Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Резвякова, О нулях на критической прямой L -функций, соответствующих автоморфным параболическим формам, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 3, 456–475

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8817>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:40:25

О нулях на критической прямой L -функций, соответствующих автоморфным параболическим формам

И. С. Резвякова

Рассмотрим автоморфную параболическую форму целого веса $k \geq 1$, являющуюся собственной функцией всех операторов Гекке. В работе доказано, что для L -ряда, чьи коэффициенты соответствуют коэффициентам Фурье такой автоморфной формы, положительная доля нетривиальных нулей лежит на критической прямой.

Библиография: 31 название.

*Посвящается моему учителю
Карацубе Анатолию Алексеевичу*

1. Введение. Формулировка основного результата. В теории дзета-функции Римана наиболее интересным вопросом является гипотеза Римана, которая утверждает, что все нетривиальные нули дзета-функции Римана лежат на критической прямой. Гипотеза Римана до сих пор не доказана и не опровергнута. В 1942 г. Сельберг [1] доказал, что положительная доля нетривиальных нулей дзета-функции Римана лежит на критической прямой (о количественных оценках см. работы [2]–[7]). Аналогичный результат справедлив и для L -функций Дирихле (см. [8]). Сельберг в своем докладе на конференции в Амальфи в 1989 г. предположил, что для всех функций из класса S Сельберга (которые как необходимое условие имеют эйлерово произведение и функциональное уравнение риманова типа) справедлив аналог гипотезы Римана (см. [9]).

Дзета-функция Римана и L -функции Дирихле являются функциями степени 1 (определение степени, являющейся характеристикой функционального уравнения, см. в [9]). Аналог теоремы Сельберга для функции степени 2 был доказан в 1983 г. Хафнером. В его работах [10], [11] содержится результат о том, что положительная доля нетривиальных нулей лежит на критической прямой для L -рядов, чьи коэффициенты соответствуют коэффициентам голоморфных параболических форм (модулярных форм) или неголоморфных параболических форм (форм Маасса) относительно полной модулярной группы с тривиальным характером (необходимые определения см. ниже и в [12]). Данная работа продолжает работы [10], [11] и дополняет исследования статьи [13]. В работе [13] рассматривается задача о нулях на критической прямой линейных комбинаций L -функций Гекке, которые являются

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (грант № МК-4052.2009.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00371а).

функциями степени два. В общем случае для линейных комбинаций L -рядов из класса S аналог гипотезы Римана не имеет места, т.е. они имеют достаточно много комплексных нулей вне критической прямой (см. [14]–[16] и [17; гл. VI, § 5]). Тем не менее, и для таких функций критическая прямая является “особым множеством”, где находится большая часть нетривиальных нулей.

Функция Давенпорта–Хейльбронна, которая равна линейной комбинации двух L -рядов Дирихле, является примером функции, для которой аналог гипотезы Римана не выполняется. В 1980 г. Воронин [18] показал, что для $N_0(T)$ – количества нулей функции Давенпорта–Хейльбронна на интервале $\{1/2 + it \mid 0 < t \leq T\}$ критической прямой – справедлива оценка

$$N_0(T) \gg T \exp\left(\frac{1}{20} \sqrt{\ln \ln \ln T}\right).$$

В 1989 г. Карацуба [19] получил следующее усиление результата Воронина с помощью нового подхода, основанного на методе Сельберга:

$$N_0(T) \gg T(\ln T)^{1/2-\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно маленькое положительное число. В 1992 г. Карацуба [20] уточнил свой предыдущий результат, получив оценку

$$N_0(T) \gg T\sqrt{\ln T} \exp(-c\sqrt{\ln \ln T}),$$

где c – абсолютная постоянная.

Методы Воронина и Карацубы позволяют получать аналогичные результаты и для других линейных комбинаций L -функций Дирихле. В этом случае применение метода Карацубы дает оценку вида

$$N_0(T) \gg T(\ln T)^\beta \exp(-c\sqrt{\ln \ln T}),$$

где $0 < \beta < 1$ и число β зависит от модулей характеров, соответствующих L -функциям, входящим в рассматриваемую линейную комбинацию.

Гриценко [21], [22] рассмотрел задачу о нулях на критической прямой линейных комбинаций рядов Дирихле из класса S степени 2. Он доказал, что если коэффициенты рассматриваемых рядов удовлетворяют некоторым условиям, то для функции, равной их линейной комбинации, справедлива оценка снизу

$$N_0(T) \geq T \exp(\sqrt{\ln \ln \ln T})$$

(более точную формулировку см. в [21]). В 1997 г. Гриценко [23] улучшил свой предыдущий результат, доказав, что

$$N_0(T) \geq T(\ln \ln T)^\beta,$$

где постоянная $\beta > 0$ зависит от функций, входящих в линейную комбинацию. В работе [24] Гриценко показал, что необходимые условия на коэффициенты выполняются для L -функций с комплексными характерами Гекке на группе классов идеалов одного и того же мнимого квадратичного расширения поля $\mathbb{Q}$; тем самым, оценки $N_0(T)$ снизу, полученные Гриценко, являются безусловными для линейных комбинаций L -функций Гекке.

В работе [13] для линейных комбинаций L -функций Гекке мы получаем результат, аналогичный результату Карацубы о количестве нулей на критической прямой для линейных комбинаций L -функций Дирихле. А именно, справедливо следующее утверждение: *пусть ψ_j – комплексные характеры Гекке на группе классов идеалов мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, a_j – вещественные числа; тогда для функции*

$$f(s) = \sum_j a_j L(s, \psi_j)$$

имеет место следующая оценка числа нулей нечетного порядка на промежутке $\{s = 1/2 + it, 0 < t \leq T\}$ критической прямой при любом достаточно большом значении T :

$$N_0(T) \gg T(\ln T)^{2/h} e^{-c\sqrt{\ln \ln T}},$$

где $h = h(-D)$ – число классов, c – абсолютная постоянная.

Методы, разработанные в [13], позволяют получить аналог теоремы Сельберга для L -функций, связанных с автоморфными относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(D)$ формами произвольного целого веса $k \geq 1$ (теорема 1). Напомним вначале некоторые определения и обозначения.

Пусть $f(z)$ – автоморфная параболическая форма целого веса $k \geq 1$ относительно группы $\Gamma_0(D)$ с характером χ по модулю D (коротко это будем записывать как $f \in S_k(\Gamma_0(D), \chi)$), где $\Gamma_0(D)$ есть подгруппа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, которая состоит из матриц $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, удовлетворяющих условию $c \equiv 0 \pmod{D}$. Иначе говоря, пусть f является голоморфной функцией на верхней полуплоскости такой, что для любого элемента $\gamma \in \Gamma_0(D)$ выполняется соотношение

$$f(\gamma z) = \chi(\gamma)(cz + d)^k f(z), \quad \text{где } \chi(\gamma) = \chi(d), \quad \gamma z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1.1)$$

а также f обращается в нуль во всех параболических точках группы $\Gamma_0(D)$. Отсюда следует, что для $f(z)$ существует представление

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a(n) e^{2\pi i n z} \quad \text{при } \operatorname{Re} z > 0.$$

Пусть, далее, функция f не тождественно нулевая и является собственной функцией всех операторов Гекке T_n , $n = 1, 2, \dots$, где

$$T_n f(z) = \frac{1}{n} \sum_{ad=n} \chi(a) a^k \sum_{0 \leq b < d} f\left(\frac{az + b}{d}\right). \quad (1.2)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что коэффициент $a(1) = 1$. Тогда из свойств операторов Гекке будет следовать равенство $T_n f = a(n)f$ при каждом натуральном n , а также при $\operatorname{Re} s > 1$ для ряда Дирихле

$$L(s) = L_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r(n)}{n^s}, \quad (1.3)$$

