Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Мозер, Лестницы Якова и почти точные асимптотические представления интеграла Харди–Литтлвуда, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 3, 446–455

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8816>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:30:48

УДК 517

Лестницы Якова и почти точные асимптотические представления интеграла Харди–Литтлвуда

Я. Мозер

В работе введено нелинейное интегральное уравнение нового типа. Множество глобальных решений этого уравнения образует при $T \rightarrow \infty$ очень узкий пучок лучей (аналог лазерного пучка), который приводит к почти точным представлениям интеграла Харди–Литтлвуда от 1918 г. Точность нашего результата существенно превышает точность соответствующих результатов Баласубраманиана, Хиз–Брауна и Ивича.

Библиография: 9 названий.

Светлой памяти Анатолия Алексеевича Карацубы посвящается

1. Введение. Напомним, что в 1918 г. Харди и Литтлвуд начали изучать интеграл

$$\int_0^T \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt = \int_0^T Z^2(t) dt, \quad (1.1)$$

где

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)} \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right), \quad \vartheta(t) = -\frac{1}{2} t \ln(\pi) + \operatorname{Im} \ln \left[\Gamma \left(\frac{1}{4} + i \frac{t}{2} \right) \right],$$

и получили формулу (см. [1; с. 122, 151–156])

$$\int_0^T Z^2(t) dt \sim T \ln(T), \quad T \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

В предлагаемой работе доказано, что кроме представлений типа (1.2), обладающих неограниченной ошибкой при $T \rightarrow \infty$, существует бесконечное множество новых, почти точных, представлений интеграла Харди–Литтлвуда (1.1). Каждый элемент этого множества дает почти точное представление интеграла (1.1). Доказательство этого факта основано на некотором классе функций, обладающих каноническими свойствами на множестве нулей функции $\zeta(1/2 + it)$.

(А) Напомним также, что в 1928 г. Титчмарш применил новый метод для изучения интеграла (1.1), который в итоге привел к совершенной формуле Титчмарша–Кобера–Аткинсона (ТКА):

$$\int_0^\infty Z^2(t) e^{-2\delta t} dt = \frac{c - \ln(4\pi\delta)}{2 \sin(\delta)} + \sum_{n=0}^N c_n \delta^n + \mathcal{O}(\delta^{N+1}) \quad (1.3)$$

© Я. МОЗЕР, 2010

при $\delta \rightarrow 0$, где C – постоянная Эйлера, c_n – постоянные и постоянная в символе $\mathcal{O}$ зависит от N .

Формула ТКА (1.3) была опубликована в 1951 г. в фундаментальной монографии Титчмарша (см. [2]–[5]) и в течение 56 лет эту формулу считали скорее курьезом (см. [6; с. 139]). Однако в предлагаемой работе доказано, что ТКА-формула содержит в себе закономерности нового типа.

(В) А именно, в предлагаемой работе введено новое семейство кривых – решений нелинейного уравнения

$$\int_0^{\mu[x(T)]} Z^2(t) e^{-2t/x(T)} dt = \int_0^T Z^2(t) dt \quad (1.4)$$

для класса $\{\mu\}$ функций $\mu \in C^\infty([y_0, \infty))$, которые положительны, возрастают к $+\infty$ и удовлетворяют условию $\mu(y) \geq 7y \ln(y)$. Имеет место следующее: для любого элемента $\mu \in \{\mu\}$ существует единственное решение

$$\varphi(T) = \varphi_\mu(T), \quad T \in [T_0, \infty), \quad T_0 = T_0[\varphi], \quad \varphi(T) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty,$$

интегрального уравнения (1.4). Пусть $\{\varphi\}$ – класс этих решений.

Функция $\varphi(T)$ связана с нулями дзета-функции Римана на критической прямой следующим образом. Пусть $t = \gamma$ – нуль функции $\zeta(1/2 + it)$ порядка $n(\gamma)$, где $n(\gamma) = \mathcal{O}(\ln(\gamma))$, (см. [7; с. 178]). Тогда точки $[\gamma, \varphi(\gamma)]$, $\gamma > T_0$, и только эти точки являются точками перегиба с горизонтальной касательной. Более полно: имеет место

$$\varphi'(\gamma) = \varphi''(\gamma) = \dots = \varphi^{(2n)}(\gamma) = 0, \quad \varphi^{(2n+1)}(\gamma) \neq 0, \quad (1.5)$$

где $n = n(\gamma)$.

