Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. Лиу, Расширенные большие дуги в аддитивных задачах, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 3, 438–445

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8815>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 06:45:27

Расширенные большие дуги в аддитивных задачах

Ж. Лиу

Расширенные большие дуги в проблеме Варинга–Гольдбаха изучаются с помощью оценок большого решета для полиномов Дирихле и оценок тригонометрических сумм по простым числам.

Библиография: 6 названий.

Памяти Анатолия Алексеевича Карацубы

1. Введение. Проблема Варинга–Гольдбаха связана с представлением натуральных чисел суммами k -х степеней простых чисел. С помощью кругового метода число таких представлений может быть записано в виде некоторого интеграла по единичному отрезку, который в дальнейшем разбивается на большие и малые дуги. Можно ожидать, что для интеграла по большим дугам получится асимптотическая формула, в то время как вклад от интеграла по малым дугам окажется сравнительно небольшим. Новейшие продвижения в аддитивных задачах требуют, как правило, рассмотрения возможно более широких больших дуг. Таким образом, малые дуги становятся все более узкими, где можно ожидать получения более точных оценок. Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы показать, насколько широкими могут быть сделаны большие дуги с помощью новейших технических приемов.

Аддитивная задача, которую мы все время будем иметь в виду, состоит в том, чтобы для заданного натурального числа k указать такое положительное целое число $s = s(k)$, что любое достаточно большое положительное число представляется в виде

$$n = p_1^k + \cdots + p_s^k, \quad p_j \sim x, \quad j = 1, \dots, s, \quad (1.1)$$

где неизвестные p_j – простые числа, x – вещественное число, а запись $p \sim x$ означает, что $x < p \leq 2x$. Разумеется, параметр x должен быть связан с n некоторыми неравенствами, но этот вопрос мы проясним позже.

Пусть параметры P и Q удовлетворяют условиям $Q > 2P \geq 2$. Рассмотрим разбиение Фарея порядка Q единичного отрезка. Обычно число P выбирается много меньшим, чем Q . Большие дуги, грубо говоря, состоят из всех чисел единичного отрезка, которые близки к несократимым дробям a/q с малыми знаменателями: $q \leq P$. Более точно, пусть $1 \leq a \leq q \leq P$ и $(a, q) = 1$. Символом $\mathfrak{M}(a, b)$ будем обозначать интервал

$$\left[\frac{a}{q} - \frac{1}{qQ}, \frac{a}{q} + \frac{1}{qQ} \right].$$

Эти интервалы и называются *большими дугами*. Далее, символом $\mathfrak{M}$ будем обозначать объединение больших дуг:

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{q \leq P} \bigcup_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a,q)=1}} \mathfrak{M}(a, b). \quad (1.2)$$

Множество *малых дуг* $\mathfrak{m}$ определяется как дополнение к $\mathfrak{M}$ до всего отрезка $[0, 1]$. Таким образом, малые дуги состоят из чисел единичного отрезка, близких к несократимым дробям a/q с относительно большими знаменателями q . Для $\alpha \in [0, 1]$ положим

$$S(x; \alpha) = \sum_{p \sim x} (\ln p) e(p^k \alpha). \quad (1.3)$$

Тогда взвешенное число представлений n в виде (1.1) равно

$$\int_0^1 S^s(x; \alpha) e(-n\alpha) d\alpha = \left\{ \int_{\mathfrak{M}} + \int_{\mathfrak{m}} \right\} S^s(x; \alpha) e(-n\alpha) d\alpha. \quad (1.4)$$

Цель настоящей заметки можно сформулировать так: подобрать P насколько возможно большим так, чтобы для интеграла по $\mathfrak{M}$ в (1.4) была бы справедлива асимптотическая формула.

Здесь нам потребуется ввести несколько обозначений. Пусть k и s – те же, что в (1.1), и пусть N – большое число, которое может неограниченно расти. Мы потребуем, чтобы число n в (1.1) удовлетворяло неравенствам

$$N \leq n \leq \left(1 + \frac{1}{2s}\right) N. \quad (1.5)$$

Заметим, что в (1.5) мы допускаем возможность равенства $n = N$. Будем всюду предполагать, что

$$x^k \asymp N. \quad (1.6)$$

Ввиду (1.6) будем иметь $\ln x \asymp \ln N$; поэтому везде далее символ L мы станем использовать для обозначения как $\ln x$, так и $\ln N$. Иногда мы будем указывать и явное значение

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{2N}{s} \right)^{1/k}. \quad (1.7)$$

Тогда из (1.7) будет следовать, что $N/2^{k-1} \leq p_1^k + \dots + p_s^k$. Это означает, что если n лежит в промежутке (1.5), то возможно существование представления вида (1.1).