где

$$r(n) = a(n)n^{(1-k)/2}, \quad (1.4)$$

будет верно тождество

$$L(s) = \prod_p \left(1 - \frac{r(p)}{p^s} + \frac{\chi(p)}{p^{2s}} \right)^{-1}$$

(здесь произведение берется по всем подряд идущим простым числам). Для коэффициентов $r(n)$, соответствующих нормированным коэффициентам автоморфной (относительно конгруэнц-подгруппы) параболической формы целого веса, которая является собственной функцией всех операторов Гекке, справедлива оценка

$$|r(n)| \leq \tau(n),$$

где $\tau(n)$ – число делителей n . Это неравенство было известно как гипотеза Рамануджана–Петерсона, пока его справедливость не была доказана в работах [25], [26]. Функция $L(s)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению (см. [12; § 6.7, § 7.2]):

$$\Lambda(s) = \theta \cdot \overline{\Lambda(1 - \bar{s})},$$

где $\Lambda(s)$ – целая функция,

$$\Lambda(s) = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{D}} \right)^{-s-(k-1)/2} \Gamma\left(s + \frac{k-1}{2}\right) L(s),$$

и $|\theta| = 1$, или, более точно, $\theta = i^k \bar{\eta}$, а η есть собственное значение оператора $\bar{W}$,

$$\bar{W}f = (-1)^k D^{-k/2} z^{-k} f\left(\frac{1}{D\bar{z}}\right), \quad \bar{W}f = \eta f.$$

Функция $L(s)$ имеет нули в точках

$$s = -\frac{k-1}{2}, -\frac{k-1}{2} - 1, -\frac{k-1}{2} - 2, \dots,$$

которые соответствуют полюсам функции $\Gamma(s + (k-1)/2)$ и называются *тривиальными нулями*. Остальные нули лежат в полосе $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$ и называются *нетривиальными нулями*. Функция $L(s)$ является функцией степени 2 и принадлежит к классу Сельберга. Следовательно, для нее существует аналог гипотезы Римана о том, что все ее нетривиальные нули лежат на критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. В данной работе мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a(n)e^{2\pi inz}$ – параболическая автоморфная форма целого веса $k \geq 1$ относительно группы $\Gamma_0(D)$ с характером χ по модулю D , которая является собственной функцией всех операторов Гекке T_n , $n = 1, 2, \dots$. Пусть функция $L(s) = L_f(s)$ определена равенствами (1.3) и (1.4), а $N_0(T)$ – количество нулей нечетного порядка функции $L(s)$ на интервале $\{s = 1/2 + it, 0 < t \leq T\}$. Тогда $N_0(T) \geq cT \ln T$, где $c > 0$ – некоторая постоянная.

Заметим, что поскольку для $N(T)$ – количества нулей функции $L(s)$ в прямоугольнике $\{s \mid 0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1, 0 < \operatorname{Im} s \leq T\}$ – справедлива асимптотическая формула

$$N(T) = \frac{T}{\pi} \ln \frac{T}{\pi c_1} + O(\ln T) \quad \text{при } T \rightarrow +\infty,$$

выполнено

СЛЕДСТВИЕ 1. Положительная доля нетривиальных нулей функции $L_f(s)$ лежит на критической прямой.

Примером функции $L(s)$, рассматриваемой в настоящей работе, является L -функция Гекке с комплексным характером на группе классов идеалов мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ (поскольку ей соответствует форма f из $S_1(\Gamma_0(D), \chi_D)$).

2. Основные и вспомогательные утверждения. Везде далее мы будем полагать, что k (вес формы f) и D (уровень формы f) – фиксированные числа.

Основная идея доказательства принадлежит Сельбергу и связана с введением “успокаивающего множителя”. Зададим числа $\alpha(\nu)$ равенством

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \alpha(\nu) \nu^{-s} = \prod_{p>256} \left(1 - \frac{r(p)}{2p^s}\right). \quad (2.1)$$

Пусть $X \geq 3$; положим

$$\beta(\nu) = \alpha(\nu) \left(1 - \frac{\ln \nu}{\ln X}\right)^+, \quad \text{где } x^+ = \max(0, x), \quad (2.2)$$

и определим успокаивающий множитель $\varphi(s)$ формулой

$$\varphi(s) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \beta(\nu) \nu^{-s}.$$

Пусть $\delta > 0$,

$$\mathfrak{F}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Lambda\left(\frac{1}{2} + it\right) \left| \varphi\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 \exp\left(\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)t\right). \quad (2.3)$$

Из функционального уравнения для $L(s)$ следует, что функция $\theta^{-1/2} \mathfrak{F}(t)$ вещественная при вещественных t . Заметим, что нули нечетного порядка функции $\theta^{-1/2} \mathfrak{F}(t)$ являются нулями нечетного порядка функции $L(1/2 + it)$.

При $0 < h_1 < 1$ положим

$$I_1(t) = \int_{-h_1}^{h_1} |\theta^{-1/2} \mathfrak{F}(t+u)| du = \int_{-h_1}^{h_1} |\mathfrak{F}(t+u)| du, \\ I_2(t) = \left| \int_{-h_1}^{h_1} \theta^{-1/2} \mathfrak{F}(t+u) du \right| = \left| \int_{-h_1}^{h_1} \mathfrak{F}(t+u) du \right|.$$

Пусть $T > 1$ – достаточно большое число. Определим множество E_1 как множество точек $t \in (1, T)$ таких, что при $t \in E_1$ выполняется неравенство

$$I_1(t) > I_2(t).$$

Через E_2 обозначим дополнение ко множеству E_1 , т.е. множество точек $t \in (1, T)$, где

$$I_1(t) = I_2(t).$$

Если $\mu(E_1)$ – мера множества E_1 , то количество нулей нечетного порядка функции $\theta^{-1/2} \mathfrak{F}(t)$ на промежутке $(0, T)$ не меньше, чем $\mu(E_1)/2h_1 - 1$ (см. [1], [17] или [13]).

Теперь основное утверждение данной работы является следствием следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < \delta < \delta_0$, где $\delta_0 < 1/10$ – некоторое достаточно маленькое положительное число, $0 < h_1 < 1$, $X \geq 3$ и $\delta X^{86} e^{1/h_1} \leq 1$. Тогда справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \int_1^{\delta^{-1}} I_1(t) dt &\gg \delta^{-1} h_1; & \text{b)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} I_1^2(t) dt &\ll \delta^{-1} \frac{h_1^2 \ln \delta^{-1}}{\ln X}; \\ \text{c)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} I_2^2(t) dt &\ll \delta^{-1} \frac{h_1}{\ln X}, \end{aligned}$$

причем постоянные в знаках Виноградова $\ll, \gg$ абсолютные.