В силу этого свойства элемент $\varphi \in \{\varphi\}$ естественно назвать лестницей Якова, выводящей нас в точку $[\infty, \infty]$ (ступеньки лестницы – это участки кривой φ , лежащие в малых окрестностях точек $[\gamma, \varphi(\gamma)]$, $\gamma > T_0[\varphi]$). Конечно, сложная функция $G[\varphi(T)]$, для которой $G \in C^\infty([y_0, \infty))$, возрастает к $+\infty$, и которая имеет всюду положительные производные, также является лестницей Якова.

Еще отметим, что отображение (оператор)

$$\widehat{H}: \{\mu\} \rightarrow \{\varphi\}$$

можно назвать Z^2 -преобразованием функций класса $\{\mu\}$.

(С) Лестницы Якова приводят нас к следующим результатам:

- (а) к почти окончательной формуле для интеграла Харди–Литтлвуда (1.1); отметим, что новая формула уточняет даже главный член в первоначальной формуле Харди–Литтлвуда (1.2):

$$\int_0^T Z^2(t) dt \sim \frac{\varphi(T)}{2} \ln\left(\frac{\varphi(T)}{2}\right), \quad T \rightarrow +\infty, \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \{\varphi\},$$

т.е. главный член этой формулы тоже лестница Якова и, следовательно, главный член обладает очень тонкой структурой;

- (б) само множество $\{\varphi\}$ обладает свойством “безграничного сближения” любых двух лестниц Якова при $T \rightarrow +\infty$;
- (с) новая формула для интеграла Харди–Литтлвуда является устойчивой относительно выбора элементов из некоторого подмножества на $\{\varphi\}^* \in \{\varphi\}$.

2. Результаты. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Из ТКА-формулы следует, что

(А) для интеграла Харди–Литтлвуда (1.1) имеет место формула

$$\int_0^T Z^2(t) dt = F[\varphi(T)] + r[\varphi(T)], \quad T \geq T_0[\varphi], \quad (2.1)$$

где

$$F[y] = \frac{y}{2} \ln\left(\frac{y}{2}\right) + (c - \ln(2\pi))\frac{y}{2} + c_0, \quad r[\varphi(T)] = \mathcal{O}\left\{\frac{\ln(\varphi(T))}{\varphi(T)}\right\} = \mathcal{O}\left(\frac{\ln(T)}{T}\right); \quad (2.2)$$

(В) для любых $\varphi_1(T), \varphi_2(T) \in \{\varphi\}$ имеет место соотношение

$$\varphi_1(T) - \varphi_2(T) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right), \quad T \geq \max\{T_0[\varphi_1], T_0[\varphi_2]\}; \quad (2.3)$$

(С) если множество $\{\mu(y_0)\}$ ограничено, то $\varphi(T) \in \{\varphi\}$ и для любого фиксированного $\varphi_0(T) \in \{\varphi\}$

$$\varphi_0(T) - \frac{A}{T} < \varphi(T) < \varphi_0(T) + \frac{A}{T}, \quad T \geq T_0 = \sup_{\mu} \{\mu(y_0)\}, \quad (2.4)$$

при $\varphi(T) \in \{\varphi\}$ и любом фиксированном $\varphi_0(T) \in \{\varphi\}$. При этом постоянные в $\mathcal{O}$ -символах не зависят от выбора $\varphi(T)$.

Напомним формулу Баласубраманиана (см. [8]):

$$\int_0^T Z^2(t) dt = T \ln(T) + (2c - 1 - \ln(2\pi))T + \mathcal{O}(T^{1/3+\epsilon}), \quad (2.5)$$

и Ω -теорему Гуда (см. [7]):

$$\int_0^T Z^2(t) dt - T \ln(T) - (2c - 1 - \ln(2\pi))T = \Omega(T^{1/4}). \quad (2.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Сравнение формул (2.1), (2.2) с формулой (2.5) показывает, что

- формула (2.5) обладает большой мерой неточности, поскольку всякое значение интеграла (1.1) искажено большой ошибкой $R(T) = \mathcal{O}(T^{1/3+\epsilon})$, и, так как (см. (2.6))

$$\overline{\lim_{T \rightarrow \infty}} |R(T)| = +\infty,$$

это свойство не может быть устранено;

