\ &= \alpha \left(\ln \ln U_{l_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{l_2}{l_1} + \ln \ln Q - \ln \ln V_{l_1} \right) + O(1), \end{aligned}$$

откуда

$$|S_3| \ll \frac{x(\ln x)^\alpha}{(\ln Q)^{\alpha+1}} \left(\frac{\ln U_{l_2}}{\ln V_{l_1}} \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \ln Q \right)^\alpha \ll \frac{x(\ln x)^\alpha}{\ln Q} \left(\sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \right)^\alpha \ll F(x) \left(\sqrt{\frac{l_2}{l_1}} \right)^\alpha \ln \ln x.$$

Шаг 4. Отнесем к сумме S_4 те из оставшихся слагаемых, что отвечают числам n , не имеющим простых делителей из объединения B_2 промежутков $(V_{s+1}, V_s]$, $s = s_1, s_1 + 1, \dots, s_2$, или, что то же, из промежутка $(V_{s_2+1}, V_{s_1}]$. Ясно, что простые

делители таких чисел могут принадлежать лишь множествам A и A_2 , где, как и выше, $A = (Q, x]$, а A_2 – объединение промежутков $(1, V_{s_2+1}]$ и $(V_{s_1}, Q]$. Практически дословно повторяя рассуждения предыдущего шага, приходим к оценке

$$|S_4| \ll \frac{x(\ln x)^\alpha}{(\ln Q)^{\alpha+1}} e^{\sigma_2}, \quad \sigma_2 = \sum_{p \in A_2} \frac{f(p)}{p} = \alpha(\ln \ln V_{s_2+1} + \ln \ln Q - \ln \ln V_{s_1}) + O(1),$$

так что

$$|S_4| \ll \frac{x(\ln x)^\alpha}{(\ln Q)^{\alpha+1}} \left(\frac{\ln V_{s_2+1}}{\ln V_{s_1}} \ln Q \right)^\alpha \ll \frac{x(\ln x)^\alpha}{\ln Q} \left(\frac{s_1}{s_2} \right)^\alpha \ll F(x) \left(\frac{s_1}{s_2} \right)^\alpha \ln \ln x.$$

На этом шаге “отсев” завершается.

Оставшиеся слагаемые отнесем к сумме S_5 . Все числа n , им отвечающие, имеют вид $n = c^2 uvw$, где $1 \leq c \leq H$, $\mu(uvw) \neq 0$, все простые делители u принадлежат множеству B_1 , все простые делители v принадлежат множеству B_2 , а w , напротив, не имеет простых делителей из B_1 и B_2 .

Группируя вместе те слагаемые S_5 , для которых числа u и v состоят, соответственно, из μ и ν простых сомножителей, сумму S_5 представим в виде

$$S_5 = \sum_{\mu \geq 1} \sum_{\nu \geq 1} S_5(\mu, \nu).$$

Полагая для краткости $\Phi(n) = \exp(2\pi i(an^* + bn)/m)$, находим

$$\begin{aligned} |S_5(\mu, \nu)| &= \left| \sum_{c^2 uvw \leq x} f(c^2 uvw) \Phi(c^2 uvw) \right| \\ &\leq \sum_{c \leq H} f(c^2) \sum_w f(w) \left| \sum_{uv \leq x/(c^2 w)} f(u) f(v) \Phi(c^2 uvw) \right|, \end{aligned}$$

где w пробегает возрастающую последовательность чисел, не имеющих простых делителей из B_1 и B_2 , $w \leq x(c^2 U_{l_2}^\mu V_{s_2+1}^\nu)^{-1}$. Пусть w фиксировано. Сравним внутреннюю сумму $S_5(\mu, \nu; w)$ по u и v с суммой $S'_5(\mu, \nu; w)$,

$$S'_5(\mu, \nu; w) = \frac{1}{\mu\nu} \sum_{u_1, v_1} \sum_{p, q} f(u_1) f(p) f(v_1) f(q) \Phi(c^2 u_1 p v_1 q w),$$

где u_1 и v_1 независимо друг от друга пробегает возрастающие последовательности чисел, которые являются произведениями $(\mu - 1)$ и $(\nu - 1)$ различных простых сомножителей из множеств B_1 и B_2 соответственно, а p и q независимо друг от друга и от u_1, v_1 принимают значения простых чисел из множеств B_1 и B_2 , причем $u_1 v_1 p q \leq x(c^2 w)^{-1}$.