Для доказательства основного результата положим в теореме 2

$$\delta = T^{-1}, \quad X = T^{1/100}, \quad h_1 = \frac{A}{\ln X},$$

где A – достаточно большая положительная постоянная, и запишем следующую цепочку соотношений:

$$I_3 = \int_1^T I_1(t) dt = \int_{E_1} I_1(t) dt + \int_{E_2} I_1(t) dt = \int_{E_1} I_1(t) dt + \int_{E_2} I_2(t) dt \leq I_1 + I_2,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{E_1} I_1(t) dt \leq (\mu(E_1))^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} I_1^2(t) dt \right)^{1/2}, \\ I_2 &= \int_1^T I_2(t) dt \leq T^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} I_2^2(t) dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Результат с) теоремы 2 влечет, что

$$I_2 \ll T \left(\frac{h_1}{\ln X} \right)^{1/2}.$$

Следовательно, ввиду оценки а), если значение постоянной A достаточно велико, то

$$I_3 \geq 2I_2.$$

Поэтому $I_1 \geq I_3/2$, и соотношения а) и б) теоремы 2 дают оценки

$$Th_1 \ll I_3 \leq 2I_1 \ll (\mu E_1)^{1/2} \left(Th_1^2 \frac{\ln T}{\ln X} \right)^{1/2}$$

или

$$\mu(E_1) \gg T.$$

Таким образом, количество нулей нечетного порядка функции $\theta^{-1/2} \mathfrak{F}(t)$ (или функции $L(1/2 + it)$) на интервале $0 < t \leq T$ оценивается снизу величиной порядка

$$\mu(E_1) h_1^{-1} \gg T \ln X \gg T \ln T.$$

Теперь остается получить утверждение теоремы 2.

Доказательство утверждения а) теоремы 2 повторяет доказательство аналогичного соотношения при рассмотрении вместо $L(s)$ дзета-функции Римана (см. [17; § 6.3]).

Для доказательства утверждений б) и с) теоремы 2 нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

ЛЕММА 1. Пусть функция $\mathfrak{F}(y)$ определена формулой (2.3),

$$G(y) = \left| \sum_{n, \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}} \frac{r(n)\beta(\nu_1)\overline{\beta(\nu_2)}}{\nu_2} \exp\left(-\frac{2\pi n\nu_1}{\sqrt{D}\nu_2} y(\sin \delta + i \cos \delta)\right) \right|^2. \quad (2.4)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-h_1}^{h_1} |\mathfrak{F}(t+u)| du \right)^2 dt &\leq 8h_1^2 \int_1^{+\infty} G(y) dy, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-h_1}^{h_1} \mathfrak{F}(t+u) du \right|^2 dt &\leq 8h_1^2 \int_1^H G(y) dy + 8 \int_H^{+\infty} \frac{G(y)}{\ln^2 y} dy, \end{aligned}$$

где $H = e^{1/h_1}$.

Доказательство этого результата содержится в работе [13; леммы 3 и 4].

Сформулируем теперь основные леммы, из которых утверждение теоремы 2 будет легко следовать.

ЛЕММА 2. Пусть функция $G(y)$ определена формулой (2.4). При условиях теоремы 2 и при $1 \leq x \leq e^{1/h_1}$ справедлива оценка

$$J(x, \theta) = \int_x^{+\infty} G(u)u^{-\theta} du \ll \frac{\delta^{-1}}{\theta x^\theta \ln X},$$

равномерная по θ из промежутка $0 < \theta \leq 1/4$.

Основную часть доказательства леммы 2 составляют следующие две леммы. Лемма 3 относится к оценке “диагонального” слагаемого (оценке сумм Сельберга), а лемма 4 – к оценке “недиагонального” слагаемого. Примем далее следующие обозначения:

- $\overline{K}(s) = \overline{K(\overline{s})}$;
- $p^\alpha \parallel m$ означает, что $p^\alpha \mid m$, но $p^{\alpha+1} \nmid m$.

ЛЕММА 3. Пусть $0 \leq \theta \leq 1/4$. Определим сумму $S(\theta)$ равенством

$$S(\theta) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_4 \leq X} \frac{\beta(\nu_1)\overline{\beta(\nu_2)}\overline{\beta(\nu_3)}\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} \left(\frac{q}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} K\left(\frac{\nu_1\nu_4}{q}, 1-\theta\right) \overline{K}\left(\frac{\nu_2\nu_3}{q}, 1-\theta\right),$$

где

$$q = (\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3),$$

$$\begin{aligned} K(m, s) &= \prod_{p \mid m} \left(1 + \frac{|r^2(p)|}{p^s} + \frac{|r^2(p^2)|}{p^{2s}} + \dots \right)^{-1} \\ &\times \prod_{p^\alpha \parallel m} \left(\overline{r(p^\alpha)} + \frac{\overline{r(p^{\alpha+1})}r(p)}{p^s} + \frac{\overline{r(p^{\alpha+2})}r(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Тогда имеет место оценка

$$S(\theta) \ll \frac{X^{2\theta}}{\ln X},$$

равномерная по θ .

ЛЕММА 4. Пусть $N \gg 1$, $(m_1, m_2) = 1$, $m_1^8 m_2^9 \leq N$, $l \leq N^{10/11}$,

$$S = \sum_{n=1}^{N-1} r(n) r\left(\frac{m_1 n + l}{m_2}\right)$$

(где полагаем, что функция $r(\cdot)$ от нецелого аргумента равна нулю). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедлива следующая оценка:

$$S \ll_{\varepsilon} N^{10/11+\varepsilon} m_1^{8/11} m_2^{-2/11}.$$

Из леммы 4 получаем следующее

СЛЕДСТВИЕ 2. Функция

$$D_{m_1, m_2}(s, l) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r(n) \overline{r((m_1 n + l)/m_2)}}{(m_1 n + l/2)^s}$$

аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re} s > 10/11$, и при этом, если $0 < \varepsilon_0 \leq 1/11$, то в области $\operatorname{Re} s \geq 10/11 + \varepsilon_0$ имеет место оценка

$$D_{m_1, m_2}(s, l) \ll_{\varepsilon_0} \frac{|s|}{m_1^{10/11+\varepsilon_0} m_2} ((m_1^8 m_2^9)^{1/11-\varepsilon_0/2} + l^{1/10-11\varepsilon_0/20}).$$

Доказательство следствия 2 из леммы 4 содержится в работе [13]. Основным инструментом для получения утверждения леммы 4 является вариант кругового метода Ютилы [27], [28], которым мы также пользовались при доказательстве аналогичного результата в [13; лемма 7], сформулированного там для коэффициентов $r(n)$ автоморфных параболических форм веса $k = 1$. Изменение при доказательстве утверждения для произвольного веса k состоит в том, что надо воспользоваться следующим обобщением леммы 10 из [13]: пусть $q \equiv 0 \pmod{D}$, $(a, q) = 1$, $aa^* \equiv 1 \pmod{q}$, $k(t)$ – гладкая функция (например, дважды непрерывно дифференцируемая) с конечным носителем на $(0, +\infty)$; тогда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r(n) k(n) e^{2\pi i n a / q} = \overline{\chi(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} r(n) e^{-2\pi i n a^* / q} \tilde{k}(n),$$

где

$$\tilde{k}(n) = \frac{2\pi i^k}{q} \int_0^{+\infty} k(t) J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{nt}}{q}\right) dt,$$

а $J_{k-1}(t)$ – функция Бесселя.

Для получения приведенного соотношения требуется заметить, что для автоморфной параболической формы $f \in S_k(\Gamma_0(D), \chi)$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a(n) e^{2\pi i n z},$$

справедливо равенство

$$f\left(\frac{a}{q} + iw\right) = \frac{\overline{\chi(a)}}{(-iqw)^k} f\left(-\frac{a^*}{q} - \frac{1}{iq^2 w}\right), \quad \operatorname{Re} w > 0, \quad (2.5)$$

откуда будет следовать соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} a(n)k(n)e^{2\pi ina/q} \\ &= i^{k-1} \frac{\overline{\chi(a)}}{q^k} \sum_{n=1}^{+\infty} a(n)e^{-2\pi ina^*/q} \int_0^{+\infty} k(t) \left(\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{w^k} e^{-2\pi n/q^2 w} e^{2\pi tw} dw \right) dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В силу тождества

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{as-bs^{-1}}}{s^k} ds = \left(\frac{a}{b}\right)^{(k-1)/2} J_{k-1}(2\sqrt{ab}),$$

справедливого при $a, b, c > 0$, $k \geq 1$ (см. [29; § 7.3.3]), получаем, что интеграл, взятый в скобки в предыдущем соотношении, равен

$$2\pi i q^{k-1} \left(\frac{t}{n}\right)^{(k-1)/2} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{nt}}{q}\right).$$

Для завершения доказательства вспомогательного утверждения осталось взять в формуле (2.6) функцию $k(t) = k_1(t)t^{(1-k)/2}$ и вспомнить, что $r(n) = a(n)n^{(1-k)/2}$.