Чтобы сформулировать основное утверждение, предположим, что

$$\theta < \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } s = 5, \\ \frac{s}{s+4}, & \text{если } s \geq 6, \end{cases} \quad (1.8)$$

и обозначим

$$P = x^\theta, \quad Q = \frac{N}{PL^B}, \quad (1.9)$$

где θ удовлетворяет (1.8), а $B = B(A) > 0$ – достаточно большая постоянная, зависящая от некоторого параметра A . Поскольку наибольший интерес для нас представляет случай больших θ , можем считать, что θ близки к своим верхним границам, которые определяются неравенством (1.8).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $s \geq 5$, N – достаточно большое число, и пусть n и x удовлетворяют, соответственно, условиям (1.5) и (1.6). Пусть, далее, большие дуги $\mathfrak{M}$ определяются соотношением (1.2) с параметрами θ , P , Q из (1.8) и (1.9). Пусть, наконец, $A > 0$ – произвольное число. Тогда существует постоянная $B = B(A) > 0$ в (1.9) такая, что выполняется равенство

$$\int_{\mathfrak{M}} S^s(x; \alpha) e(-n\alpha) d\alpha = \mathfrak{S}(n) J(n) + O(x^{s-k} L^{-A}), \quad (1.10)$$

где $\mathfrak{S}(n)$ – особый ряд рассматриваемой аддитивной задачи, определенный (2.5), а особый интеграл $J(n)$ определяется равенством

$$J(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(-n\lambda) \left\{ \int_x^{2x} e(\lambda u^k) du \right\}^s d\lambda. \quad (1.11)$$

Кроме того, если n и x удовлетворяют (1.5) и (1.7), то

$$J(n) \asymp x^{s-k}. \quad (1.12)$$

Наряду с подходящими оценками $S(x; \alpha)$ на малых дугах, теорема 1 применима к решению проблемы Варинга–Гольдбаха. Заметим, что верхняя граница θ в (1.8) значительно превышает те, что имеются в предыдущих работах на эту тему. При $s \geq 6$ величина θ в (1.8) может даже принимать значения, превосходящие $1/2$. Из числа предыдущих работ укажем на результат Кумчева [1], который показал, что в теореме 1 можно положить $P = x^{1/2-\varepsilon}$. С другой стороны, было бы интересно рассмотреть задачу о представлении

$$n = p_1^k + \dots + p_s^k, \quad p_j \sim x_j, \quad j = 1, \dots, s,$$

где величины x_j могут иметь разный порядок роста. Этот вопрос требует больше места и будет рассмотрен где-нибудь отдельно.

Статья построена следующим образом. В п. 2 доказаны некоторые вспомогательные свойства особого ряда и особого интеграла, а также рассматриваются большие дуги средней величины, приводятся оценки тригонометрических сумм по простым числам. Теорема 1 доказывается в п. 3.

2. Особый ряд и особый интеграл. Для характера Дирихле $\chi \bmod q$ положим

$$C(\chi, a) = \sum_{h=1}^q \bar{\chi}(h) e\left(\frac{ah^k}{q}\right), \quad (2.1)$$

причем в случае главного характера $\chi = \chi_0$ по модулю q будем писать $C(q, a) = C_k(\chi_0, a)$. Если $\chi_1, \dots, \chi_s$ – характеры по модулю q , то

$$B(n, q, \chi_1, \dots, \chi_s) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q e\left(-\frac{an}{q}\right) C(\chi_1, a) \dots C(\chi_s, a). \quad (2.2)$$

ЛЕММА 1. Пусть $s \geq 4$, и пусть характеры $\chi_j \bmod r_j$, $j = 1, \dots, s$, являются примитивными. Пусть, далее, $r_0 = [r_1, \dots, r_s]$, χ_0 – главный характер по модулю q . Тогда

$$\sum_{\substack{q \leq X \\ r_0 | q}} \frac{1}{\varphi^s(q)} |B(n, q, \chi_1 \chi_0, \dots, \chi_s \chi_0)| \ll r_0^{1-s/2+\varepsilon} \ln^c X. \quad (2.3)$$

Это неравенство следует из оценки Виноградова (см. [2; вопрос 5 к гл. VII]), согласно которой для любого $\chi \bmod q$ имеет место неравенство $C(\chi, a) \ll q^{1/2} \tau^\beta(q)$, где $\tau(q)$ – число делителей, а β – постоянная, зависящая от k .