- так как в силу (2.2)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} r[\varphi(T)] = 0,$$

формула (2.1) является почти точной.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Обнаружен новый эффект: главный член интеграла Харди–Литтлвуда является лестницей (см. (2.1)), т.е. обладает очень тонкой структурой. Аналог этого эффекта у формул типа (1.2), (2.5) совсем отсутствует.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Явно отметим, что

- соотношение (2.3) выражает новый эффект: любые две лестницы Якова неограниченно сближаются при $T \rightarrow \infty$;
- из соотношения (2.4) следует, что представление (2.1), (2.2) интеграла Харди–Литтлвуда (1.1) является устойчивым относительно выбора $\varphi(T) \in \{\varphi\}$ в случае ограниченности множества $\{\mu(y_0)\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В силу замечания 3 представление (2.1), (2.2) интеграла Харди–Литтлвуда (1.1) можно назвать *микроскопически однозначным*, так как любые две лестницы Якова $\varphi_1, \varphi_2, T \geq T_0$ (см. (2.4)) при $T \rightarrow \infty$ невозможно различить.

В пятой части работы доказана связь лестниц Якова с функцией $\pi(T)$ – числа простых чисел $p \leq T$:

$$\pi(T) \sim \frac{1}{1-c} \left\{ T - \frac{\varphi(T)}{2} \right\}, \quad T \rightarrow \infty.$$

3. Существование лестниц Якова. Справедлива

ЛЕММА 1. Для любой функции $\mu(y) \in \{\mu\}$ существует единственное решение $\varphi(T), T \geq T_0[\varphi]$, интегрального уравнения (1.4), обладающее свойством (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме о среднем Бонне в случае $y > 0, \mu > 0$ имеем

$$\int_0^\mu Z^2(t) e^{-2t/y} dt = \int_0^M Z^2(t) dt, \quad M > 0, \quad (3.1)$$

где $e^{-2t/y}, t \in [0, \mu]$, – убывает и равна 1 при $t = 0$.

Прежде всего отметим, что любому фиксированному значению $\mu > 0$ формула (3.1) сопоставляет лишь одно значение $M > 0$, так как случай $M_1 \neq M_2$ приводит к невозможному равенству

$$\int_{M_1}^{M_2} Z^2(t) dt = 0. \quad (3.2)$$

Пусть теперь $\mu(y) \in \{\mu\}$. Тогда формулой

$$\int_0^{\mu(y)} Z^2(t) e^{-2t/y} dt = \int_0^{M(y)} Z^2(t) dt \quad (3.3)$$

определена функция $M(y) = M_\mu(y), y \geq y_0$. Пусть $\{M\}$ обозначает класс образов элементов $\mu(y) \in \{\mu\}$.

Функция $M(y)$ положительная и возрастающая к $+\infty$ функция. Действительно, пусть

$$\Phi(y) = \int_0^{\mu(y)} Z^2(t) e^{-2t/y} dt. \quad (3.4)$$

Тогда

$$\Phi'(y) = \frac{2}{y^2} \int_0^{\mu(y)} t Z^2(t) e^{-2t/y} dt + Z^2[\mu(y)] e^{-2\mu(y)/y} \frac{d\mu(y)}{dy} > 0 \quad (3.5)$$

(первый член очевидно положителен и второй неотрицателен). Таким образом, мы видим, что функция $\Phi(y), y \in [y_0, +\infty)$, возрастает. Следовательно, для любых y ,

$\Delta y > 0$, $y \geq y_0$, имеет место соотношение

$$0 < \Phi(y + \Delta y) - \Phi(y) = \int_{M(y)}^{M(y+\Delta y)} Z^2(t) dt \quad \implies \quad M(y + \Delta y) > M(y).$$

Функция $M(y)$, $y \geq y_0$, непрерывна. Действительно, для любого фиксированного $\hat{y} \in [y_0, +\infty)$ имеем

$$M_1(\hat{y}) = \limsup_{y \rightarrow \hat{y}^+} M(y), \quad M_2(\hat{y}) = \liminf_{y \rightarrow \hat{y}^+} M(y).$$

В силу непрерывности левой стороны в (3.3) получаем (см. (3.2))

$$\int_{M_1(\hat{y})}^{M_2(\hat{y})} Z^2(t) dt = 0 \quad \implies \quad M_1(\hat{y}) = M_2(\hat{y}) = M(\hat{y} + 0).$$

Аналогичным образом доказывается существование $M(\hat{y} - 0)$ и равенства $M(\hat{y}) = M(\hat{y} - 0) = M(\hat{y} + 0)$.