Так как числа u и v , отвечающие слагаемым суммы $S_5(\mu, \nu; w)$, можно представить в виде произведений $u = u_1 p$, $(u_1, p) = 1$ и $v = v_1 q$, $(v_1, q) = 1$, ровно μ и ν способами, то всякое слагаемое этой суммы встретится в $S'_5(\mu, \nu; w)$ с коэффициентом 1. Кроме того, в $S'_5(\mu, \nu; w)$ содержатся слагаемые, для которых нарушено, по крайней мере, одно из условий $(u_1, p) = 1$, $(v_1, q) = 1$. Обозначая через $S''_5(\mu, \nu; w)$

вклад от таких слагаемых и полагая для них $u_1 = pu_2$, $v_1 = pv_2$, получим

$$|S_5''(\mu, \nu; w)| \leq \frac{1}{\mu\nu} \left(\sum_{p^2 qu_2 v_1 \leq x/(c^2 w)} f(pu_2) f(v_1) f(p) f(q) \right. \\ + \sum_{pq^2 u_1 v_2 \leq x/(c^2 w)} f(qv_2) f(u_1) f(p) f(q) \\ \left. + \sum_{p^2 q^2 u_2 v_2 \leq x/(c^2 w)} f(pu_2) f(qv_2) f(p) f(q) \right),$$

где в первой сумме $(q, v_1) = 1$, во второй — $(p, u_1) = 1$, и во всех суммах $(p, u_2) = (q, v_2) = 1$. Так как pu_2 — бесквадратное число, то, оценивая первую сумму, будем иметь

$$\sum_{p^2 qu_2 v_1 \leq x/(c^2 w)} f(pu_2) f(v_1) f(p) f(q) = \sum_{p^2 qu_2 v_1 \leq x/(c^2 w)} f^2(p) f(v_1 u_2 q).$$

Полагая $n = v_1 u_2 q$ и замечая, что число представлений заданного n в виде такого произведения не превосходит $\nu \leq \ln x$, получим

$$\sum_{p^2 qu_2 v_1 \leq x/(c^2 w)} f(pu_2) f(v_1) f(p) f(q) \\ \leq \ln x \sum_{p \in B_1} f^2(p) \sum_{p^2 n \leq x/(c^2 w)} f(n) \ll \ln x \sum_{p \in B_1} f^2(p) F\left(\frac{x}{p^2 c^2 w}\right) \\ \ll \frac{F(x)}{c^2 w} (\ln x)^2 \sum_{p \in B_1} \frac{f^2(p)}{p^2}.$$

Здесь мы воспользовались легко проверяемым неравенством

$$F\left(\frac{x}{t}\right) \ll \frac{F(x)}{t} \ln x, \quad 1 \leq t \leq \frac{1}{2} x.$$

Так как наименьшее простое число из множества B_1 оценивается снизу величиной $U_{l_2} > V_{s_2+1} > H$, то окончательно имеем

$$\sum_{p^2 qu_2 v_1 \leq x/(c^2 w)} f(pu_2) f(v_1) f(p) f(q) \ll \frac{F(x)}{c^2 w} (\ln x)^2 \sum_{p > H} \frac{1}{p^2} \ll \frac{F(x)}{c^2 w} \frac{(\ln x)^2}{H}.$$

Аналогично оцениваются и две оставшиеся суммы. Так находим

$$|S_5(\mu, \nu; w)| \leq \frac{1}{\mu\nu} |S_5'(\mu, \nu; w)| + |S_5''(\mu, \nu; w)| \ll \frac{1}{\mu\nu} |S_5'(\mu, \nu; w)| + \frac{F(x)}{c^2 w} \frac{(\ln x)^2}{H}.$$

Положим, далее

$$S_5'(\mu, \nu; w) = \sum_{u_1} \sum_{v_1} f(u_1) f(v_1) S_6,$$

где для фиксированных μ, ν, w, u_1 и v_1

$$S_6 = \sum_{pq \leq Z} f(p) f(q) \Phi(c^2 u_1 v_1 w p q), \quad Z = \left\lceil \frac{x}{c^2 u_1 v_1 w} \right\rceil.$$

Представим последнюю сумму в виде

$$\sum_{pq \leq Z} f(p)f(q) \exp\left(2\pi i \frac{a_1 p^* q^* + b_1 pq}{m}\right),$$