3. Доказательство утверждений б) и с) теоремы 2. Получим утверждения б) и с) теоремы 2 с помощью сформулированных лемм.

Доказательство утверждения с). При $H = e^{1/h_1}$ воспользуемся леммой 2, положив $\theta = 1/4$. Получим оценку

$$\begin{aligned} \int_1^H G(x) dx &= - \int_1^H x^\theta \frac{d}{dx} J(x, \theta) dx = -x^\theta J(x, \theta)|_{x=1}^{x=H} + \theta \int_1^H x^{\theta-1} J(x, \theta) dx \\ &\ll \frac{\delta^{-1}}{\theta \ln X} + \frac{\delta^{-1} \ln H}{\ln X} \ll \frac{\delta^{-1}}{h_1 \ln X}. \end{aligned}$$

Аналогично при $\theta = 1/4$ имеем

$$\begin{aligned} \int_H^{+\infty} \frac{G(x)}{\ln^2 x} dx &= - \int_H^{+\infty} \frac{x^\theta}{\ln^2 x} \frac{d}{dx} J(x, \theta) dx \\ &= - \frac{x^\theta}{\ln^2 x} J(x, \theta) \Big|_{x=H}^{x=+\infty} + \int_H^{+\infty} J(x, \theta) x^\theta \left(\frac{\theta}{x \ln^2 x} - \frac{2}{x \ln^3 x} \right) dx \\ &\ll \frac{\delta^{-1}}{\theta \ln X \ln^2 H} + \frac{\delta^{-1}}{\ln X \ln H} + \frac{\delta^{-1}}{\theta \ln X \ln^2 H} \ll \frac{\delta^{-1} h_1}{\ln X}. \end{aligned}$$

Теперь утверждение с) следует из леммы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ b). Применим лемму 2, положив в ней $x = 1$, $\theta = 1/\ln \delta^{-1}$. Получим

$$\int_1^{\delta^{-2}} G(u) du \ll \int_1^{+\infty} G(u) u^{-1/\ln \delta^{-1}} du \ll \frac{\delta^{-1} \ln \delta^{-1}}{\ln X}.$$

Используя формулу (2.4), интеграл на промежутке $(\delta^{-2}, +\infty)$ от функции $G(u)$ оценим следующим выражением:

$$\begin{aligned} \int_{\delta^{-2}}^{+\infty} G(u) du &\ll \sum_{\substack{n_1, n_2 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4}} \frac{|r(n_1)r(n_2)\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)|}{\nu_2\nu_4} \\ &\quad \times \int_{\delta^{-2}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{D}}\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2} + \frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right)\delta x\right) dx. \end{aligned}$$

Пусть

$$A = \frac{2\pi}{\sqrt{D}}\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2} + \frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right)\delta.$$

Из равенства

$$\int_{\delta^{-2}}^{+\infty} \exp(-Ax) dx = \frac{e^{-A\delta^{-2}}}{A}$$

получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \int_{\delta^{-2}}^{+\infty} G(u) du &\ll \delta^{-1} \sum_{\substack{n_1, n_2 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4}} \frac{|r(n_1)r(n_2)\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)|}{(n_1\nu_1\nu_4 + n_2\nu_2\nu_3)} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{D}}\delta^{-1}\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2} + \frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right)\right) \\ &\ll \delta^{-1} \sum_{\substack{n_1, n_2 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4}} \frac{|r(n_1)r(n_2)\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)|}{\sqrt{n_1n_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{D}}\delta^{-1}\left(\frac{n_1\nu_1}{\nu_2} + \frac{n_2\nu_3}{\nu_4}\right)\right) \\ &\leq \delta^{-1} \left(\sum_{\nu_1, \nu_2 \leq X} \frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \sum_n \frac{|r(n)|}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{D}} \frac{n\nu_1}{\nu_2} \delta^{-1}\right) \right)^2. \end{aligned}$$

Поскольку $|r(n)| \leq \tau(n)$, а $\nu_2 \leq X \leq \delta^{-1/3}$, то

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|r(n)|}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{D}} \frac{n\nu_1}{\nu_2} \delta^{-1}\right) \ll \exp(-\sqrt{\delta^{-1}}).$$

Следовательно,

$$\int_{\delta^{-2}}^{+\infty} G(u) du \ll \delta^{-1} X \exp(-\sqrt{\delta^{-1}}) \ll 1.$$

Теперь утверждение b) теоремы 2 следует из леммы 1.

4. Доказательство основной леммы 2. Аналогично доказательству леммы 5 работы [13] введем неотрицательный сглаживающий множитель $\phi(u) \in \mathbb{C}^2(0, +\infty)$, обладающий свойством

$$\phi(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{если } u \geq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$J(x, \theta) \leq \int_0^{+\infty} \phi\left(\frac{u}{x}\right) G(u) u^{-\theta} du = x^{1-\theta} \int_0^{+\infty} \phi(u) G(ux) u^{-\theta} du. \quad (4.1)$$

Для оценки последнего интеграла нам понадобится несколько вспомогательных соотношений. При $\operatorname{Re} s > 1$ определим

$$\Phi(s, y) = \int_0^{+\infty} \phi(u) u^{-s} \exp(-2\pi i y u) du.$$

Будем иметь

$$\Phi^*(s) := \int_0^{+\infty} \phi'(u) u^{-s+1} du = (s-1)\Phi(s, 0).$$

Поскольку ϕ' является функцией с компактным носителем, то $\Phi^*(s)$ – целая функция. Таким образом, $\Phi^*(s)$ аналитически продолжает функцию $(s-1)\Phi(s, 0)$ на всю комплексную плоскость. Также, если $\operatorname{Re} s$ принадлежит некоторому ограниченному интервалу, то справедлива оценка

$$\Phi^*(s) = O(1),$$

где постоянная в знаке O абсолютная. При $y > 0$, проинтегрировав два раза по частям, найдем

$$\Phi(s, y) = O(|s|^2 y^{-2}).$$

Возводя в выражении (2.4) для $G(x)$ модуль суммы в квадрат, получим

$$\begin{aligned} G(x) = & \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4} \frac{\beta(\nu_1) \overline{\beta(\nu_2)} \overline{\beta(\nu_3)} \beta(\nu_4)}{\nu_2 \nu_4} \\ & \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty} r(n) r\left(\frac{nm_1}{m_2}\right) \exp\left(-\frac{4\pi}{\sqrt{D}} \frac{nm_1}{Q} x \sin \delta\right) \right. \\ & \quad \left. + 2 \operatorname{Re} \sum_{l \geq 1} \exp\left(-\frac{2\pi i}{\sqrt{D}} \frac{l}{Q} x \cos \delta\right) \right. \\ & \quad \left. \times \sum_{n=1}^{+\infty} r(n) r\left(\frac{nm_1+l}{m_2}\right) \exp\left(-\frac{4\pi}{\sqrt{D}} \frac{(nm_1+l/2)}{Q} x \sin \delta\right) \right), \end{aligned}$$