Функция $M(y)$, $y \geq y_0$, обладает следующими свойствами:

- (а) имеет непрерывную производную в каждой точке y такой, что $M(y) \neq \gamma$, где γ — нуль функции $\zeta(1/2 + it)$;
- (б) имеет производную, равную $+\infty$ в точках y таких, что $M(y) = \gamma$, γ определено выше.

Действительно, в силу (3.3), (3.4) имеем

$$\frac{\Phi(y + \Delta y) - \Phi(y)}{\Delta y} = \frac{M(y + \Delta y) - M(y)}{\Delta y} Z^2\{M(y) + \theta \cdot [M(y + \Delta y) - M(y)]\}, \quad (3.6)$$

где $\theta \in (0, 1)$. Так как $\Phi'(y) > 0$ (см. (3.5)), из (3.6) следует, что

- (i) для значений y таких, что $Z^2[M(y)] > 0$, существует непрерывная производная;
- (ii) для значений y таких, что $Z^2[M(y)] = 0$, имеет место соотношение

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{M(y + \Delta y) - M(y)}{\Delta y} = +\infty. \quad (3.7)$$

Так как $T = M(y)$, $y \geq y_0$, — возрастающая к $+\infty$ и непрерывная функция, для нее существует (единственная) возрастающая к $+\infty$ непрерывная обратная функция:

$$y = \varphi(T) = \varphi_M(T), \quad T \geq T_0[\varphi] = M_\mu(y_0). \quad (3.8)$$

Теперь из (3.5), (3.6) следует, что

$$\frac{d\varphi(T)}{dT} = \frac{Z^2(T)}{\Phi'[\varphi(T)]}, \quad \Phi' = \Phi'_y[\varphi(T)] > 0, \quad T \geq T_0[\varphi] \quad (3.9)$$

($\varphi'(\gamma) = 0$, см. (3.7)). Из (3.9) уже следует, что $\varphi(T) \in C^\infty([T_0[\varphi], +\infty))$, а также свойство (1.5). Подставляя (3.8) в (3.3), получаем, что $x(T) = \varphi_\mu(T)$, $T \geq T_0[\varphi]$, является решением интегрального уравнения (1.4).

4. Следствия из ТКА-формулы. Справедлива следующая

ЛЕММА 2. Для любого элемента $M(y) \in \{M\}$ имеет место формула

$$\int_0^{M(y)} Z^2(t) dt = F(y) + r(y), \quad (4.1)$$

где

$$F(y) = \frac{y}{2} \ln\left(\frac{y}{2}\right) + E \frac{y}{2} + c_0, \quad E = c - \ln(2\pi), \quad r(y) = \mathcal{O}\left(\frac{\ln(y)}{y}\right), \quad (4.2)$$

и постоянная в $\mathcal{O}$ -символе является абсолютной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходим из формулы (1.3), $N = 1$:

$$\int_0^\infty Z^2(t) e^{-2\delta t} dt = \frac{c - \ln(4\pi\delta)}{2 \sin(\delta)} + c_0 + c_1 \delta + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (4.3)$$

Так как $|Z(t)| < At^{1/4}$, $t \geq t_0$,

$$f(t, \delta) = t^{1/2} e^{-\delta t} \leq f\left(\frac{1}{2\delta}, \delta\right) = \frac{1}{\sqrt{2e\delta}},$$

$$\int_U^\infty Z^2(t) e^{-2\delta t} dt < B \frac{e^{-\delta U}}{\delta^{3/2}}, \quad B = \frac{A^2}{\sqrt{2e}}, \quad U \geq t_0.$$

Выбор значения $U = \mu(1/\delta)$ сделаем по условию

$$B\delta^{-3/2} e^{-\delta U} \leq \delta^2 \quad \implies \quad \mu\left(\frac{1}{\delta}\right) \geq \frac{7}{\delta} \ln\left(\frac{1}{\delta}\right) > \frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{B}{\delta^{7/2}}\right).$$