В случае $\chi_1 = \dots = \chi_s = \chi^0 \bmod q$ полагаем $B(n, q) = B(n, q, \chi^0, \dots, \chi^0)$,

$$A(n, q) = \frac{B(n, q)}{\varphi^s(q)}, \quad \mathfrak{S}(n, P) = \sum_{q \leq P} A(n, q). \quad (2.4)$$

Особый ряд определяется равенством

$$\mathfrak{S}(n) = \lim_{P \rightarrow \infty} \mathfrak{S}(n, P) \quad (2.5)$$

в случае, если предел в правой части существует. Положительность $\mathfrak{S}(n)$ исследовалась в работе Хуа [3], так что мы этот вопрос опускаем.

Рассмотрению особого интеграла посвящена следующая лемма, которая доказывается с помощью интегральной теоремы Жордана (детали мы не приводим).

ЛЕММА 2. Пусть $(\rho_j)_1^s$ – последовательность комплексных чисел с условием $0 < \operatorname{Re}(\rho_j) \leq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e(-n\lambda) \prod_{j=1}^s \left(\int_a^b u^{\rho_j-1} e(\lambda u^k) du \right) d\lambda \\ &= \frac{b^{s-k}}{k^s} \int_{\mathcal{D}} \left(\prod_{j=1}^s (b^k u_j)^{(\rho_j-1)/k} u_j^{(1-k)/k} \right) du_1 \dots du_{s-1}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $u_s = n/b^k - (u_1 + \dots + u_{s-1})$, $a, b > 0$, $D = \{(u_1, \dots, u_{s-1}) : (a/b)^k \leq u_1, \dots, u_{s-1} \leq 1\}$. При этом, если $a \leq x$, $b = 2x$, и если выполнены условия (1.7) и (1.5), то справедливо соотношение

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\prod_{j=1}^s u_j^{(1-k)/k} \right) du_1 \dots du_{s-1} \asymp 1. \quad (2.7)$$

3. Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы 1 существенным образом использует лемму 3, в которой исследуется интеграл по большим дугам средней величины. Положим

$$P_0 = x^{2/5-\varepsilon}, \quad Q_0 = \frac{N}{P_0 L^B}, \quad (3.1)$$

где постоянная B будет зависеть от некоторой заданной постоянной A . Определим большие дуги $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}(P_0)$ так, как это сделано в (1.2).

Доказательство следующей леммы будет дано в п. 4.

ЛЕММА 3. Пусть $s \geq 4$, и пусть x удовлетворяет условию (1.6). Если A – произвольное постоянное число, $B = B(A) > 0$ достаточно велико, то

$$\int_{\mathfrak{M}_0} S^s(x; \alpha) e(-n\alpha) d\alpha = \mathfrak{S}(n) J(n) + O(x^{s-k} L^{-A}), \quad (3.2)$$

где $\mathfrak{S}(n)$ определено в (2.5), а $J(n)$ – в (1.11). При этом, если $a \leq x$, $b = 2x$, и если выполнены условия (1.7) и (1.5), то выполняется (1.12).

Доказательство теоремы 1 опирается также на следующую оценку экспоненциальной суммы $S(x; \alpha)$, принадлежащей Рену [4]. Сформулируем это утверждение в терминах рациональных приближений вида

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad \text{где } 1 \leq a \leq q, \quad (a, q) = 1. \quad (3.3)$$

ЛЕММА 4. Пусть α имеет вид (3.3). Тогда имеет место оценка

$$S(X; \alpha) \ll \left(X^{1/2} \sqrt{q(1 + |\lambda|X^k)} + X^{4/5} + \frac{X}{\sqrt{q(1 + |\lambda|X^k)}} \right) q^\varepsilon \ln^c X, \quad (3.4)$$

где ε – сколь угодно малое фиксированное число, а $c > 0$ – абсолютная постоянная.