где использованы следующие обозначения:

$$q = (\nu_1 \nu_4, \nu_2 \nu_3), \quad Q = \frac{\nu_2 \nu_4}{q}, \quad m_1 = \frac{\nu_1 \nu_4}{q}, \quad m_2 = \frac{\nu_2 \nu_3}{q}$$

(более подробно см. в [13]). Из формулы преобразования Меллина для гамма-функции Эйлера,

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} ds,$$

найдем

$$J(x, \theta) \leq J_1(x, \theta) + J_2(x, \theta),$$

где

$$\begin{aligned} J_1(x, \theta) &= x^{1-\theta} \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4} \frac{\beta(\nu_1) \overline{\beta(\nu_2)} \overline{\beta(\nu_3)} \beta(\nu_4)}{\nu_2 \nu_4} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} D_{m_1, m_2}(s, 0) \Gamma(s) B^{-s} \Phi(s + \theta, 0) ds \right), \\ J_2(x, \theta) &= 2x^{1-\theta} \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4} \frac{\beta(\nu_1) \overline{\beta(\nu_2)} \overline{\beta(\nu_3)} \beta(\nu_4)}{\nu_2 \nu_4} \\ &\quad \times \left(\operatorname{Re} \sum_{l \geq 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} D_{m_1, m_2}(s, l) \Gamma(s) B^{-s} \Phi(s + \theta, B_1 l) ds \right), \\ D_{m_1, m_2}(s, l) &= \sum_n \frac{r(n) \overline{r((m_1 n + l)/m_2)}}{(m_1 n + l/2)^s}, \quad B = \frac{4\pi x \sin \delta}{\sqrt{DQ}}, \quad B_1 = \frac{x \cos \delta}{\sqrt{DQ}}. \end{aligned}$$

Для заданного натурального числа m обозначим через $M_1(m)$ подмножество целых положительных чисел, состоящее из 1 и всех чисел, у которых множество простых делителей совпадает со множеством простых делителей числа m . Поскольку $(m_1, m_2) = 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} D_{m_1, m_2}(s) &= D_{m_1, m_2}(s, 0) = \frac{1}{(m_1 m_2)^s} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r(n m_2) \overline{r(n m_1)}}{n^s} \\ &= \frac{1}{(m_1 m_2)^s} K(m_1, s) \overline{K}(m_2, s) D(s), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|r(n)|^2}{n^s}, \\ K(m, s) &= \prod_{p|m} \left(1 + \frac{|r(p)|^2}{p^s} + \frac{|r(p^2)|^2}{p^{2s}} + \dots \right)^{-1} \\ &\quad \times \prod_{p^\alpha \| m} \left(\overline{r(p^\alpha)} + \frac{\overline{r(p^{\alpha+1})} r(p)}{p^s} + \frac{\overline{r(p^{\alpha+2})} r(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right) \\ &= \sum_{k \in M_1(m)} \frac{\overline{r(mk)} r(k)}{k^s} \left(\sum_{k \in M_1(m)} \frac{|r(k)|^2}{k^s} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Если простое число p делит m_j , то $p > 256$; отсюда получим, что при $\operatorname{Re} s \geq 1/2$

$$\left| 1 + \frac{|r(p)|^2}{p^s} + \frac{|r(p^2)|^2}{p^{2s}} + \dots \right| > 0$$

и, следовательно, при фиксированном m_j функция $K(m_j, s)$ является аналитической в области $\operatorname{Re} s \geq 1/2$. Кроме того, в этой области при $m = m_1$ или $m = m_2$

справедлива оценка

$$\begin{aligned}
 |K(m, s)| &\leq \prod_{p|m} \left(1 - \frac{2^2}{256^{1/2}} - \frac{3^2}{256} - \frac{4^2}{256^{3/2}} - \dots \right)^{-1} \\
 &\quad \times \tau(m) \prod_{p^\alpha || m} \left(1 + \frac{((\alpha+2)/(\alpha+1)) \cdot 2}{256^{1/2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{((\alpha+3)/(\alpha+1)) \cdot 3}{256} + \frac{((\alpha+4)/(\alpha+1)) \cdot 4}{256^{3/2}} + \dots \right) \\
 &\leq \tau(m) \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^3} - \dots \right)^{-1} \\
 &\quad \times \left(1 + \frac{(3/2) \cdot 2}{16} + \frac{(4/2) \cdot 3}{16^2} + \frac{(5/2) \cdot 4}{16^3} + \dots \right) \\
 &= \tau(m) \prod_{p|m} 2^3 \left(\sum_{n \geq 2} \frac{n(n-1)}{2 \cdot 16^{n-2}} \right) \leq \tau(m) \prod_{p|m} 3 \leq \tau(m) \tau_3(m) \leq \tau_6(m), \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

где $\tau_t(n) = \sum_{n_1 \dots n_t = n} 1$. Функция $D(s)$ имеет мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость с полюсом первого порядка в точке $s = 1$ (см. [30]). Отсюда следует мероморфная продолжимость функции $D_{m_1, m_2}(s)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} s > 1/2$.

Для оценки $J_1(x, \theta)$ перенесем контур интегрирования в интеграле

$$\begin{aligned}
 &\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} D_{m_1, m_2}(s) \Gamma(s) B^{-s} \Phi(s + \theta, 0) ds \\
 &= \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{K(m_1, s) \bar{K}(m_2, s) D(s) \Gamma(s) \Phi^*(s + \theta) (B m_1 m_2)^{-s}}{s + \theta - 1} ds
 \end{aligned}$$

на прямую $\operatorname{Re} s = 2/3$. При этом мы пройдем полюсы первого порядка в точках $s = 1$, $s = 1 - \theta$. Обозначив через $\mathfrak{D}$ вычет функции $D(s)$ при $s = 1$, получим

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} D_{m_1, m_2}(s) \Gamma(s) B^{-s} \Phi(s + \theta, 0) ds \\
 &= \frac{\mathfrak{D} K(m_1, 1) \bar{K}(m_2, 1) \Phi^*(1 + \theta)}{B m_1 m_2 \theta} \\
 &\quad + \frac{K(m_1, 1 - \theta) \bar{K}(m_2, 1 - \theta) D(1 - \theta) \Gamma(1 - \theta) \Phi^*(1)}{(B m_1 m_2)^{1-\theta}} + O\left(\frac{(m_1 m_2)^{1/3}}{(B m_1 m_2)^{2/3}}\right) \\
 &= \frac{c(\theta) K(m_1, 1) \bar{K}(m_2, 1)}{\theta x \sin \delta} \frac{q}{\nu_1 \nu_3} \\
 &\quad + \frac{c'(\theta) K(m_1, 1 - \theta) \bar{K}(m_2, 1 - \theta) D(1 - \theta)}{(x \sin \delta)^{1-\theta}} \left(\frac{q}{\nu_1 \nu_3}\right)^{1-\theta} \\
 &\quad + O\left(\frac{1}{(x \delta)^{2/3}} \frac{(\nu_2 \nu_4)^{1/3}}{(\nu_1 \nu_3)^{1/3}}\right),
 \end{aligned}$$

где $c(\theta)$, $c'(\theta)$ – постоянные, зависящие от θ и ограниченные при $0 < \theta \leq 1/4$. Воспользуемся оценкой $D(1-\theta) \ll \theta^{-1}$ и леммой 3; придем к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} J_1(x, \theta) &\ll \frac{|S(0)|}{\theta x^\theta \delta} + \frac{|S(\theta)|}{\theta \delta^{1-\theta}} + \frac{x^{1/3}}{x^\theta \delta^{2/3}} \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \leq X} \frac{1}{(\nu_1 \nu_3)^{1/3} (\nu_2 \nu_4)^{2/3}} \\ &\ll \frac{\delta^{-1}}{\theta x^\theta \ln X} \left(1 + (X^2 e^{1/h_1} \delta)^\theta + X^2 (\ln X) e^{1/3 h_1} \delta^{1/3} \right) \ll \frac{\delta^{-1}}{\theta x^\theta \ln X}, \end{aligned}$$

поскольку $X^3 e^{1/3 h_1} \delta^{1/3} \ll 1$.