Теперь из (4.3) следует формула

$$\int_0^{\mu(1/\delta)} Z^2(t) e^{-2\delta t} dt = \frac{c - \ln(4\pi\delta)}{2 \sin(\delta)} + c_0 + c_1 \delta + \mathcal{O}(\delta^2), \quad \mu\left(\frac{1}{\delta}\right) \geq \frac{7}{\delta} \ln\left(\frac{1}{\delta}\right) \quad (4.4)$$

(см. введение, часть (В) – условие для $\mu(y)$) при этом в остаточный член входит интеграл

$$- \int_{\mu(1/\delta)}^\infty Z^2(t) e^{-2\delta t} dt = \mathcal{O}(\delta^2). \quad (4.5)$$

Так как при $\delta \in (0, \delta_0]$, δ_0 достаточно малое,

$$\frac{1}{\sin(\delta)} = \frac{1}{\delta} \left\{ 1 + \frac{\delta^2}{6} + \mathcal{O}(\delta^4) \right\}, \quad \frac{c - \ln(4\pi\delta)}{2 \sin(\delta)} = \frac{1}{2\delta} \ln\left(\frac{1}{\delta}\right) + \frac{D}{2\delta} + \mathcal{O}\left[\delta \ln\left(\frac{1}{\delta}\right)\right],$$

то (см. (4.4))

$$\int_0^{\mu(1/\delta)} Z^2(t) e^{-2\delta t} dt = \frac{1}{2\delta} \ln\left(\frac{1}{\delta}\right) + \frac{D}{2\delta} + c_0 + \mathcal{O}\left[\delta \ln\left(\frac{1}{\delta}\right)\right], \quad D = c - \ln(4\pi). \quad (4.6)$$

Полагая в (4.6) $\delta = 1/y$, $y_0 = 1/\delta_0$ и используя (3.3), получаем формулы (4.1), (4.2). Так как постоянные в (4.3), (4.5) абсолютные, такой же является и постоянная в $\mathcal{O}$ -символе формулы (4.2).

5. Доказательство теоремы. Полагая в (2.5) $T = y/2$ и сравнивая результат с формулой (4.1), получаем

$$\frac{y}{2} < M(y), \quad y \rightarrow \infty.$$

Далее, полагая в (2.5)

$$T = \frac{y}{2} \left(1 + \frac{A}{\ln(y/2)} \right), \quad A > 1 - c,$$

и сравнивая результат с формулой (4.1), имеем

$$M(y) < \frac{y}{2} \left(1 + \frac{A}{\ln(y/2)} \right), \quad y \rightarrow \infty.$$

Следовательно (см. (3.8)),

$$0 < M(y) - \frac{y}{2} < \frac{A}{2} \frac{y}{\ln(y/2)} \implies 0 < 2T - \varphi(T) < B \frac{\varphi(T)}{\ln[\varphi(T)]}, \quad (5.1)$$

т.е. имеет место соотношение

$$1.9T < \varphi(T) < 2T. \quad (5.2)$$

Полагая в (4.1) $y = \varphi(T) \in \{\varphi\}$ (см. (3.8)), получаем формулу (2.1) и оценку (2.2) (см. (5.2)).

Поскольку $F'(y) = 1/2 \ln(y/2) + E + 1$, вычитанием формул (2.1) для φ_1, φ_2 в силу (5.2) получаем соотношение (2.3).

Так как $\mu(y) > M(y)$, $y \geq y_0$ (см. (3.3)), в случае ограниченности множества $\{\mu(y_0)\}$ выбор значения (см. (2.4))

$$T_0 = \sup_{\mu} \{\mu(y_0)\} \geq \mu(y_0) > M_{\mu}(y_0) \quad \text{для всех } \mu(y) \in \{\mu\}$$

оправдан, т.е. $[T_0, +\infty)$ – общая область определения функций $\varphi_{\mu}(T)$, $\mu(T) \in \{\mu\}$, соответствующая этому случаю.