где $a_1 \equiv a(c^2 u_1 v_1 w)^* \pmod{m}$, $b_1 \equiv bc^2 u_1 v_1 w \pmod{m}$. Далее, области изменения p и q в S_6 разобьем на промежутки вида $X < p \leq X_1$, $Y < q \leq Y_1$, где $2X \leq X_1 < 4X$, $2Y \leq Y_1 < 4Y$, $XY \leq Z$, и так, чтобы для каждой пары промежутков $(X, X_1]$ и $(Y, Y_1]$ можно было указать целые числа l и s с условиями

$$l_1 \leq l \leq l_2, \quad U_l \leq X < X_1 \leq V_l, \quad s_1 \leq s \leq s_2, \quad V_{s+1} < Y < Y_1 \leq V_s. \quad (3)$$

Тогда S_6 разобьется на $< (\ln m)^3$ сумм $S_6(X, Y)$ вида

$$\sum_{X < p \leq X_1} \sum_{\substack{Y < q \leq Y_1 \\ pq \leq Z}} f(p)f(q) \exp\left(2\pi i \frac{a_1 p^* q^* + b_1 pq}{m}\right).$$

Рассмотрим одну из таких сумм, для которой при некоторых l и s выполнены условия (3). Избавляясь стандартным образом от ограничения $pq \leq Z$, будем иметь

$$\begin{aligned} S_6(X, Y) &= \sum_{X < p \leq X_1} \sum_{Y < q \leq Y_1} \left(\frac{1}{m} \sum_{|d| < m/2} \sum_{z=1}^Z e^{2\pi i d(pq-z)/m} \right) \\ &\quad \times f(p)f(q) \exp\left(2\pi i \frac{a_1 p^* q^* + b_1 pq}{m}\right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{|d| < m/2} \left(\sum_{z=1}^Z e^{-2\pi i dz/m} \right) K_d \ll \sum_{|d| < m/2} \frac{|K_d|}{|d| + 1}, \end{aligned}$$

где

$$K_d = \sum_{X < p \leq X_1} \sum_{Y < q \leq Y_1} f(p)f(q) \exp\left(2\pi i \frac{a_1 p^* q^* + (b_1 + d)pq}{m}\right).$$

Согласно следствию из леммы 6, $|K_d| < XY \Delta_1$, где

$$\Delta_1 = s^{1/(2l)} X^{-1/(2s)} Y^{-1/(2l)+1/(2ls)} m^{1/(2ls)}.$$

Из неравенств (2) заключаем

$$s^{1/(2l)} \leq s_2^{1/(2l_1)} < \exp\left(\frac{\ln s_2}{2(\ln m)^{1/12}}\right) < \exp\left(\frac{\ln \ln m}{4(\ln m)^{1/12}}\right) < 2.$$

Далее, из условий (3) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\leq 2U_l^{-1/(2s)} V_{s+1}^{-1/(2l)+1/(2ls)} m^{1/(2ls)} \\ &= 2m^{-(1/(2l-1)-1/(4l^2-1))/(2s)} \left(\frac{1}{8} m^{1/(2s+1)}\right)^{-1/(2l)+1/(2ls)} m^{1/(2ls)} \\ &< 3m^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{s - 6l^2 + 2}{2sl(4l^2 - 1)(2s + 1)}. \end{aligned}$$

Согласно (2) имеем $s \geq s_1 \geq 12l_2^2 \geq 12l^2$, откуда $s - 6l^2 + 2 > 0.5s$ и, следовательно,

$$\gamma > \frac{s}{4sl \cdot 4l^2(2s+1)} > \frac{1}{33sl^3} \geq \frac{1}{33s_2l_2^3} \geq \frac{2C \ln \ln m}{33 \ln m} > \frac{C \ln \ln m}{17 \ln m}.$$

Таким образом, $\Delta_1 < 3(\ln m)^{-C/17} = \Delta_2$, откуда

$$S_6(X, Y) \ll XY \Delta_2 \ln m \ll Z \Delta_2 \ln m, \quad S_6 \ll Z \Delta_2 (\ln m)^4 \ll \frac{x \Delta_2 (\ln m)^4}{c^2 u_1 v_1 w}.$$