Оценим теперь “недиагональное” слагаемое $J_2(x, \theta)$. Из следствия 2 леммы 4 следует, что в интеграле $J_2(x, \theta)$ можно перенести прямую интегрирования на $\text{Re } s = 11/12$. Используя утверждение леммы 4, получим оценку

$$\begin{aligned} J_2(x, \theta) &\ll x^{1-\theta} \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \leq X} \frac{1}{\nu_2 \nu_4} \sum_{l \geq 1} \frac{1}{B^{11/12} B_1^2 l^2} \left((m_1 m_2)^{-2/11} + l^{1/10} m_1^{-10/11} m_2^{-1} \right) \\ &\ll \frac{\delta^{-11/12}}{x^\theta} \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \leq X} \frac{Q^{2+11/12}}{\nu_2 \nu_4} (m_1 m_2)^{-2/11} \\ &\ll \frac{\delta^{-11/12}}{x^\theta} \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \leq X} \frac{Q^{1+11/12}}{q(m_1 m_2)^{2/11}} \\ &\ll \frac{\delta^{-11/12}}{x^\theta} \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \leq X} \frac{Q^{1+11/12}}{(\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4)^{2/11}} \ll \frac{\delta^{-11/12}}{x^\theta} (X^2)^{1+11/12} (X^{9/11})^4 \\ &\ll \frac{\delta^{-11/12}}{x^\theta} X^{469/66} \ll \frac{\delta^{-1}}{x^\theta \ln X}, \end{aligned}$$

поскольку $X \leq \delta^{-1/86}$. Лемма доказана.

5. Доказательство леммы 3: оценка сумм Сельберга. Применяя формулу обращения Мёбиуса к мультипликативной функции f ,

$$f(q) = \sum_{d|q} \sum_{m|d} \mu(m) f\left(\frac{d}{m}\right),$$

получим равенство

$$\begin{aligned} &q^{1-\theta} K\left(\frac{\nu_1 \nu_4}{q}, 1-\theta\right) \overline{K}\left(\frac{\nu_2 \nu_3}{q}, 1-\theta\right) \\ &= \sum_{d|q} \sum_{m|d} \mu(m) \left(\frac{d}{m}\right)^{1-\theta} K\left(\frac{\nu_1 \nu_4 m}{d}, 1-\theta\right) \overline{K}\left(\frac{\nu_2 \nu_3 m}{d}, 1-\theta\right). \end{aligned}$$

Подставим это соотношение в выражение для $S(\theta)$; найдем

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \leq X} \frac{\beta(\nu_1) \overline{\beta(\nu_2)} \overline{\beta(\nu_3)} \beta(\nu_4)}{\nu_2 \nu_4 (\nu_1 \nu_3)^{1-\theta}} \\ &\quad \times \sum_{d|q} \sum_{m|d} \mu(m) \left(\frac{d}{m}\right)^{1-\theta} K\left(\frac{\nu_1 \nu_4 m}{d}, 1-\theta\right) \overline{K}\left(\frac{\nu_2 \nu_3 m}{d}, 1-\theta\right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{d \leq X^2} \sum_{m|d} \mu(m) \left(\frac{d}{m} \right)^{1-\theta} |g(d, m)|^2,$$

где

$$g(d, m) = \sum_{\substack{\nu_1 \nu_4 \equiv 0 \pmod{d} \\ \nu_j \leq X}} \frac{\beta(\nu_1) \beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta} \nu_4} K \left(\frac{\nu_1 \nu_4 m}{d}, 1 - \theta \right).$$

Далее, представим числа ν_j в виде $\nu_j = \delta_j \nu'_j$, где $(\nu'_j, d) = 1$, а все простые делители δ_j совпадают с простыми делителями числа d , т.е. $\delta_j \in M_1(d)$. Тогда

$$g(d, m) = \sum_{\substack{\delta_1 \delta_4 \equiv 0 \pmod{d} \\ \delta_j \in M_1(d)}} \frac{1}{(\delta_1^{1-\theta} \delta_4)} \sum_{\substack{\delta_j \nu_j \leq X \\ (\nu_j, d)=1}} \frac{\beta(\delta_1 \nu_1) \beta(\delta_4 \nu_4)}{\nu_1^{1-\theta} \nu_4} K \left(\frac{\delta_1 \delta_4 m}{d} \nu_1 \nu_4, 1 - \theta \right).$$

Из определения (2.2) чисел $\beta(\nu)$ следует, что

$$\begin{aligned} g(d, m) &= \frac{1}{\ln^2 X} \sum_{\substack{\delta_1 \delta_4 \equiv 0 \pmod{d} \\ \delta_j \in M_1(d)}} \frac{\alpha(\delta_1) \alpha(\delta_4)}{\delta_1^{1-\theta} \delta_4} K \left(\frac{\delta_1 \delta_4 m}{d}, 1 - \theta \right) \\ &\quad \times \sum_{\substack{\nu_j \leq X/\delta_j \\ (\nu_j, d)=1}} \frac{\alpha(\nu_1) \alpha(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta} \nu_4} K(\nu_1 \nu_4, 1 - \theta) \ln \frac{X}{\delta_1 \nu_1} \ln \frac{X}{\delta_4 \nu_4}. \end{aligned}$$

Применим следующее равенство, справедливое для мультипликативных функций f_1 и f_2 , принимающих ненулевые значения лишь на бесквадратных числах:

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{l_j \leq y_j \\ (l_j, a)=1 \\ (l_1, l_2)=1}} f_1(l_1) f_2(l_2) f(l_1, l_2) \\ &= \sum_{(r, a)=1} \mu(r) f_1(r) f_2(r) \sum_{\substack{\lambda_1 r \leq y_1 \\ (\lambda_1, ra)=1}} \sum_{\substack{\lambda_2 r \leq y_2 \\ (\lambda_2, ra)=1}} f_1(\lambda_1) f_2(\lambda_2) f(r \lambda_1, r \lambda_2). \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} g(d, m) &= \frac{1}{\ln^2 X} \sum_{\substack{\delta_1 \delta_4 \equiv 0 \pmod{d} \\ \delta_j \in M_1(d)}} \frac{\alpha(\delta_1) \alpha(\delta_4)}{\delta_1^{1-\theta} \delta_4} K \left(\frac{\delta_1 \delta_4 m}{d}, 1 - \theta \right) \\ &\quad \times \sum_{(n, d)=1} \frac{\alpha^2(n)}{n^{2-\theta}} K(n^2, 1 - \theta) \sum_{(r, dn)=1} \frac{\mu(r) \alpha^2(r) K^2(r, 1 - \theta)}{r^{2-\theta}} \\ &\quad \times \left(\sum_{\substack{\lambda_1 \delta_1 n r \leq X \\ (\lambda_1, dnr)=1}} \frac{\alpha(\lambda_1) K(\lambda_1, 1 - \theta)}{\lambda_1^{1-\theta}} \ln \frac{X}{\delta_1 n r \lambda_1} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{\substack{\lambda_4 \delta_4 n r \leq X \\ (\lambda_4, dnr)=1}} \frac{\alpha(\lambda_4) K(\lambda_4, 1 - \theta)}{\lambda_4} \ln \frac{X}{\delta_4 n r \lambda_4} \right). \end{aligned}$$