Теперь мы готовы приступить к доказательству теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Напомним, что большие дуги $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(P)$ в теореме 1 определяются соотношением (1.2) с $P = x^\theta$, где θ удовлетворяет условию (1.8). Аналогично определяется и $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}(P_0)$ с P_0 , подчиненным условию (3.1). Рассмотрим множество $\mathfrak{K} = \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_0$. Тогда любое $\alpha \in K$ представляется в виде (3.3), причем

$$q \leq P_0, \quad \frac{1}{qQ_0} < |\lambda| \leq \frac{1}{qQ},$$

либо

$$P_0 < q \leq P, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{qQ}.$$

В каждом из этих случаев имеем

$$P_0 \ll \min\left(P_0, \frac{x^k}{Q_0}\right) \ll q(1 + |\lambda|x^k) \ll P + \frac{x^k}{Q} \ll PL^B.$$

Согласно лемме 4

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{K}} |S(x; \alpha)| \ll x^\varepsilon \left(x^{1/2} P^{1/2} + x^{4/5} + \frac{x}{P_0^{1/2}} \right) \ll x^{1+\varepsilon} \left(\frac{P^{1/2}}{x^{1/2}} + \frac{1}{x^{1/5}} \right). \quad (3.5)$$

Отметим, что на последнем шаге мы воспользовались определением (3.1) величины P_0 . Таким образом,

$$\int_{\mathfrak{K}} S^5(x; \alpha) e(-n\alpha) d\alpha \ll \sup_{\alpha \in \mathfrak{K}} |S(x; \alpha)|^5 \cdot \text{meas}(\mathfrak{K}),$$

где $\text{meas}(\mathfrak{K})$ обозначает меру множества $\mathfrak{K}$, которая ограничена сверху величиной

$$\sum_{q \leq P} \sum_{a=1}^q \frac{1}{qQ} \ll \frac{P^2 L^B}{N}.$$

Следовательно,

$$\int_{\mathfrak{K}} S^5(x; \alpha) e(-n\alpha) d\alpha \ll x^{5+\varepsilon} \left(\frac{P^{1/2}}{x^{1/2}} + \frac{1}{x^{1/5}} \right)^5 \frac{P^2 L^B}{N} \ll \frac{x^{5+\varepsilon}}{N} \left(\frac{P^{9/2}}{x^{5/2}} + \frac{P^2}{x} \right).$$

Но если $P = x^\theta$, где $\theta < 1/2$, то правая часть последнего неравенства

$$\ll \frac{x^5}{N^{1+\varepsilon}} \ll x^{5-k-\varepsilon}.$$

Поэтому в случае $s = 5$ формула (1.10) следует из этого неравенства и асимптотики (3.2) с $s = 5$. Это и доказывает теорему при $s = 5$.

В общем случае, при $s \geq 6$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{K}} S^s(x; \alpha) e(-n\alpha) d\alpha &\ll x^{s+\varepsilon} \left(\frac{P^{1/2}}{x^{1/2}} + \frac{1}{x^{1/5}} \right)^s \frac{P^2 L^B}{N} \\ &\ll \frac{x^{s+\varepsilon}}{N} \left(\frac{P^{(s+4)/2}}{x^{s/2}} + \frac{P^2}{x^{s/5}} \right) \ll \frac{x^s}{N^{1+\varepsilon}} \ll x^{s-k-\varepsilon}, \end{aligned}$$

если только $P = x^\theta$, $\theta < s/(s+4)$. Теперь искомая формула следует из (3.2) и полученного неравенства. Это и завершает доказательство теоремы 1.