Переходя к оценке суммы S_5 , последовательно получим

$$\begin{aligned} S_5(\mu, \nu; w) &\ll \frac{x \Delta_2 (\ln m)^4}{c^2 w} \sum_{u_1} \frac{f(u_1)}{u_1} \sum_{v_1} \frac{f(v_1)}{v_1} + \frac{F(x) (\ln x)^2}{c^2 w H}, \\ S_5(\mu, \nu) &\ll x \Delta_2 (\ln m)^4 \sum_{c \leq H} \frac{f(c^2)}{c^2} \sum_w \frac{f(w)}{w} \sum_{u_1} \frac{f(u_1)}{u_1} \sum_{v_1} \frac{f(v_1)}{v_1} \\ &\quad + F(x) \frac{(\ln x)^3}{H} \sum_{c \leq H} \frac{1}{c^2}, \\ S_5 &\ll \sum_{\mu \geq 1} \sum_{\nu \geq 1} |S_5(\mu, \nu)| \ll x \Delta_2 (\ln m)^4 \left(\sum_{w \leq x} \frac{f(w)}{w} \right) \left(\sum_{u_1 \leq x} \frac{f(u_1)}{u_1} \right) \left(\sum_{v_1 \leq x} \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \\ &\quad + \frac{F(x)}{H} (\ln x)^5 \end{aligned}$$

(в последнем неравенстве мы учли, что наибольшие значения чисел μ, ν не превосходят $\ln x$). Оценивая каждую из сумм по w, u_1 и v_1 с помощью леммы 3, находим

$$\begin{aligned} S_5 &\ll x \Delta_2 (\ln m)^4 \exp \left(\sum_{\substack{p \notin B_1 \cup B_2 \\ p \leq x}} \frac{f(p)}{p} + \sum_{p \in B_1} \frac{f(p)}{p} + \sum_{p \in B_2} \frac{f(p)}{p} \right) + \frac{F(x)}{H} (\ln x)^5 \\ &\ll x \Delta_2 (\ln m)^4 \exp \left(\sum_{p \leq x} \frac{f(p)}{p} \right) + F(x) H^{-1/2} \\ &\ll x \Delta_2 (\ln m)^4 \exp(\alpha \ln \ln x) + F(x) H^{-1/2} \\ &\ll x (\ln x)^\alpha \Delta_2 (\ln m)^4 + F(x) H^{-1/2} \ll F(x) (\ln m)^{5-C/17}. \end{aligned}$$

Суммируя оценки величин S_j , $1 \leq j \leq 5$, и замечая, что

$$\frac{s_1}{s_2} \asymp \frac{l_1}{l_2} \asymp \left(\frac{(\ln m)^{4/5}}{\ln x} (\ln \ln m)^{1/5} \right)^{5\alpha/22},$$

будем иметь

$$S(x) \ll F(x) \left(\left(\sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \right)^\alpha \ln \ln x + (\ln m)^{5-C/17} \right).$$

Наконец, беря $C = \alpha + 85$, окончательно находим

$$S(x) \ll F(x) \Delta, \quad \Delta = \left(\frac{(\ln m)^{4/5}}{\ln x} (\ln \ln m)^{1/5} \right)^{5\alpha/22} \ln \ln m.$$

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждения теорем 1 и 2 без существенных изменений переносятся на случаи $f(n) = \varphi(n)$, $f(n) = \sum_{d|n} d$ и т.д. Оценка вида $S(x) \ll x\Delta$, где Δ определено в условии теоремы 1 (с $\alpha = 1$), имеет место и для $f(n) = \mu(n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналоги теорем 1 и 2 могут быть доказаны и для случая составного m .

Автор выражает искреннюю признательность Мубаризу Гараеву, который внимательно ознакомился с рукописью данной работы и сделал ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Королёв, “Неполные суммы Клоостермана и их приложения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:6 (2000), 41–64.
- [2] А. А. Карацуба, “Распределение обратных величин в кольце вычетов по заданному модулю”, *Докл. РАН*, **333**:2 (1993), 138–139.
- [3] А. А. Карацуба, “Дробные доли специального вида функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:4 (1995), 61–80.
- [4] А. А. Карацуба, “Аналоги сумм Клоостермана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:5 (1995), 93–102.
- [5] А. А. Карацуба, “Суммы дробных долей специального вида функций”, *Докл. РАН*, **349**:3 (1996), 302.
- [6] А. А. Карацуба, “Аналоги неполных сумм Клоостермана и их приложения”, *Tatra Mt. Math. Publ.*, **11** (1997), 89–120.
- [7] А. А. Карацуба, “Двойные суммы Клоостермана”, *Матем. заметки*, **66**:5 (1999), 682–687.
- [8] E. Landau, “Bemerkungen zu Herrn D. N. Lehmer’s Abhandlung in Bd. 22 dieses Journals, S. 293–335”, *Amer. J. Math.*, **26**:3 (1904), 209–222.
- [9] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967.
- [10] И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*, Наука, М., 1981.

М. А. Королёв

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: hardy_ramanujan@mail.ru

Поступило

20.08.2009