Ниже мы покажем, что при $0 \leq \theta, \gamma \leq 1/4$, $N \geq 1$, $X_1 \geq 1$ выполняется оценка

$$S_\theta(X_1, \gamma, N) = \sum_{\substack{\lambda \leq X_1 \\ (\lambda, N)=1}} \frac{\alpha(\lambda)K(\lambda, 1-\theta)}{\lambda^{1-\gamma}} \ln \frac{X_1}{\lambda} \ll X_1^\gamma \sqrt{\ln(X_1+2)} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^2. \quad (5.1)$$

Поскольку имеет место равенство

$$\begin{aligned} \prod_{p>256} \left(1 + \frac{|r(p)|}{p^s} + \frac{|r(p)|^2}{4p^{2s}}\right) &= \prod_{p>256} \left(1 + \frac{|r(p)|}{2p^s}\right)^2 \\ &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\alpha(n)|}{n^s}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \left(\sum_{n_1 n_2 = n} |\alpha(n_1)\alpha(n_2)|\right), \end{aligned}$$

то функция $b(n) = \sum_{n_1 n_2 = n} |\alpha(n_1)\alpha(n_2)|$ мультипликативная, и если $n \mid d$, то из неравенства $|r(p)| < 4$ (где p – любое простое) следует также, что

$$b(nd) \leq b(d).$$

Воспользуемся этим неравенством и оценкой $|K(n, 1-\theta)| \leq \tau_6(n)$ (см. (4.2)). Найдем, что

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\delta_1 \delta_4 \equiv 0 \pmod{d} \\ \delta_j \in M_1(d)}} \frac{|\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)|}{\delta_1 \delta_4} \left| K\left(\frac{\delta_1 \delta_4 m}{d}, 1-\theta\right) \right| \\ &\leq \frac{1}{d} \sum_{n|d} \frac{\mu^2(n)}{n} |K(nm, 1-\theta)| \sum_{\delta_1 \delta_4 = nd} |\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)| \\ &\leq \tau_6(m) \frac{b(d)}{d} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{\tau_6(p)}{p}\right). \end{aligned}$$

Тогда из этой оценки и (5.1) получим

$$\begin{aligned} S(\theta) &\ll X^{2\theta} (\ln X)^{-2} \sum_{d \leq X^2} \frac{b^2(d)}{d^{1+\theta}} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^8 \left(1 + \frac{\tau_6(p)}{p}\right)^2 \sum_{m|d} \frac{\mu^2(m) \tau_6^2(m)}{m^{1-\theta}} \\ &\leq X^{2\theta} (\ln X)^{-2} \sum_{d \leq X^2} \frac{b^2(d)}{d^{1+\theta}} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^8 \left(1 + \frac{\tau_6(p)}{p}\right)^2 \left(1 + \frac{\tau_6^2(p)}{p^{1-\theta}}\right). \end{aligned}$$

Теперь, если p достаточно велико и $0 \leq \theta \leq 1/4$, то

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)^8 \left(1 + \frac{\tau_6(p)}{p}\right)^2 \left(1 + \frac{\tau_6^2(p)}{p^{1-\theta}}\right) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{p}};$$

следовательно,

$$\prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^8 \left(1 + \frac{\tau_6(p)}{p}\right)^2 \left(1 + \frac{\tau_6^2(p)}{p^{1-\theta}}\right) \ll \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \leq \sum_{m|d} \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Из этого неравенства найдем

$$\begin{aligned}
 S(\theta) &\ll X^{2\theta}(\ln X)^{-2} \sum_{d \leq X^2} \frac{b^2(d)}{d^{1+\theta}} \sum_{m|d} \frac{1}{\sqrt{m}} \\
 &\leq X^{2\theta}(\ln X)^{-2} \sum_{m \leq X^2} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{\substack{d \leq X^2 \\ d \equiv 0 \pmod{m}}} \frac{b^2(d)}{d^{1+\theta}} \\
 &\leq X^{2\theta}(\ln X)^{-2} \sum_{m \leq X^2} \frac{b^2(m)}{m^{3/2+\theta}} \sum_{d \leq X^2} \frac{b^2(d)}{d^{1+\theta}} \\
 &\ll X^{2\theta}(\ln X)^{-2} \sum_{d \leq X^2} \frac{b^2(d)}{d} \ll X^{2\theta}(\ln X)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Последняя оценка в предыдущем соотношении объясняется тем, что

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^2(n)}{n^s} &= \prod_{p>256} \left(1 + \frac{|r(p)|^2}{p^s} + \frac{|r(p)|^4}{16p^{2s}} \right) \\
 &= \prod_{p>256} \left(1 + \frac{|r(p)|^2}{p^s} \right) \left(1 + \frac{|r(p)|^4}{16p^{2s}(1 + |r(p)|^2/p^s)} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \left(\sum_{n_1 n_2 = n} b_1(n_1) b_2(n_2) \right),
 \end{aligned}$$

где

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_1(n)}{n^s} = \prod_{p>256} \left(1 + \frac{|r(p)|^2}{p^s} \right), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_2(n)}{n^s} = \prod_{p>256} \left(1 + \frac{|r(p)|^4}{16p^{2s}(1 + |r(p)|^2/p^s)} \right)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
 \sum_{d \leq X^2} \frac{b^2(d)}{d} &\leq \sum_{n_1 n_2 \leq X^2} \frac{b_1(n_1) b_2(n_2)}{n_1 n_2} \\
 &\leq \prod_p \left(1 + \frac{|r(p)|^4}{16p^2(1 + |r(p)|^2/p)} \right) \sum_{n_1 \leq X^2} \frac{|r(n_1)|^2}{n_1} \ll \ln X,
 \end{aligned}$$

ввиду равенства (см. [30])

$$\sum_{n \leq x} |r(n)|^2 = cx + O(x^{3/5}), \quad c > 0$$

(см. также [31] об O -оценке данной суммы, которой также достаточно для получения требуемого результата).

Осталось показать справедливость оценки (5.1) для суммы $S_\theta(X_1, \gamma, N)$. Без ограничения общности будем полагать, что $X_1 \geq 10$, и для любого $p \mid N$ пусть выполняется неравенство $p > 256$. При $\operatorname{Re} s > 1$ рассмотрим производящую функцию

$$\begin{aligned}
 h_{\theta, N}(s) &= \sum_{(n, N)=1} \frac{\alpha(n) K(n, 1 - \theta)}{n^s} \\
 &= \prod_{p \nmid N} \left(1 + \frac{\alpha(p) K(p, 1 - \theta)}{p^s} \right) = \prod_{\substack{p>256 \\ (p, N)=1}} \left(1 - \frac{r(p) K(p, 1 - \theta)}{2p^s} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_p \left(1 + \frac{|r(p)|^2}{p^s} + \frac{|r(p^2)|^2}{p^{2s}} + \dots \right)^{-1/2} \\
&\quad \times \prod_{\substack{p > 256 \\ (p, N)=1}} \left(1 + \frac{|r(p)|^2}{p^s} + \frac{|r(p^2)|^2}{p^{2s}} + \dots \right)^{1/2} \left(1 - \frac{r(p)K(p, 1-\theta)}{2p^s} \right) \\
&\quad \times \prod_{p|(256!)N} \left(1 + \frac{|r(p)|^2}{p^s} + \frac{|r(p^2)|^2}{p^{2s}} + \dots \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