4. Доказательство леммы 3. Нам остается доказать лемму 3, для чего потребуются несколько новых обозначений. Положим

$$V(\lambda) = \sum_{m \sim x} e(m^k \lambda), \quad (4.1)$$

$$W(\chi, \lambda) = \sum_{p \sim x} (\ln p) \chi(p) e(p^k \lambda) - \delta_\chi \sum_{m \sim x} e(m^k \lambda), \quad (4.2)$$

где $\delta_\chi = 1$ или 0 в зависимости от того, будет ли χ главным характером или нет. Напомним, что большие дуги $\mathfrak{M}_0$ определяются через параметры P_0, Q_0 , которые, в свою очередь, задаются равенствами (3.1). Имея это в виду, определим суммы

$$J(g) = \sum_{r \leq P_0} [g, r]^{-1+\varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \max_{|\lambda| \leq 1/rQ_0} |W(\chi, \lambda)|, \quad (4.3)$$

$$K(g) = \sum_{r \leq P_0} [g, r]^{-1+\varepsilon} \sum_{\chi \bmod r}^* \left(\int_{-1/rQ_0}^{1/rQ_0} |W(\chi, \lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2}, \quad (4.4)$$

где суммирование ведется по примитивным характерам $\chi \bmod r$. Для доказательства леммы 3 необходимы оценки J и K . Следующие три леммы выводятся подобно леммам 3.1, 3.2 и 3.3 работы [5], поэтому доказательства их мы опускаем.

ЛЕММА 5. Пусть x определено равенством (1.6), а P_0, Q_0 – равенствами (3.1). Тогда

$$J(g) \ll g^{-1+\varepsilon} x L^c. \quad (4.5)$$

ЛЕММА 6. Пусть x, P_0, Q_0 – те же, что в лемме 5, и пусть $g = 1$. Если $A > 0$, а B – достаточно большое число, зависящее от A , то неравенство (4.5) заменяется более точной оценкой вида

$$J(1) \ll x L^{-A}. \quad (4.6)$$

ЛЕММА 7. Пусть x, P_0, Q_0 – те же, что в лемме 5. Тогда

$$K(g) \ll g^{-1+\varepsilon} x^{1-k/2} L^c. \quad (4.7)$$

Теперь у нас все готово для доказательства леммы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Рассмотрим сначала случай $s = 4$. Если $s = 4$ и $k = 2$, то лемма 1 сводится к теореме 1.2 из [5], где содержится подробное ее доказательство. При $s = 4$, $k \geq 3$ доказательство теоремы 1.2 из [5] сохраняет силу, что и завершает разбор случая $s = 4$.

В случае $s \geq 5$ рассуждения также подобны тем, что используются в теореме 1.2 из [5], так что мы ограничимся кратким наброском доказательства. Имеем

$$\int_{\mathfrak{M}_0} S^s(x; \alpha) e(-n\alpha) d\alpha = I_0 + sI_1 + \dots + sI_{s-1} + I_s, \quad (4.8)$$

где для $j = 0, \dots, s$ обозначено

$$I_j = \sum_{q \leq P_0} \frac{1}{\varphi^s(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q C^{s-j}(q, a) e\left(-\frac{an}{q}\right) \\ \times \int_{-1/qQ_0}^{1/qQ_0} V^{s-j}(\lambda) \left\{ \sum_{\chi \bmod q} C(\chi, a) W(\chi, \lambda) \right\}^j e(-n\lambda) d\lambda.$$

Мы покажем, что I_0 дает главный член, а все остальные слагаемые войдут в остаток. Коротко обрисуем доказательство оценки для I_s . Оставшиеся величины оцениваются аналогично. Переходя от суммирования по всем рассматриваемым характерам к суммированию по примитивным характерам и пользуясь затем леммой 1, находим

$$|I_s| \ll L^c \sum_{r_1 \leq P_0} \dots \sum_{r_s \leq P_0} r_0^{-1+\varepsilon} \sum_{\chi_1 \bmod r_1}^* \dots \sum_{\chi_s \bmod r_s}^* \int_{-1/r_0Q_0}^{1/r_0Q_0} |W(\chi_1, \lambda)| \dots |W(\chi_s, \lambda)| d\lambda,$$

где обозначено $r_0 = [r_1, \dots, r_s]$. Заметим, что мы не будем применять лемму 1 непосредственно к последнему неравенству. Именно, сначала вынесем из-под знака интеграла величины $|W(\chi_1, \lambda)|, \dots, |W(\chi_{s-2}, \lambda)|$, после чего воспользуемся неравенством Коши. Так получим