6. Связь лестниц Якова с функцией простых чисел $\pi(T)$. Сравнивая формулы (2.1), (2.5) получаем

$$\omega\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \omega(T) = (c-1)T + \mathcal{O}(T^{1/3+\epsilon}), \quad \omega(t) = t \ln(t) + (c - \ln(2\pi))t.$$

Переходя к бесконечному ряду по степеням $\varphi/2 - T$, получаем нелинейное уравнение

$$x(\ln(T) - a) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k(k-1)} = 1 - c + \mathcal{O}(T^{-2/3+\epsilon}), \quad x = \frac{T - \varphi/2}{T}, \quad (6.1)$$

где $a = \ln(2\pi) - 1 - c$. Поскольку (см. (5.1), (5.2))

$$x = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln(T)}\right),$$

из (6.1) имеем

$$x = \frac{1-c}{\ln(T)-a} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^3(T)}\right) \quad \Rightarrow \quad T - \frac{\varphi(T)}{2} = \frac{(1-c)T}{\ln(T)} \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln(T)}\right) \right\},$$

и отсюда, пользуясь теоремой Сельберга–Эрдёша, получаем формулу

$$\pi(T) \sim \frac{1}{1-c} \left\{ T - \frac{\varphi(T)}{2} \right\}, \quad T \rightarrow \infty, \quad \text{для всех } \varphi \in \{\varphi\}. \quad (6.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Итак, лестницы Якова связаны не только с нулями функции $\zeta(1/2 + it)$ (см. (1.5)), но и с функцией числа простых чисел $\pi(T)$, (см. (6.2)).

Из нелинейного уравнения (6.1) можно получить больше интересной информации. Полагая в (6.1)

$$Te^{-a} = \tau, \quad e^{-a}\varphi(e^a\tau) = \psi(\tau), \quad (6.3)$$

получаем

$$x \ln(\tau) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k(k-1)} = 1 - c + \mathcal{O}(\tau^{-2/3+\epsilon}), \quad x = \frac{\tau - \psi(\tau)/2}{\tau}. \quad (6.4)$$

Имеет место следующее утверждение: если в выражении

$$x = \frac{A_1}{\ln(\tau)} + \frac{A_3}{\ln^3(\tau)} + \dots + \frac{A_n}{\ln^n(\tau)} + \frac{A_{n+1}}{\ln^{n+1}(\tau)} + \dots \quad (6.5)$$

коэффициенты $A_1, A_3, \dots, A_n$ уже определены, то A_{n+1} определяется из (6.4) однозначно. Получаем

$$A_1 = 1 - c, \quad A_3 = \frac{1}{2}(1-c)^2, \quad A_4 = \frac{1}{6}(1-c)^3, \quad A_5 = \frac{1}{2}(1-c)^3 + \frac{1}{12}(1-c)^4, \quad \dots$$

Переходя в (6.5) к первоначальным переменным (см. (6.3)), получаем асимптотическую формулу

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \left\{ T - \frac{\varphi(T)}{2} \right\} &\sim \frac{A_1}{\ln(T)-a} + \frac{A_3}{(\ln(T)-a)^3} + \dots \\ &\sim \frac{A_1}{\ln(T)} + \frac{B_2}{\ln^2(T)} + \frac{B_3}{\ln^3(T)} + \dots, \quad T \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $B_2 = aA_1$, $B_3 = a^2A_1 + A_3$, $\dots$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Асимптотическая формула (6.6) является аналогом асимптотической формулы

$$\frac{1}{T} \int_2^T \frac{dt}{\ln(t)} \sim \frac{1}{\ln(T)} + \frac{1}{\ln^2(T)} + \frac{2!}{\ln^3(T)} + \dots$$

для интегрального логарифма Гаусса.

7. Основные свойства Z^2 -преобразования. Отметим явно, что основным средством доказательства теоремы является новый тип интегрального преобразования – Z^2 -преобразования, введенного в этой работе.

Используя терминологию из оптики (см., например, [9; с. 167]):

- элементы $\mu(y) \in \{\mu\}$ назовем *лучами* и множество $\{\mu\}$ – *пучком лучей*;
- пучки лучей, которые пересекаются в одной точке, назовем *гомоцентрическими пучками*.

Основные свойства Z^2 -преобразования выражаются следующим образом:

- пучок $\{\mu(y)\}$ (в том числе и гомоцентрический пучок) отображается на гомоцентрический пучок $\{\varphi\}$ относительно точки $[\infty, \infty]$ (см. (2.3), (2.4));
- преобразованный пучок $\{\varphi\}$ является сильно локализованным в смысле (2.4), т.е. “ Z^2 -оптическое устройство” генерирует аналог лазерного пучка.