При $0 \leq \theta \leq 1/4$ произведение

$$\begin{aligned}
N_1(s, \theta) &= \prod_{\substack{p > 256 \\ (p, N)=1}} \left(1 + \frac{|r(p)|^2}{p^s} + \frac{|r(p^2)|^2}{p^{2s}} + \dots \right)^{1/2} \left(1 - \frac{r(p)K(p, 1-\theta)}{2p^s} \right) \\
&= \prod_{\substack{p > 256 \\ (p, N)=1}} \left(1 + \frac{|r(p)|^2}{2p^s} + O\left(\frac{1}{p^{2\sigma}}\right) \right) \left(1 - \frac{|r(p)|^2}{2p^s} + O\left(\frac{1}{p^{\sigma+1-\theta}}\right) \right) \\
&= \prod_{\substack{p > 256 \\ (p, N)=1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{p^{2\sigma}}\right) + O\left(\frac{1}{p^{\sigma+1-\theta}}\right) \right), \quad \text{где } s = \sigma + it,
\end{aligned}$$

задает аналитическую функцию в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1/2$. Для производящей функции будем иметь равенство

$$h_{\theta, N}(s) = (D(s))^{-1/2} N_1(s, \theta) G_N(s),$$

где

$$D(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|r(n)|^2}{n^s}, \quad G_N(s) = \prod_{p|(256!)N} \left(1 + \frac{|r(p)|^2}{p^s} + \frac{|r(p^2)|^2}{p^{2s}} + \dots \right)^{1/2}.$$

С помощью формулы суммирования Перрона найдем

$$\begin{aligned}
S_{\theta}(X_1, \gamma, N) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} h_{\theta, N}(s+1-\gamma) \frac{X_1^s}{s^2} ds \\
&= \frac{X_1^{\gamma}}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{X_1^s}{(s+\gamma)^2} \frac{N_1(s+1, \theta) G_N(s+1)}{(D(s+1))^{1/2}} ds.
\end{aligned}$$

При $\operatorname{Re} s \geq 1$ справедливы следующие оценки:

$$N_1(s, \theta) \ll 1, \quad \text{если } 0 \leq \theta \leq \frac{1}{4},$$

$$G_N(s) \ll \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p} \right)^2 = G_N.$$

Перенесем прямую интегрирования $\operatorname{Re} s = 1$ на контур, состоящий из полуокружности $\{|s| = (\ln X_1)^{-1}, \operatorname{Re} s \geq 0\}$ и двух лучей $\{s = it, |t| \geq (\ln X_1)^{-1}\}$. Для функции

$D(s)$ в области $\operatorname{Re} s \geq 1$ воспользуемся оценкой $|D(s)|^{-1} \ll |s - 1|$. Интеграл на полуокружности (обозначим его через K_1) оценим следующим образом:

$$K_1 \ll X_1^\gamma G_N \frac{X_1^{(\ln X_1)^{-1}} (\ln^{-1} X_1)^{1+1/2}}{(\ln^{-1} X_1)^2} \ll X_1^\gamma (\ln X_1)^{1/2} G_N.$$

Для интеграла по лучам (обозначим его через K_2) справедливо соотношение

$$K_2 \ll X_1^\gamma G_N \int_{(\ln X_1)^{-1}}^{+\infty} \frac{t^{1/2}}{t^2} dt \ll X_1^\gamma (\ln X_1)^{1/2} G_N.$$

Оценка (5.1) получена и лемма доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Selberg, "On the zeros of Riemann's zeta-function", *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I*, **10** (1942), 59 pp.
- [2] N. Levinson, "More than one third of zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma = 1/2$ ", *Adv. in Math.*, **13**:4 (1974), 383–436.
- [3] В. Г. Журавлев, "Вычисление постоянной в теореме А. Сельберга о нулях функции Римана на критической прямой", *Сб. исследований по теории функций и функциональному анализу*, Владимир, 1974, 39–51.
- [4] B. Conrey, "Zeros of derivatives of Riemann's ξ -function on the critical line", *J. Number Theory*, **16**:1 (1983), 49–74.
- [5] B. Conrey, "Zeros of derivatives of Riemann's ξ -function on the critical line. II", *J. Number Theory*, **17**:1 (1983), 71–75.
- [6] R. J. Anderson, "Simple zeros of the Riemann zeta-function", *J. Number Theory*, **17**:2 (1983), 176–182.
- [7] J. B. Conrey, "More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line", *J. Reine Angew. Math.*, **399** (1989), 1–26.
- [8] В. Г. Журавлев, "Нули L -функций Дирихле на коротких отрезках критической прямой", *Аналитическая теория чисел и теория функций*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **76**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1978, 72–88.
- [9] A. Selberg, "Old and new conjectures about class of Dirichlet series", *Collected Papers*. v. II, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 47–63.
- [10] J. L. Hafner, "Zeros on the critical line for Dirichlet series attached to certain cusp forms", *Math. Ann.*, **264**:1 (1983), 21–37.
- [11] J. L. Hafner, "Zeros on the critical line for Maass wave form L -functions", *J. Reine Angew. Math.*, **377** (1987), 127–158.
- [12] H. Iwaniec, *Topics in Classical Automorphic Forms*, Grad. Stud. Math., **17**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [13] И. С. Резвякова, "О нулях линейных комбинаций L -функций Гекке на критической прямой", *Изв. РАН. Сер. матем.* (в печати).
- [14] H. Davenport, H. Heilbronn, "On the zeros of certain Dirichlet series", *J. London Math. Soc.*, **11** (1936), 181–185, 307–312; "On the zeros of certain Dirichlet series. II", *J. London Math. Soc.*, **11** (1936), 307–312.
- [15] С. М. Воронин, "О нулях дзета-функций квадратичных форм", *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его восьмидесятипятилетию, Тр. МИАН СССР, **142**, Наука, М., 1976, 135–147.
- [16] С. М. Воронин, *Аналитические свойства производящих функций Дирихле арифметических объектов*, Дисс. ... докт. физ.-матем. наук, М., 1977.

- [17] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994.
- [18] С. М. Воронин, “О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:1 (1980), 63–91.
- [19] А. А. Карацуба, “О нулях функции Дзвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:2 (1990), 303–315.
- [20] А. А. Карацуба, “Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле”, *Теория чисел и анализ*, Сборник статей. Труды Международной конференции по теории чисел, посвященной 100-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова, Тр. МИАН, **207**, Наука, М., 1994, 180–196.
- [21] С. А. Гриценко, “О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с рядами Дирихле из класса Сельберга”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:4 (1996), 3–42.
- [22] С. А. Гриценко, *Нули арифметических рядов Дирихле*, Дисс. ... докт. физ.-матем. наук, М., 1997.
- [23] С. А. Гриценко, “О нулях линейных комбинаций аналогов функции Римана”, *Аналитическая теория чисел и приложения*, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения профессора Анатолия Алексеевича Карацубы, Тр. МИАН, **218**, Наука, М., 1997, 134–150.
- [24] С. А. Гриценко, “О нулях специального вида функций, связанных с L -функциями Гекке мнимых квадратичных полей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:1 (1997), 45–68.
- [25] P. Deligne, “La conjecture de Weil. I”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **43** (1974), 273–307.
- [26] P. Deligne, J.-P. Serre, “Formes modulaires de poids 1”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **7** (1974), 507–530.
- [27] M. Jutila, “Distribution of rational numbers in short intervals”, *Ramanujan J.*, **14**:2 (2007), 321–327.
- [28] M. Jutila, “Transformations of Exponential Sums”, *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory* (Maiori, 1989), Univ. Salerno, Salerno, 1992, 263–270.
- [29] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1974.
- [30] R. A. Rankin, “Contributions to the theory of Ramanujan’s function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **35** (1939), 357–372.
- [31] E. Hecke, “Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. I”, *Math. Ann.*, **114**:1 (1937), 1–28.

И. С. Резвякова

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: rezvyakova@mi.ras.ru

Поступило

21.09.2009