$$|I_s| \ll L^c \sum_{r_1 \leq P_0} \sum_{\chi_1 \bmod r_1}^* \max_{|\lambda| \leq 1/r_1Q_0} |W(\chi_1, \lambda)| \times \dots \\ \times \sum_{r_{s-2} \leq P_0} \sum_{\chi_{s-2} \bmod r_{s-2}}^* \max_{|\lambda| \leq 1/r_{s-2}Q_0} |W(\chi_{s-2}, \lambda)| \\ \times \sum_{r_{s-1} \leq P_0} \sum_{\chi_{s-1} \bmod r_{s-1}}^* \left(\int_{-1/r_{s-1}Q_0}^{1/r_{s-1}Q_0} |W(\chi_{s-1}, \lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \\ \times \sum_{r_s \leq P_0} r_0^{-1+\varepsilon} \sum_{\chi_s \bmod r_s}^* \left(\int_{-1/r_sQ_0}^{1/r_sQ_0} |W(\chi_s, \lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2}. \quad (4.9)$$

После этого применим к (4.9) итерационный процесс, подобно тому, как это делалось при доказательстве теоремы 1.2 в [5]. Заметим, что согласно леммам 5–7 каждая из величин $K(g)$ привносит в оценку множитель $g^{-1+\varepsilon} x^{1-k/2} L^c$, а каждая из величин $J(g)$ – множитель $g^{-1+\varepsilon} x L^c$, за исключением последней, для которой $J(1) \ll x L^{-A}$.

Так из (4.9) мы заключаем, что $I_s \ll x^{s-k} L^{-A}$. Оставшиеся величины I_j , $j = 1, \dots, s-1$, допускают ту же оценку, так что при всех $j = 1, \dots, s$ имеем

$$I_j \ll x^{s-k} L^{-A}. \quad (4.10)$$

Наконец, I_0 вычисляется стандартным образом. Задавшись достаточно большим $B = B(A) > 0$, получим

$$I_0 = S(n)J(n) + O(x^{s-k} L^{-A}), \quad (4.11)$$

где $S(n)$ определяется равенством (2.5), а $J(n)$ – равенством (1.1).

Пользуясь леммой 2 и, в частности, соотношением (2.7), легко показать, что если n и x удовлетворяют условиям (1.5) и (1.7) соответственно, то будет выполнено и (1.12). Подставляя (4.11) и (4.10) в (4.8), получим (3.2). Лемма 3 доказана.

Замечания исторического характера. Впервые об Анатолии Алексеевиче Карацубе, как об авторе книги [6], я узнал более двадцати лет тому назад, еще будучи студентом второго уровня. Эту его книгу китайская школа аналитической теории чисел использует как учебник со дня ее выхода в свет. Я до сих пор сохранил очень яркие воспоминания о том, как долгими зимними ночами 1989 г., строка за строкой я разбирал ее текст, который зачастую прерывался большими по объему вычислениями. Наша первая встреча с Анатолием Алексеевичем состоялась теплым сентябрьским днем 2004 г. в студенческом городке Московского государственного университета, где я гостил по приглашению Владимира Николаевича Чубарикова. Неделю спустя мы вместе с Владимиром Николаевичем побывали у Анатолия Алексеевича в институте Стеклова, где он рассказывал нам о своих восхождениях на высочайшие горные вершины России. В январе 2006 г. Анатолий Алексеевич гостил у меня, и помимо математических занятий, он получил огромное удовольствие от восхождения на пик Таи, самую знаменитую гору Китая. Я и теперь не в силах поверить, что такой замечательный альпинист покинул нас столь внезапно. Силуэт Анатолия Алексеевича, пристально и проникновенно вглядывающегося в высокое небо, твердо стоящего на самой вершине Таи, навсегда останется в моей памяти.

Автор благодарит рецензента за тщательное ознакомление с рукописью статьи и за ряд полезных советов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. V. Kumchev, “On Weyl sums over primes and almost primes”, *Michigan Math. J.*, **54**:2 (2006), 243–268.
- [2] И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*, Наука, М., 1981.
- [3] L.-k. Hua, *Tui Lei Su Shu Lun [Additive Prime Number Theory]*, Science press, Peking, 1957.
- [4] X. Ren, “On exponential sums over primes and application in Waring–Goldbach problem”, *Sci. China Ser. A*, **48**:6 (2005), 785–797.
- [5] J. Liu, “On Lagrange’s theorem with prime variables”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **54**:4 (2003), 453–462.
- [6] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1983.

Ж. Лиу

Шаньдунский университет, КНР

E-mail: jyliu@sdu.edu.cn

Поступило

30.11.2009