Например, для гомоцентрического относительно точки $[y_0, y_0^2]$ пучка лучей

$$u(y; \rho, n) = y^2[1 + \rho(y - y_0)^n], \quad \rho \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7.1)$$

из равенства $u_0(y + \Delta; 0, n) = u_1(y; 1, n)$ получаем, что

$$\Delta = \frac{y(y - y_0)^n}{\sqrt{1 + (y - y_0)^2}} \rightarrow \infty \quad \text{при } y \rightarrow \infty,$$

т.е. пучок лучей (7.1) расходится. Однако Z^2 -преобразование отображает пучок (7.1) на аналог лазерного пучка $\{\varphi_u\}$.

8. Об интервалах, которые недоступны для оценок Хиз-Брауна и Ивича. Мы продемонстрируем точность нашей формулы (2.1) в сравнении с известными оценками Хиз-Брауна и Ивича (см. [5; (7.20), с. 178, и (7.62), с. 191])

$$\int_T^{T+G} Z^2(t) dt = \mathcal{O}\left(G \ln^2(T)\right), \quad G = T^{1/3-\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 = \frac{1}{108}. \quad (8.1)$$

Прежде всего, из (2.1) и (8.1) легко получается *закон тангенса*:

$$\int_T^{T+U} Z^2(t) dt = U \ln\left(e^{-a} \frac{\varphi(T)}{2}\right) \tan[\alpha(T, U)] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^{1/3+2\epsilon_0}}\right) \quad (8.2)$$

для $0 < U < T^{1/3+\epsilon_0}$, где $\alpha = \alpha(U, T)$ – угол хорды кривой $y = \varphi(T)/2$, соединяющей точки $[T, \varphi(T)/2]$, $[T + U, \varphi(T + U)/2]$. Далее, из (2.1), (2.5) имеем

$$\tan(\alpha_0) = \tan[\alpha(T, U_0)] = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln(T)}\right), \quad U_0 = T^{1/3+2\epsilon}. \quad (8.3)$$

Наконец, рассматривая множество всех хорд кривой $y = \varphi(T)/2$, параллельных фундаментальной хорде, соединяющей точки $[T, \varphi(T)/2]$, $[T + U, \varphi(T + U)/2]$, мы получим континуум-множество формул:

$$\int_a^b Z^2(t) dt = (b - a) \ln(T) + \mathcal{O}(b - a) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^{1/3+2\epsilon_0}}\right),$$

$$0 < b - a < 1, \quad (a, b) \subset (T, T + T^{1/3+\epsilon_0}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Совершенно ясно, что интервал $(0, 1)$ является недоступным для известных теорий, сводящихся к оценкам типа Хиз-Брауна и Ивича.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, “Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes”, *Acta Math.*, **41**:1 (1916), 119–196.
- [2] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Clarendon Press, Oxford, 1951.
- [3] F. V. Atkinson, “The mean value of the zeta-function on critical line”, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, **10** (1939), 122–128.
- [4] H. Kober, “Eine Mittelwertformel der Riemannschen Zetafunktion”, *Compositio Math.*, **3** (1936), 174–189.
- [5] E. C. Titchmarsh, “The mean-value of the zeta-function on the critical line”, *Proc. London. Math. Soc.* (2), **27** (1928), 137–150.
- [6] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function. The theory of the Riemann zeta-function with applications*, Wiley-Intersci. Publ., John Wiley & Sons, New York, NY, 1985.
- [7] A. Good, “Ein Ω -Resultat für das quadratische Mittel der Riemannschen Zetafunktion auf der kritischen Linie”, *Invent. Math.*, **41**:3 (1977), 233–251.
- [8] R. Balasubramanian, “An improvement on a theorem of Titchmarsh on the mean square of $|\zeta(\frac{1}{2} + it)|$ ”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **36**:3 (1978), 540–576.
- [9] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. т. 2: Теория поля*, ГИФМЛ, М., 1962.

Я. Мозер

Comenius University, Братислава, Словакия

E-mail: jan.mozer@fmph.uniba.sk

Поступило

21.04.2009